¡¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!!

Física general

Schaum

10ª EDICIÓN

Frederick J. Bueche • Eugene Hetch

- INCLUYE 984 PROBLEMAS RESUELTOS



- PRESENTA MÁS DE 700 PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS
- CUBRE Y DESARROLLA LOS TEMAS DE UN CURSO COMPLETO DE FÍSICA GENERAL
- ¡EL APOYO PERFECTO PARA OBTENER MEJORES CALIFICACIONES!



Utilícelo para las siguientes asignaturas:







FÍSICA GENERAL
Décima edición

Frederick J. Bueche
University of Dayton

Eugene Hecht
Adelphi University

Traducción
Ing. José Hernán Pérez Castellanos
Instituto Politécnico Nacional

Revisión técnica
Ana Elizabeth García Hernández
Cinvestav-Instituto Politécnico Nacional



México • Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Guatemala • Lisboa • Madrid • Nueva York
San Juan • Santiago • Auckland • Londres • Milán • Montreal • Nueva Delhi • San Francisco
Singapur • St.Louis • Sydney • Toronto

Publisher de la división escolar: Jorge Rodríguez Hernández
Director editorial: Ricardo Martín Del Campo
Editor sponsor: Luis Amador Valdez Vázquez
Supervisora de producción: Jacqueline Brieño Álvarez
Diagramación: TROCAS

Física general

Décima edición



A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.

Corporativo Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015
Torre A, Piso 17
Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN-13: 978-970-10-6161-9
ISBN-10: 970-10-6161-6

Translated from the 10th edition of COLLEGE PHYSICS

ISBN: 0-07-144814-4

1234567890 09865432107

Impreso en México Printed in Mexico

EUGENE HECHT es integrante de tiempo completo del Departamento de Física de la Adelphi University en Nueva York, y siente una enorme satisfacción al enseñar; hace poco tiempo, los estudiantes lo eligieron Profesor del año. Ha escrito nueve libros, entre ellos *Optics*, 4ª. edición, publicado por Addison Wesley, que ha sido el texto más importante en su campo, en todo el mundo, durante casi tres décadas. El profesor Hecht también escribió *Schaum's Outline of Optics* y otras dos obras destacadas, *Physics: Alg/Trig*, 3ª. edición, y *Physics: Calculus*, 2ª. edición, ambas publicadas por Brooks/Cole. Estos modernos e innovadores textos de introducción se emplean en Estados Unidos y otros países. Como integrante del consejo editorial ha ayudado a diseñar y crear la *Encyclopedia of Modern Optic*, publicada por Elsevier (2005). Su libro acerca del ceramista estadounidense G. E. Ohr, *The Mad Potter of Biloxi*, publicado por Abbeville, ganó el premio Libro de arte del año 1989. El profesor Hecht ha ofrecido conferencias sobre arte y física en museos, galerías, y universidades en todo el mundo. En la actualidad es parte del consejo del nuevo museo de arte George E. Ohr, diseñado por Frank Gehry, y es coautor del catálogo y curador asociado de la exposición inaugural. En años recientes el profesor Hecht ha publicado varios documentos sobre la teoría especial de la relatividad, la historia de las ideas, y aspectos fundamentales de la física. Dedica casi todo su tiempo a estudiar física, escribir sobre arte y practicar para obtener una cinta negra en cuarto grado en *Tae kwan do*.

FREDERICK J. BUECHE (finado) en años recientes fue nombrado Profesor distinguido en gran escala, en la University of Dayton, y obtuvo su doctorado en física en la Cornell University. Publicó casi 100 documentos de investigación relacionados con la física de los polímeros altos. Además, fue el autor de un texto para estudiantes titulados sobre física macromolecular. Sin embargo, su principal esfuerzo fue en la enseñanza de la física. En 1965 publicó su texto de física general, *Principles of Physics*, el cual ahora está en su quinta edición y se utiliza en muchos lugares. El doctor Bueche fue el autor de otros cinco textos de introducción a la física y numerosos libros de trabajo y guías de estudio.

The McGraw·Hill Companies

CONTENIDO

PREFACIO

El curso de introducción a la física, también conocido como "física general" o "física universitaria", suele ser una visión panorámica a fondo, en dos semestres, de temas clásicos, además de material seleccionado de la física moderna. En realidad, el nombre "física universitaria" se ha vuelto un eufemismo para una introducción a la física sin cálculo. El libro *Outline of College Physics* de Schaum fue concebido para complementar de modo específico tal curso, ya sea en escuelas de enseñanza media o en universidades. El conocimiento matemático requerido incluye álgebra básica, algo de trigonometría y un poco de análisis de vectores, gran parte de lo cual se aprende con la experiencia. Sin embargo, se supone que el lector ya tiene cierta comprensión del álgebra. El apéndice B es un repaso general de trigonometría que funciona muy bien. No obstante eso, las ideas necesarias se desarrollan en su momento, conforme se necesitan. Se aplica lo mismo al análisis de vectores rudimentario que se requiere: también se enseña cuando lo requiere la situación.

En algunos aspectos, aprender física no es igual que aprender casi todas las otras disciplinas. La física tiene un vocabulario especial que constituye un lenguaje propio, el cual se traslada de inmediato a una forma simbólica que se analiza y extiende con lógica y precisión matemáticas. Palabras como energía, momento, corriente, flujo, interferencia, capacitancia y demás tienen significados científicos muy especiales. Deben aprenderse con rapidez y exactitud porque la disciplina se desarrolla una capa tras otra; si usted no conoce exactamente qué es la velocidad, no puede aprender qué son la aceleración o la cantidad de movimiento, y sin éstos no puede saber qué es la fuerza, y así sucesivamente. Cada capítulo de este libro comienza con un resumen preciso de las ideas, las definiciones, las relaciones, las leyes, las reglas y las ecuaciones importantes asociadas con el tema que se analiza. Todo este material constituye la estructura conceptual del discurso, y es evidente que dominarlo representa un desafío por sí mismo, porque la física es más que la simple declaración de sus principios.

Cada físico que alguna vez haya intentado enseñar esta extraordinaria materia ha escuchado el lamento universal de los estudiantes, "comprendo todo, pero no puedo resolver los problemas". Sin embargo, casi todos los maestros creen que "hacer" los problemas es la culminación crucial de toda la experiencia, es la prueba definitiva de la comprensión y la aptitud. Los esquemas conceptuales de las definiciones, las reglas y las leyes se integran en el proceso de solución de problemas como en ningún otro lugar. Además, debido a que los problemas reflejan la realidad desde nuestro mundo, el estudiante adquiere una habilidad de inmenso valor práctico. Ésta no es una tarea fácil: efectuar el análisis de incluso un problema moderadamente complejo requiere una extraordinaria concentración intelectual y una incesante atención a los detalles que van mucho más allá de simplemente "saber cómo hacerlo". Igual que cuando ejecuta un instrumento musical, el estudiante debe aprender los fundamentos y después practicar, practicar, practicar. Una nota que no se incluye en una sonata puede pasarse por alto; sin embargo, un solo error en el cálculo se propaga por todo el esfuerzo y produce una respuesta completamente errónea. El propósito de este libro es conseguir una ejecución perfecta.

En esta nueva edición hemos reorganizado los primeros capítulos para que concuerden con la organización de los libros de texto de introducción actuales. Para facilitar el proceso de aprendizaje y aumentar la confianza del estudiante hemos agregado varios problemas sencillos de un solo concepto. Además hemos revisado cada problema del libro, incluido comentarios esclarecedores donde se requiere, y ampliado y acercado las soluciones correspondientes donde resulta adecuado.

Ahora se especifica el nivel de dificultad de cada problema mediante las clasificaciones [I], [II], o [III]. Los problemas sencillos de un solo concepto se señalan mediante un [I] después de su número. Un [II] significa un problema un poco más complicado, pero todavía manejable. La característica de los problemas de nivel [III] es que son desafiantes.

Si usted desea comentar algo acerca de esta edición, tiene sugerencias para la siguiente edición o conoce algunos problemas que quiera compartir, envíelos a E. Hecth, Adelphi University, Physics Department, Garden City, NY, 11530.

EUGENE HECHT
Freeport, NY

RAPIDEZ, DESPLAZAMIENTO Y VELOCIDAD: INTRODUCCIÓN A LOS VECTORES

1

UNA CANTIDAD ESCALAR, o un **escalar**, no tiene una dirección en el espacio. Son escalares muchos conceptos de la física, como longitud, tiempo, temperatura, masa, densidad, carga y volumen; cada uno tiene una escala o tamaño, pero no una dirección asociada. El número de estudiantes en una clase, la cantidad de azúcar en un frasco y el costo de una casa son cantidades escalares conocidas.

Los escalares se especifican mediante números comunes y se suman y restan igual que ellos. Dos dulces en una caja más siete en otra dan un total de nueve dulces.

DISTANCIA (*l*)**:** Subir a un vehículo y recorrer una distancia, cierta longitud en el espacio, la cual se simboliza mediante la letra *l*. Suponga que obtiene del odómetro una lectura de 100 millas (o 161 km); ésa es la distancia a la que llegó sin tomar en cuenta la ruta que siguió, las colinas o las vueltas. Asimismo, el insecto de la figura 1-1 caminó una distancia *l* medida a lo largo de una ruta sinuosa; *l* también se denomina la **longitud de la trayectoria** y es una cantidad escalar. (Por cierto, casi todas las personas evitan utilizar *d* para la distancia debido a que se utiliza mucho en la representación de derivadas.)

LA RAPIDEZ PROMEDIO (MAGNITUD PROMEDIO DE LA RAPIDEZ) (v_{prom}) es una medida de qué tan rápido viaja un objeto en el espacio y también es una cantidad escalar. Imagine un objeto que tarda un tiempo *t* para recorrer una distancia *l*. La ***rapidez promedio*** durante ese intervalo se define mediante

$$\textit{Rapidez promedio} = \frac{\text{distancia total recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$v_{prom} = \frac{l}{t}$$

Las unidades de rapidez cotidianas son las millas por hora, pero en el trabajo científico se usan kilómetros por hora (km/h) o, mejor aún, metros por segundo (m/s). Como se observa, la rapidez es parte del concepto más incluyente de velocidad, y por eso se usa la letra v. Puede surgir un problema con la rapidez promedio de un objeto, pero también puede tratar el caso especial de una ***rapidez constante*** v, dado que $v_{prom} = v = l/t$ (consulte el problema 1.3).

También puede ver esta definición escrita como $v_{prom} = æl/æt$, en donde el símbolo æ significa “el cambio en”. Esa notación simplemente subraya que se trata con intervalos de tiempo (æ*t*) y de espacio (æ*l*). Si se traza una curva de **distancia contra tiempo** y se observan dos puntos P_i y P_f en ella, su separación en el espacio (æ*l*) es el *aumento* y en el tiempo (æ*t*) es el *transcurso*. Por tanto, æ*l*/æ*t* es la *pendiente* de la línea dibujada desde la ubicación inicial P_i a la ubicación final P_f. *La pendiente es la rapidez promedio durante ese intervalo específico* (consulte el problema 1.5). Recuerde que la distancia recorrida, por ejemplo, la que indica el odómetro de un vehículo, siempre es positiva y nunca disminuye; por tanto, la gráfica de *l* contra *t* siempre es positiva y nunca disminuye.

RAPIDEZ INSTANTÁNEA (v)**:** Hasta aquí se ha definido la “rapidez promedio”, pero también se suele necesitar la rapidez de un objeto en un momento específico, por ejemplo, 10 s después de 1:00. Asimismo, se puede pedir la velocidad de algo AHORA. Ése es un nuevo concepto llamado la ***rapidez instantánea***, pero se puede definir al desarrollar la idea de la rapidez promedio. Lo que se necesita es la rapidez promedio determinada en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño centrado en el instante deseado. De manera formal, eso se plantea como

$$v = \lim_{\Delta t \Uparrow 0}\left[\frac{\Delta l}{\Delta t}\right]$$

***La rapidez instantánea (o, simplemente, la rapidez) es el valor que limita la rapidez promedio* (æl/æt) *determinado cuando se acerca a cero el intervalo durante el cual ocurre el promedio* (æt)**. Esta expresión matemática se vuelve muy importante porque conduce al cálculo y a la idea de la derivada. Para que no haya complicación con los cálculos no hay que ocuparse de los detalles, sólo se debe comprender el concepto general. En el capítulo siguiente se desarrollan ecuaciones para la rapidez instantánea de un objeto en un momento específico.

En una gráfica, la pendiente de la tangente de una línea para la curva de la distancia en contra del tiempo en cualquier punto (es decir, en cualquier momento particular) es la rapidez instantánea en ese momento.

UNA CANTIDAD VECTORIAL es un concepto de la física que implica una dirección y sólo se especifica por completo si se proporcionan su **magnitud** (es decir, su tamaño) y una dirección. Muchos conceptos físicos, como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza y la cantidad de movimiento, son cantidades vectoriales. En general, un *vector* (el cual indica una cantidad específica de una cantidad vectorial) se señala con un segmento de línea con dirección, y se representa mediante una flecha (dibujada a escala) cuya magnitud y dirección determinan el vector. En el material impreso, los vectores se presentan en negritas (v.g., **F** para la fuerza). Cuando se escriben a mano, se suele diferenciar a un vector al colocar una flecha sobre el símbolo adecuado (v.g., $\vec{F}$). Para una máxima claridad se combinarán ambas opciones y se utilizará $\vec{\mathbf{F}}$.

EL DESPLAZAMIENTO de un objeto de un lugar a otro es una cantidad vectorial. En la figura 1-1, el desplazamiento del insecto para ir de P_1 a P_2 se especifica mediante el vector $\vec{\mathbf{s}}$ (el símbolo *s* proviene del uso en el siglo pasado, el cual corresponde al "espacio" entre dos puntos). Si la distancia en línea recta de P_1 a P_2 es, por ejemplo, 2.0 m, sólo se dibuja que $\vec{\mathbf{s}}$ sea cualquier longitud conveniente y se define con 2.0 m. En cualquier caso, $\vec{\mathbf{s}}$ = 2.0 m — 10° NORESTE.

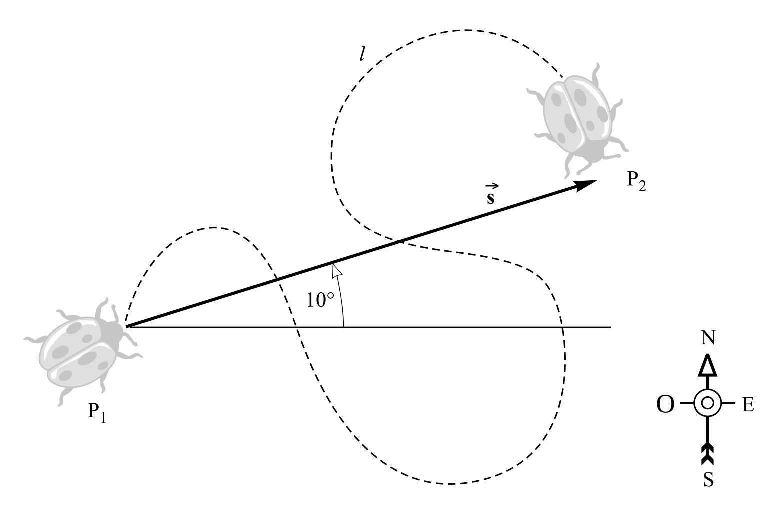


Figura 1-1

LA VELOCIDAD es una cantidad vectorial que abarca la rapidez y la dirección del movimiento. Si un objeto experimenta un desplazamiento vectorial $\vec{\mathbf{s}}$ en un intervalo de tiempo *t*, en tal caso

$$\textit{Velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento vectorial}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{prom}\ 2\ \frac{\vec{\mathbf{s}}}{t}$$

La dirección del vector velocidad es igual que la del vector desplazamiento. Las unidades de la velocidad (y la rapidez) son las de la distancia dividida entre el tiempo, como m/s o km/h.

LA VELOCIDAD INSTANTÁNEA es la velocidad promedio evaluada para un intervalo de tiempo que tiende a cero. Por tanto, si se somete un objeto a un desplazamiento æ$\vec{\mathbf{s}}$ en un tiempo æ*t*, la velocidad instantánea para ese objeto es

$$\vec{\mathbf{v}}\ 2\ \lim_{\Delta t \Uparrow 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{s}}}{\Delta t}$$

en donde la notación significa que se va a evaluar la razón æ$\vec{\mathbf{s}}$/æ*t* para un intervalo de tiempo æ*t* que tiende a cero.

SUMA DE VECTORES: El concepto de "vector" no queda definido por completo hasta que se establecen algunas reglas de comportamiento. Por ejemplo, ¿cómo se suman varios vectores (desplazamientos, fuerzas, lo que sea)? El insecto de la figura 1-2 camina de P_1 a P_2, se detiene y después continúa a P_3. Experimenta dos desplazamientos, $\vec{\mathbf{s}}_1$ y $\vec{\mathbf{s}}_2$, los cuales se combinan para producir un desplazamiento neto $\vec{\mathbf{s}}$. Aquí, $\vec{\mathbf{s}}$ se denomina la ***resultante*** o suma de los dos desplazamientos y es el equivalente físico de los dos tomados juntos $\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{s}}_1 + \vec{\mathbf{s}}_2$.

MÉTODO DE PUNTA A COLA (O DEL POLÍGONO): Los dos vectores de la figura 1-2 muestran cómo se suman de manera gráfica dos (o más) vectores. Simplemente ponga la cola del segundo ($\vec{\mathbf{s}}_2$) en la punta del primero ($\vec{\mathbf{s}}_1$); en tal caso, la resultante va del punto inicial P_1 (la cola de $\vec{\mathbf{s}}_1$) al punto final P_2

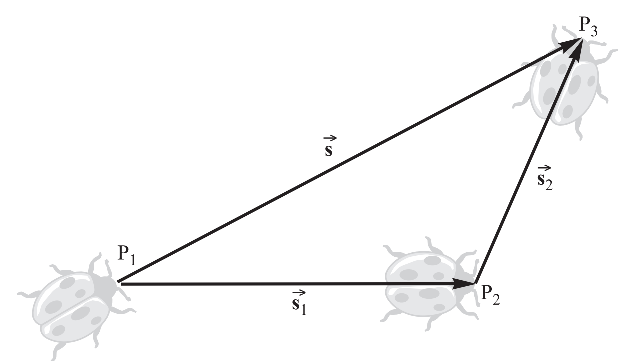
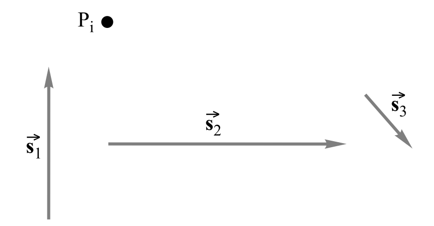
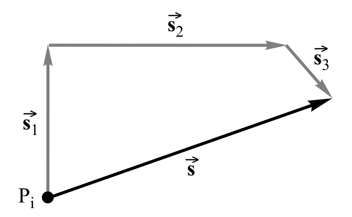


Figura 1-2





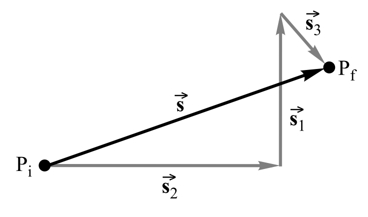


Figura 1-3

(la punta de $\vec{\mathbf{s}}_2$). La figura 1-3*a* es más general; presenta un punto inicial P_i y tres vectores desplazamiento. Si se sigue de la cola a la punta estos tres desplazamientos *en cualquier orden* [figuras 1-3*b* y *c*] se llega al mismo punto final P_f, y la misma resultante $\vec{\mathbf{s}}$. En otras palabras

$$\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{s}}_1 + \vec{\mathbf{s}}_2 + \vec{\mathbf{s}}_3 = \vec{\mathbf{s}}_2 + \vec{\mathbf{s}}_1 + \vec{\mathbf{s}}_3 \text{ etcétera.}$$

Siempre y cuando el insecto comience en P_i y efectúe los tres desplazamientos, en cualquier secuencia, terminará en P_f.

El mismo procedimiento de punta a cola se aplica a cualquier tipo de vector, ya sea de desplazamiento, velocidad, fuerza u otra cosa. En consecuencia, en la figura 1-4 se presenta la resultante ($\vec{\mathbf{R}}$) **R**obtenida al sumar los vectores genéricos $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$. El tamaño o la **magnitud** de un vector, por ejemplo $\vec{\mathbf{R}}$, es su *valor absoluto* y se indica simbólicamente como $|\vec{\mathbf{R}}|$; en este momento se verá cómo calcularlo. Una práctica común, aunque no es siempre una buena idea, es representar la magnitud de un vector con una letra en cursivas, por ejemplo, $R = |\vec{\mathbf{R}}|$.

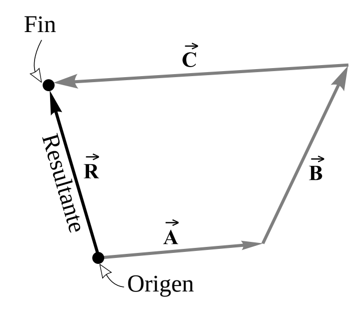


Figura 1-4

MÉTODO DEL PARALELOGRAMO para sumar dos vectores: la resultante de dos vectores unidos sus orígenes en un punto y que forman cualquier ángulo se puede representar mediante la diagonal de un paralelogramo. Se dibujan los dos vectores como los lados del paralelogramo y la resultante es su diagonal, como en la figura 1-5. La resultante tiene una dirección que se aleja del origen de los dos vectores.

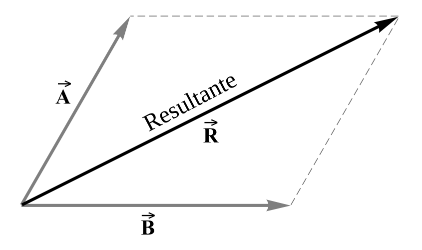


Figura 1-5

SUSTRACCIÓN O RESTA DE VECTORES: Para restar un vector $\vec{\mathbf{B}}$ de un vector $\vec{\mathbf{A}}$ se invierte la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ y se suma individualmente al vector $\vec{\mathbf{A}}$, es decir, $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}})$.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS se definen en relación con un ángulo recto. Para el triángulo rectángulo de la figura 1-6, por definición

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{B}{C}, \qquad \cos\theta = \frac{\text{adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{A}{C}, \qquad \tan\theta = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{B}{A}$$

Se suelen utilizar en las formas

$$B = C\,\text{sen}\,\theta \qquad A = C\cos\theta \qquad B = A\tan\theta$$

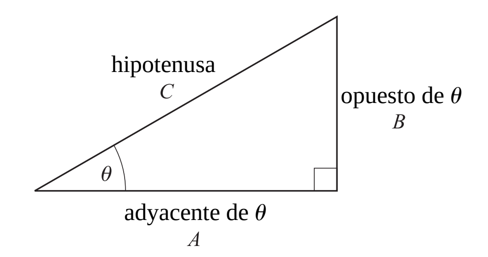


Figura 1-6

UNA COMPONENTE DE UN VECTOR es su valor real en una dirección determinada. Por ejemplo, la componente x de un desplazamiento es el desplazamiento paralelo al eje x causado por el desplazamiento determinado. Un vector en tres direcciones se puede considerar como la resultante de sus vectores componentes resueltas a lo largo de tres direcciones *mutuamente perpendiculares*. Asimismo, un vector en dos dimensiones se resuelve en dos vectores componentes que actúan a lo largo de dos direcciones mutuamente perpendiculares. La figura 1-7 muestra el vector $\vec{\mathbf{R}}$ y sus vectores componentes x y y, $\vec{\mathbf{R}}_x$ y $\vec{\mathbf{R}}_y$, los cuales tienen magnitudes

$$|\vec{\mathbf{R}}_x| = |\vec{\mathbf{R}}| \cos\theta \qquad \text{y} \qquad |\vec{\mathbf{R}}_y| = |\vec{\mathbf{R}}|_x \operatorname{sen}\theta$$

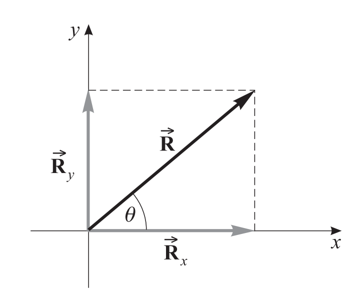


Figura 1-7

lo cual equivale a

$$R_x = R\cos\theta \qquad \text{y} \qquad R_y = R \operatorname{sen}\theta$$

MÉTODO DE COMPONENTES PARA SUMAR VECTORES: Cada vector se resuelve en sus componentes x, y y z, con las componentes que tienen direcciones negativas consideradas como negativas. La componente escalar x R_x de la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ es la suma algebraica de todas las componentes escalares de x. Las componentes escalares de y y de z de la resultante se obtienen de manera similar. Con las componentes conocidas, la magnitud de la resultante se determina mediante

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

En dos dimensiones, el ángulo de la resultante con el eje x se encuentra a partir de la relación

$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$$

LOS VECTORES UNITARIOS tienen una magnitud de uno y se representan con un símbolo en negritas coronado con un acento circunflejo. Los vectores unitarios especiales $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ y $\hat{\mathbf{k}}$ se asignan a los ejes x, y y z, respectivamente. Un vector $3\hat{\mathbf{i}}$ representa un vector de 3 unidades en la dirección $+x$, mientras que $-5\hat{\mathbf{k}}$ representa un vector de 5 unidades en la dirección $-z$. Un vector $\vec{\mathbf{R}}$ que tiene componentes x, y y z escalares R_x, R_y y R_z, respectivamente, se escribe como $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1.1 [I] Un tren de juguete viaja por una pista con una rapidez promedio de 0.25 m/s. ¿A qué distancia viajará en 4.00 minutos?

La ecuación definitoria es $v_{prom} = l/t$. Aquí l está en metros y t en segundos, de modo que primero hay que convertir 4.00 minutos a segundos: (4.00 min)(60.0 s/min) = 240 s. Al despejar la ecuación para l,

$$l = v_{prom}t = (0.25\ \text{m/s})(240\ \text{s})$$

Dado que la rapidez sólo tiene dos cifras significativas, $l = 60$ m.

1.2 [I] Una estudiante conduce un automóvil que viaja 10.0 km en 30.0 min. ¿Cuál es su rapidez promedio?

La ecuación definitoria es $v_{prom} = l/t$. Aquí l está en kilómetros y t en minutos, de modo que primero hay que convertir 10.0 km a metros y después 30.0 minutos a segundos: (10.0 km)(1 000 m/km) = 10.0×10^3 m y (30.0 min)(60.0 s/min) = 1 800 s. Se necesita despejar v_{prom} y ofrecer la respuesta numérica con tres cifras significativas:

$$v_{prom} = \frac{l}{t} = \frac{10.0 \times 10^3\ \text{m}}{1800\ \text{s}} = 5.56\ \text{m/s}$$

1.3 [I] Al rodar por el taller a una rapidez constante de 4.25 m/s, un robot cubre una distancia de 17.0 m. ¿Cuánto tarda ese viaje?

Dado que la rapidez es constante, la ecuación definitoria es $v = l/t$. Al multiplicar ambos lados de la expresión por t y después dividir ambos entre v:

$$t = \frac{l}{v} = \frac{170.0\ \text{m}}{4.25\ \text{m/s}} = 4.00\ \text{s}$$

1.4 [I] Cambie la rapidez 0.200 cm/s a unidades de kilómetros por año.

$$0.200\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = \left(0.200\,\frac{\cancel{\text{cm}}}{\cancel{\text{s}}}\right)\left(10^{-5}\,\frac{\text{km}}{\cancel{\text{cm}}}\right)\left(3\,600\,\frac{\cancel{\text{s}}}{\cancel{\text{h}}}\right)\left(24\,\frac{\cancel{\text{h}}}{\cancel{\text{d}}}\right)\left(365\,\frac{\cancel{\text{d}}}{\text{y}}\right) = 63.1\,\frac{\text{km}}{\text{y}}$$

1.5 [I] Un automóvil viaja por un camino y las lecturas de su odómetro se grafican contra el tiempo en la figura 1-8. Encuentre la rapidez instantánea del vehículo en los puntos A y B. ¿Cuál es la rapidez promedio del automóvil?

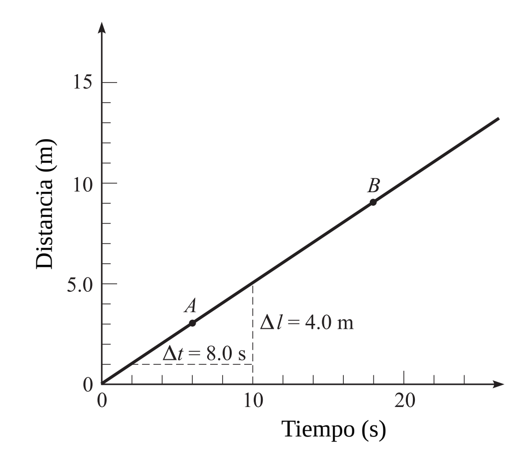


Figura 1-8

Como la rapidez se obtiene de la pendiente $\Delta l/\Delta t$ de la recta tangente, se toma una tangente a la curva en el punto *A*. En este caso, la recta tangente es la curva misma. Para el triángulo presentado en la figura *A*, se tiene

$$\frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{4.0 \text{ m}}{8.0 \text{ s}} = 0.50 \text{ m/s}$$

Ésta también es la rapidez en el punto *B* y en cualquier otro punto en la gráfica en línea recta. Por tanto, $v = 0.50 \text{ m/s} = v_{prom}$.

1.6 [I] Un muchacho está a 6.00 m de la base de un asta bandera de 8.00 m de altura. Determine la magnitud del desplazamiento del águila de bronce en la punta del asta con respecto a los pies del joven.

La geometría corresponde a un triángulo rectángulo 3-4-5 (v.g., $3 \times 2 - 4 \times 2 - 5 \times 2$). Por tanto, la hipotenusa, la cual es el lado que mide 5, debe tener 10.0 m de longitud y ésa es la magnitud del desplazamiento.

1.7 [II] Un corredor da una vuelta por una pista de 200 m en un tiempo de 25 s. ¿Cuáles son *a*) la rapidez promedio y *b*) la velocidad promedio del corredor?

a) A partir de la definición,

$$\text{Rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{200 \text{ m}}{25 \text{ s}} = 8.0 \text{ m/s}$$

b) Debido a que la carrera terminó en el punto inicial, el vector desplazamiento del punto inicial al punto final tiene una longitud de cero. Dado que $\vec{\mathbf{v}}_{av} = \vec{\mathbf{s}}/t$,

$$|\vec{\mathbf{v}}_{prom}| = \frac{0 \text{ m}}{25 \text{ s}} = 0 \text{ m/s}$$

1.8 [I] Mediante el método gráfico, encuentre la resultante de los dos desplazamientos siguientes: 2.0 m en 40° y 4.0 m en 127°, y los ángulos considerados en relación con el eje $+x$, como es costumbre. Proporcione la respuesta con dos cifras significativas. (Consulte en el apéndice A lo relacionado con las cifras significativas.)

Seleccione los ejes *x* y *y* presentados en la figura 1-9 y coloque los desplazamientos a escala, de punta a cola desde el origen. Observe que todos los ángulos se miden desde el eje $+x$. El vector resultante $\vec{\mathbf{s}}$ apunta del punto inicial al punto final, como se observa. Se mide su longitud en el diagrama a escala para encontrar su magnitud, 4.6 m. Con un transportador, se mide que su ángulo θ es 101°. Por tanto, el desplazamiento resultante es 4.6 m en 101°.

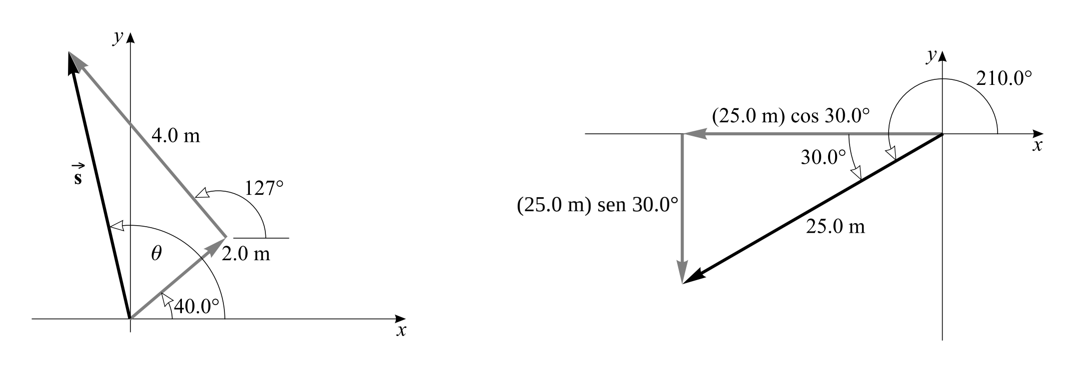


Figura 1-9 **Figura 1-10**

1.9 [I] Encuentre las componentes *x* y *y* de un desplazamiento de 25.0 m con un ángulo de 210.0°.

El vector desplazamiento y sus componentes se presentan en la figura 1-10. Las componentes escalares son

$$\text{componente } x = -(25.0 \text{ m}) \cos 30.0° = -21.7 \text{ m}$$
$$\text{componente } y = -(25.0 \text{ m}) \text{ sen } 30.0° = -12.5 \text{ m}$$

Observe en particular que cada componente apunta en la dirección de la coordenada negativa y, por tanto, debe considerarse como negativa.

1.10 [II] Despeje el problema 1.8 mediante componentes rectangulares.

Se resuelve cada vector en componentes rectangulares, igual que en las figuras 1-11*a* y *b*. (Se pone un símbolo de cruz en el vector original para mostrar que es reemplazado por sus componentes.) La resultante tiene componentes escalares de

$$s_x = 1.53 \text{ m} - 2.41 \text{ m} = -0.88 \text{ m} \qquad s_y = 1.29 \text{ m} + 3.19 \text{ m} = -4.48 \text{ m}$$

Observe que debe asignar un valor negativo a las componentes que apuntan en la dirección negativa.

La resultante se presenta en la figura 1.11*c*; ahí se ve que

$$s = \sqrt{(0.88 \text{ m})^2 + (4.48 \text{ m})^2} = 4.6 \text{ m} \qquad \tan\phi = \frac{4.48 \text{ m}}{0.88 \text{ m}}$$

y $\phi = 79°$, a partir de lo cual $\theta = 180° - \phi = 101°$. Por tanto, $\vec{\mathbf{s}} = 4.6 \text{ m} - 101°$ DESDE EL EJE $+x$; recuerde que las direcciones de los vectores deben expresarse de manera explícita.

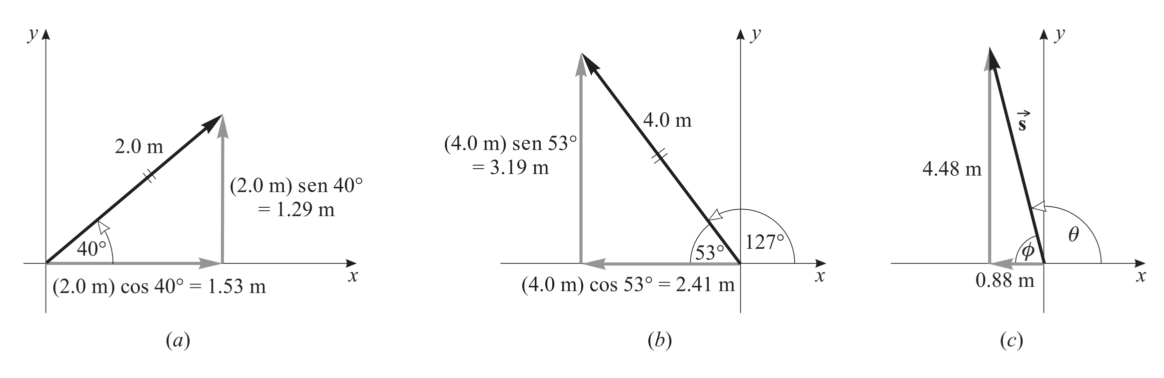


Figura 1-11

1.11 [II] Sume los dos vectores desplazamiento siguientes mediante el método del paralelogramo: 30 m a 30° y 20 m a 140°. Recuerde que los números como 30 m y 20 m tienen dos cifras significativas.

Los vectores se dibujan con un origen común en la figura 1-12*a*. Se construye un paralelogramo al utilizarlos como lados, como en la figura 1-12*b*. Entonces la resultante $\vec{\mathbf{S}}$ se representa con la diagonal. Al medir, se encuentra que $\vec{\mathbf{s}}$ es 30 m en 72°.



Figura 1-12

1.12 [II] Exprese los vectores de las figuras 1-11*c*, 1-13, 1-14 y 1-15 en la forma $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$ (se dejan fuera las unidades).

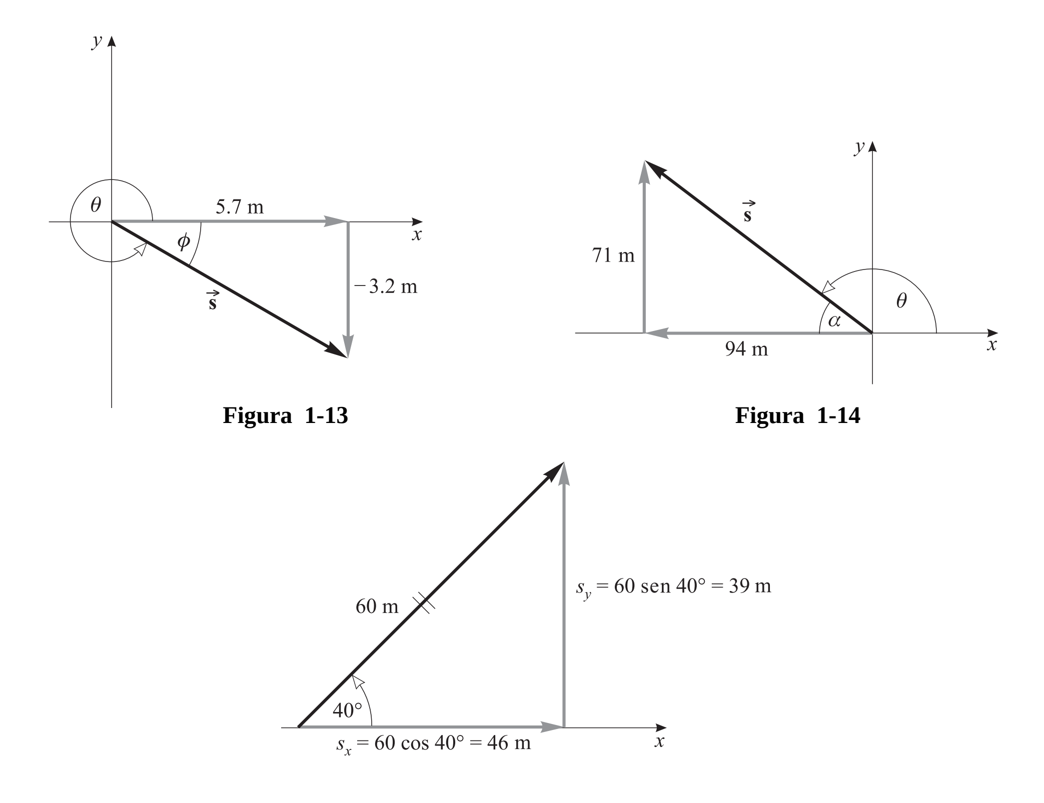


Figura 1-13 **Figura 1-14**

Figura 1-15

Sin olvidar que deben utilizarse signos más y menos para mostrar un sentido a lo largo de un eje, se puede escribir

Para la figura 1-11*c*: $\vec{\mathbf{R}} = -0.88\hat{\mathbf{i}} + 4.48\hat{\mathbf{j}}$
Para la figura 1-13: $\vec{\mathbf{R}} = 5.7\hat{\mathbf{i}} - 3.2\hat{\mathbf{j}}$
Para la figura 1-14: $\vec{\mathbf{R}} = -94\hat{\mathbf{i}} + 71\hat{\mathbf{j}}$
Para la figura 1-15: $\vec{\mathbf{R}} = 46\hat{\mathbf{i}} + 39\hat{\mathbf{j}}$

1.13 [I] Realice gráficamente las siguientes sumas y sustracciones de vectores, en donde $\vec{\mathbf{A}}$, $\vec{\mathbf{B}}$ y $\vec{\mathbf{C}}$ son los vectores presentados en la figura 1-16: *a*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$; *b*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$; *c*) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$; *d*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{C}}$.

Observe las figuras 1-16*a* a la *d*. En *c*), $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}})$; es decir, para restar $\vec{\mathbf{B}}$ de $\vec{\mathbf{A}}$, invierta la dirección de $\vec{\mathbf{B}}$ y haga la suma de vectores con $\vec{\mathbf{A}}$. Asimismo, en *d*), $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + (-\vec{\mathbf{C}})$, en donde $-\vec{\mathbf{C}}$ tiene la misma magnitud, pero la dirección opuesta de $\vec{\mathbf{C}}$.

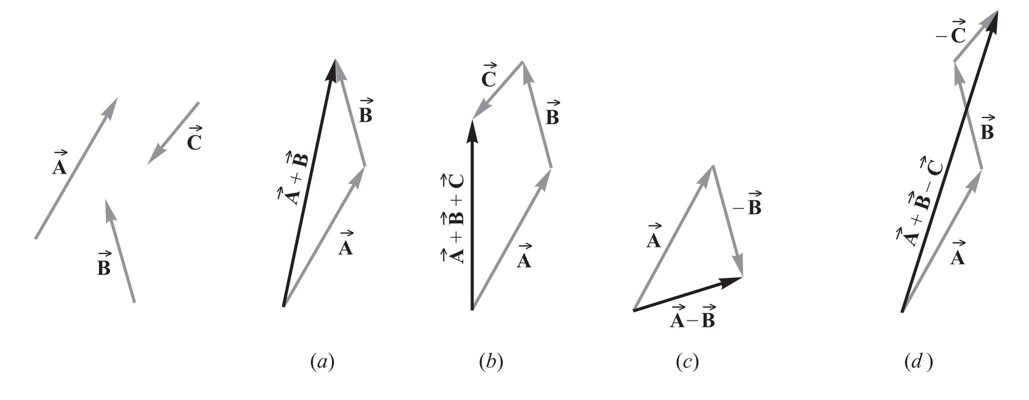


Figura 1-16

1.14 [II] Si $\vec{\mathbf{A}} = -12\hat{\mathbf{i}} + 25\hat{\mathbf{j}} + 13\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}}$, encuentre la resultante cuando $\vec{\mathbf{A}}$ se resta de $\vec{\mathbf{B}}$.

Desde un enfoque sólo matemático, se tiene

$$\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{A}} = (-3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}}) - (-12\hat{\mathbf{i}} + 25\hat{\mathbf{j}} + 13\hat{\mathbf{k}})$$
$$= -3\hat{\mathbf{j}} + 7\hat{\mathbf{k}} + 12\hat{\mathbf{i}} - 25\hat{\mathbf{j}} - 13\hat{\mathbf{k}} = 12\hat{\mathbf{i}} - 28\hat{\mathbf{j}} - 6\hat{\mathbf{k}}$$

Observe que $12\hat{\mathbf{i}} - 25\hat{\mathbf{j}} - 13\hat{\mathbf{k}}$ es simplemente $\vec{\mathbf{A}}$ con la dirección invertida. Por tanto, en esencia se tiene $\vec{\mathbf{A}}$ invertida y sumada a $\vec{\mathbf{B}}$.

1.15 [II] Una embarcación viaja a una rapidez de 8 km/h en las aguas tranquilas de un lago. En las aguas de una corriente, se puede mover a 8 km/h respecto al agua de la corriente. Si la rapidez de la corriente es de 3 km/h, ¿qué tan rápido deja atrás la embarcación un árbol en la playa cuando viaja *a*) contra la corriente y *b*) a favor de la corriente.

a) Si el agua estuviera tranquila, la rapidez de la embarcación para dejar atrás el árbol sería de 8 km/h. Pero la corriente la lleva en la dirección opuesta a 3 km/h. Por tanto, la rapidez de la embarcación respecto al árbol es de 8 km/h − 3 km/h = 5 km/h.

b) En este caso, la corriente lleva la embarcación en la misma dirección en que ésta se mueve. Por tanto, su rapidez para dejar atrás el árbol es de 8 km/h + 3 km/h = 11 km/h.

1.16 [III] Un avión viaja hacia el este con una rapidez de 500 km/h. Pero un viento de 90 km/h sopla hacia el sur. ¿Cuáles son la dirección y la rapidez respecto al suelo?

La velocidad resultante del avión respecto al suelo, $\vec{\mathbf{x}}_{\text{AVIÓN-SUELO}}$, es la suma de dos vectores, la velocidad del avión respecto al aire, $\vec{\mathbf{x}}_{\text{AVIÓN-AIRE}} = 500$ km/h —ESTE y la velocidad del aire respecto al suelo, $\vec{\mathbf{x}}_{\text{AVIÓN-SUELO}} = 90$ km/h —SUR. En otras palabras, $\vec{\mathbf{x}}_{\text{AVIÓN-SUELO}} = \vec{\mathbf{x}}_{\text{AVIÓN-AIRE}} + \vec{\mathbf{x}}_{\text{AVIÓN-SUELO}}$. Estas velocidades componentes se presentan en la figura 1.17. Entonces, la rapidez resultante del avión es

$$v_{\text{AVIÓN-SUELO}} = \sqrt{(500\ \text{km/h})^2 + (90\ \text{km/h})^2} = 508\ \text{km/h}$$

el ángulo α se obtiene mediante

$$\tan\alpha = \frac{90\ \text{km/h}}{500\ \text{km/h}} = 0.18$$

a partir de lo cual $\alpha = 10°$. La velocidad del avión respecto al suelo es de 508 km/h a 10° sureste.

1.17 [III] Con la misma rapidez en el aire del problema 1.16, ¿cuál dirección debe tomar el avión para avanzar hacia el este respecto a la Tierra?

La suma de la velocidad del avión en el aire y la velocidad del viento será la velocidad resultante del avión respecto a la Tierra. Esto se aprecia en el diagrama de vectores de la figura 1-18. Observe que, tal como se requiere, la velocidad resultante es hacia el este. Sin olvidar que la rapidez del viento se proporciona a dos cifras significativas, se ve que sen $\theta = (90\ \text{km/h})(500\ \text{km/h})$, a partir de lo cual $\theta = 10°$. El avión debe dirigirse 10° hacia el norte para avanzar hacia el este respecto a la Tierra.

Para determinar la rapidez hacia el este del avión, se observa en la figura que $v_{\text{AVIÓN SUELO}} = (500\ \text{km/h})\cos\theta = 4.9 \times 10^5$ m/h.

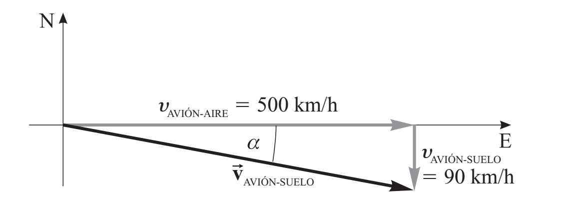


Figura 1-17

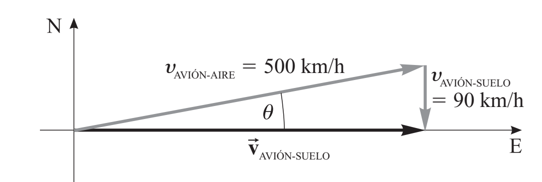


Figura 1-18

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

1.18 [I] Tres niños en un estacionamiento lanzan un cohete que se eleva en el aire por un arco de 380 m de longitud en 40 s. Determine la rapidez promedio. **Resp.** 9.5 m/s.

1.19 [I] De acuerdo con su computadora, un robot que salió de su armario y viajó 1 200 m tuvo una rapidez promedio de 20.0 m/s. ¿Cuánto tardó su recorrido? **Resp.** 60.0 s.

1.20 [I] La lectura del odómetro de un automóvil es de 22 687 km al comienzo de un viaje y de 22 791 km al final. El viaje tardó 4.0 horas. ¿Cuál fue la rapidez promedio del automóvil en km/h y en m/s? **Resp.** 26 km/h, 7.2 m/s.

1.21 [I] Un automóvil viaja a razón de 25 km/h durante 4.0 minutos, después a 50 km/h durante 8.0 minutos, y por último a 20 km/h durante 2.0 minutos. Encuentre *a*) la distancia total cubierta en km, y *b*) la rapidez promedio para el viaje completo en m/s. **Resp.** *a*) 9.0 km; *b*) 10.7 m/s u 11 m/s.

1.22 [I] Desde el centro de una ciudad, un vehículo viaja hacia el este durante 80.0 km y luego da vuelta al sur durante otros 192 km, hasta que se le acaba la gasolina. Determinar el desplazamiento del automóvil detenido desde el centro de la ciudad. **Resp.** 208 km — 67.4° SURESTE.

1.23 [II] Una tortuga está en el origen de una cuadrícula dibujada en una hoja de papel grande. Cada cuadro mide 1.0 cm por 1.0 cm. La tortuga camina un rato y termina en el punto (24, 10), es decir, 24 cuadros a lo largo del eje x y 10 cuadros a lo largo del eje y. Determine el desplazamiento de la tortuga desde el punto al origen. **Resp.** 26 cm — 23° ARRIBA DEL EJE x.

1.24 [II] Un insecto comienza en el punto A, repta 8.0 cm al este, luego 5.0 cm al sur, 3.0 cm al oeste y 4.0 cm al norte hasta el punto B. *a*) ¿Qué tan al norte y al este está B de A? *b*) Encuentre el desplazamiento de A a B tanto de manera gráfica como algebraica. **Resp.** *a*) 1.0 cm —SUR; 5 cm —ESTE; *b*) 5.10 cm —11.3° SURESTE.

1.25 [II] Un corredor da 1.5 vueltas por una pista circular en un tiempo de 50 s. El diámetro de la pista es de 40 m y su circunferencia es de 126 m. Encuentre *a*) la rapidez promedio del corredor y *b*) la magnitud de la velocidad promedio del corredor. Hay que tener cuidado aquí, la rapidez promedio depende de la distancia total recorrida, mientras que la velocidad promedio depende del desplazamiento al final del viaje específico. **Resp.** *a*) 3.8 m/s; *b*) 0.80 m/s.

1.26 [II] Durante una carrera en una pista ovalada, un automóvil viaja a una rapidez promedio de 200 km/h. *a*) ¿Qué distancia viajó en 45.0 min? *b*) Determine su velocidad promedio al final de su tercera vuelta. **Resp.** *a*) 150 km; *b*) cero.

1.27 [II] Los datos siguientes describen la posición de un objeto a lo largo del eje x como una función del tiempo. Grafique los datos y encuentre la velocidad instantánea del objeto en *a*) $t = 5.0$ s, *b*) 16 s y *c*) 23 s.
Resp. *a*) 0.018 m/s en la dirección x positiva; *b*) 0 m/s; *c*) 0.013 m/s en la dirección x negativa.

t(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
x(cm)	0	4.0	7.8	11.3	14.3	16.8	18.6	19.7	20.0	19.5	18.2	16.2	13.5	10.3	6.7

1.28 [II] Para el objeto cuyo movimiento se describe en el problema 1.27, encuentre su velocidad en los momentos siguientes: *a*) 3.0 s, *b*) 10 s y *c*) 24 s. **Resp.** *a*) 1.9 cm/s en la dirección x positiva; *b*) 1.1 cm/s en la dirección x positiva; *c*) 1.5 cm/s en la dirección x negativa.

1.29 [I] Encuentre las componentes escalares de x y y de los desplazamientos siguientes en el plano xy: *a*) 300 cm a 127° y *b*) 500 cm a 220°. **Resp.** *a*) −181 cm, 240 cm; *b*) −383 cm, −321 cm.

1.30 [II] Comenzando en el origen de las coordenadas, se hacen los desplazamientos siguientes en el plano xy (es decir, los desplazamientos son coplanares): 60 mm en la dirección $+y$, 30 mm en la dirección $-x$, 40 mm a 150° y 50 mm a 240°. Encuentre el desplazamiento resultante de manera gráfica y algebraica. **Resp.** 97 mm en 158°.

1.31 [II] Calcule algebraicamente la resultante de los siguientes desplazamientos coplanares: 20.0 m a 30.0°, 40.0 m a 120.0°, 25 m a 180.0°, 42.0 m a 270.0° y 12.0 m a 315.0°. Confirme la respuesta con una solución gráfica. **Resp.** 20.1 m a 197°.

1.32 [II] ¿Qué desplazamiento en 70° tiene una componente x de 450 m? ¿Cuál es su componente y? **Resp.** 1.3 km, 1.2 km.

1.33 [II] ¿Qué desplazamiento debe sumarse a un desplazamiento de 50 cm en la dirección $+x$ para obtener un desplazamiento resultante de 85 cm a 25°? **Resp.** 45 cm a 53°.

1.34 [I] Consulte la figura 1-19. En términos de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, exprese los vectores *a*) $\vec{\mathbf{P}}$, *b*) $\vec{\mathbf{R}}$, *c*) $\vec{\mathbf{S}}$ y *d*) $\vec{\mathbf{Q}}$.
Resp. *a*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$, *b*) $\vec{\mathbf{B}}$, *c*) $-\vec{\mathbf{A}}$, *d*) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$.

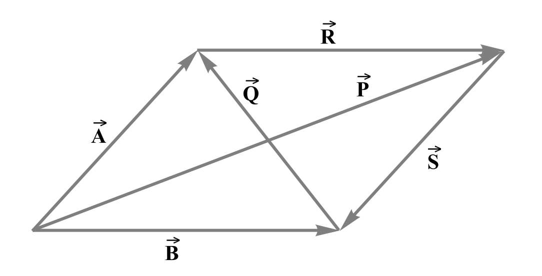


Figura 1-19

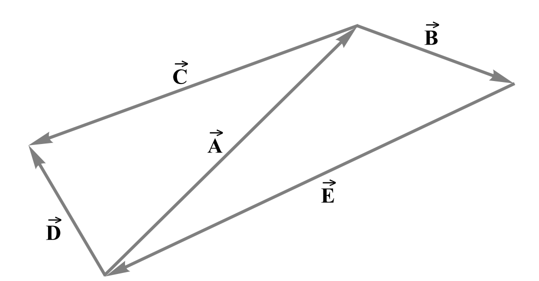


Figura 1-20

1.35 [I] Consulte la figura 1-20. En términos de los vectores $\vec{\mathbf{A}}$ y $\vec{\mathbf{B}}$, exprese los vectores *a*) $\vec{\mathbf{E}}$, *b*) $\vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{C}}$ y *c*) $\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{D}} - \vec{\mathbf{C}}$.
Resp. *a*) $-\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ o $-(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}})$; *b*) $\vec{\mathbf{A}}$; *c*) $-\vec{\mathbf{B}}$.

1.36 [II] Encuentre *a*) $\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}$, *b*) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$, y *c*) $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{C}}$ si $\vec{\mathbf{A}} = 7\hat{\mathbf{i}} - 6\hat{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{B}} = -3\hat{\mathbf{i}} + 12\hat{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{C}} = 4\hat{\mathbf{i}} - 4\hat{\mathbf{j}}$.
Resp. *a*) $8\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$; *b*) $10\hat{\mathbf{i}} - 18\hat{\mathbf{j}}$; *c*) $3\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}}$.

1.37 [II] Encuentre la magnitud y el ángulo de $\vec{\mathbf{R}}$ si $\vec{\mathbf{R}} = 7.0\hat{\mathbf{i}} - 12\hat{\mathbf{j}}$. **Resp.** 14 a $-60°$.

1.38 [II] Determine el vector desplazamiento que debe sumarse al desplazamiento $(25\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}})$ m para obtener un desplazamiento de 7.0 m que apunta en la dirección $+x$. **Resp.** $(-18\hat{\mathbf{i}} + 16\hat{\mathbf{j}})$ m.

1.39 [II] Un vector $(15\hat{\mathbf{i}} - 16\hat{\mathbf{j}} + 27\hat{\mathbf{k}})$ se suma a un vector $(23\hat{\mathbf{j}} - 40\hat{\mathbf{k}})$. ¿Cuál es la magnitud de la resultante?
Resp. 21.

1.40 [III] Un camión avanza hacia el norte con una rapidez de 70 km/h. El tubo de escape encima de la cabina del camión deja un rastro de humo que hace un ángulo de 20° sureste detrás del camión. Si el viento sopla directamente hacia el este, ¿cuál es la rapidez del viento en ese lugar? **Resp.** 25 km/h.

1.41 [III] Una embarcación viaja justo hacia el este a 10 km/h. ¿Cuál debe ser la rapidez de una segunda embarcación que se dirige 30° al noreste si siempre está directamente al norte de la primera embarcación? **Resp.** 20 km/h.

1.42 [III] Un bote, impulsado para viajar con una rapidez de 0.50 m/s en aguas tranquilas, atraviesa un río de 60 m de ancho. El flujo del río tiene una rapidez de 0.30 m/s. *a*) ¿A cuál ángulo, respecto a la dirección directamente transversal, debe apuntar el bote? *b*) ¿Cuánto tarda el bote en atravesar el río? **Resp.** *a*) 37° contra la corriente; *b*) 1.5×10^2 s.

1.43 [III] Un borracho imprudente juega con un arma en un avión que va directamente hacia el este a 500 km/h. El borracho dispara el arma directamente hacia el techo del avión. La bala sale del arma con una rapidez de 1 000 km/h. De acuerdo con alguien parado en la Tierra, ¿qué ángulo forma la bala con la vertical? **Resp.** 26.6°.

MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE ACELERADO

2

LA ACELERACIÓN mide la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Por consiguiente,

$$\textit{Aceleración promedio} = \frac{\text{cambio en el vector velocidad}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_{prom} = \frac{\vec{\mathbf{x}}_f - \vec{\mathbf{x}}_i}{t}$$

donde $\vec{\mathbf{x}}_i$ es la velocidad inicial, $\vec{\mathbf{x}}_f$ es la velocidad final y t es el tiempo transcurrido durante el cambio. Las unidades de aceleración son unidades de velocidad divididas entre unidades de tiempo. Algunos ejemplos son (m/s)/s (o bien m/s^2) y (km/h)/s (o bien km/h · s). Hay que notar que la aceleración es una cantidad vectorial y tiene la dirección del cambio de velocidad, $\vec{\mathbf{x}}_f - \vec{\mathbf{x}}_i$. No obstante, es común hablar de la magnitud de la aceleración diciendo solamente aceleración, siempre que no exista ambigüedad.

Cuando sólo interesan las aceleraciones tangenciales a la trayectoria recorrida, se conoce la dirección de la aceleración y se puede escribir la ecuación definitoria en forma escalar como:

$$a_{prom} = \frac{v_f - v_i}{t}$$

EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO es una situación importante. En este caso, el *vector aceleración es constante* y su línea de acción está a lo largo del vector desplazamiento, así que las direcciones de los vectores $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{a}}$ se pueden indicar con signos positivos o negativos. Si el desplazamiento se representa con s (positivo si va en sentido positivo, y negativo si el sentido es negativo), el movimiento puede describirse con las *cinco ecuaciones de movimiento* para el movimiento uniformemente acelerado:

$$s = v_{prom} t$$

$$v_{prom} = \frac{v_f + v_i}{2}$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

$$s = v_i t + \tfrac{1}{2} a t^2$$

Con frecuencia s se reemplaza con y o con x y algunas veces v_f y v_i se escriben como v y v_0, respectivamente.

LA DIRECCIÓN ES IMPORTANTE y debe escogerse el sentido positivo cuando se analiza un movimiento a lo largo de una línea recta. A cualquier dirección se le puede asignar el sentido positivo. Si un desplazamiento, velocidad o aceleración se plantea en sentido opuesto, éste debe tomarse como negativo.

LA INTERPRETACIÓN GRÁFICA del movimiento rectilíneo (por ejemplo, en la dirección del eje de las x) es como sigue:

- Una gráfica de *distancia contra tiempo* siempre es positiva (v.g., la gráfica está arriba del eje del tiempo). Tal curva nunca disminuye (es decir, nunca tiene una pendiente o una rapidez negativas). Sólo piense en el odómetro y en el medidor de rapidez de un automóvil.

- Debido a que el desplazamiento es una cantidad vectorial sólo se puede graficar contra el tiempo si se limita el movimiento a una línea recta y luego se emplean los signos más y menos para especificar una dirección. De acuerdo con esto, es una práctica común graficar el *desplazamiento a lo largo de una línea recta contra el tiempo* mediante ese esquema. Una gráfica que representa un movimiento a lo largo de, por ejemplo, el eje x, puede ser o positiva (trazada encima del eje del tiempo) cuando el objeto está a la derecha del origen ($x = 0$), o negativa (dibujada bajo el eje del tiempo) cuando el objeto está a la izquierda del origen (consulte la figura 2-1). La gráfica puede ser positiva y hacerse más positiva, o negativa y hacerse menos negativa. En ambos casos, la curva tendría una pendiente positiva y el objeto una velocidad positiva (se movería en la dirección x positiva). Además, la gráfica puede ser positiva y hacerse menos positiva, o negativa y hacerse más negativa. En estos dos casos, la curva tendría una pendiente negativa, y el objeto una velocidad negativa (se movería en la dirección x negativa).
- La *velocidad instantánea* de un objeto en un tiempo específico es la pendiente de la gráfica desplazamiento contra tiempo. Puede ser positiva, negativa o cero.
- La *aceleración instantánea* de un objeto en un tiempo específico es la pendiente de la gráfica velocidad contra tiempo en ese momento.
- Para un movimiento con velocidad constante, la gráfica de x contra t es una línea recta. Para un movimiento con aceleración constante, la gráfica de υ contra t es una línea recta.

ACELERACIÓN DEBIDA A LA GRAVEDAD (g)**:** La aceleración de un cuerpo que se mueve sólo por la atracción gravitacional es g, la aceleración gravitacional (o de caída libre), la cual tiene dirección vertical hacia abajo. En la superficie de la Tierra tiene un valor de $g = 9.81$ m/s² (= 32.2 pies/s²); este valor sufre ligeras variaciones de un lugar a otro. Sobre la superficie de la Luna, el valor de la aceleración de caída libre es 1.6 m/s².

COMPONENTES DE LA VELOCIDAD: Supóngase que un objeto se mueve con una velocidad $\vec{\mathbf{x}}$ que forma algún ángulo θ hacia arriba del eje x, como sería inicialmente el caso de una pelota lanzada al aire. Entonces esa velocidad tiene las componentes vectoriales x y y (véase la figura 1-7) de $\vec{\mathbf{x}}_x$ y $\vec{\mathbf{x}}_y$. Las componentes escalares correspondientes de la velocidad son

$$\upsilon_x = \upsilon \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \upsilon_y = \upsilon \operatorname{sen}\theta$$

y puede resultar que éstos sean números positivos o negativos, dependiendo de θ. Como regla, si $\vec{\mathbf{x}}$ está en el primer cuadrante, $\upsilon_x > 0$ y $\upsilon_y > 0$; si $\vec{\mathbf{x}}$ está en el segundo cuadrante, $\upsilon_x < 0$ y $\upsilon_y > 0$; si $\vec{\mathbf{x}}$ está en el tercer cuadrante, $\upsilon_x < 0$ y $\upsilon_y < 0$; por último, si $\vec{\mathbf{x}}$ está en el cuarto cuadrante, $\upsilon_x > 0$ y $\upsilon_y < 0$. Debido a que estas cantidades tienen signos y, por tanto, direcciones implicadas a lo largo de ejes conocidos, es común referirse a ellas como velocidades. El lector encontrará ese uso en muchos textos, pero no sin desventajas pedagógicas. En lugar de ello, se evitará aplicar el término "velocidad" a todo, excepto a una cantidad vectorial (escrita en negritas con una flecha arriba) cuya dirección se expresa de manera explícita. De este modo, para un objeto que se mueve con una *velocidad* $\vec{\mathbf{x}} = 100$ m/s —hacia el OESTE, el *valor escalar de la velocidad a lo largo del eje x* es $\upsilon = -100$ m/s, y la *rapidez* (o *magnitud de la velocidad*, siempre positiva) es $\upsilon = 100$ m/s.

LOS PROBLEMAS DE PROYECTILES pueden resolverse fácilmente si se desprecia el rozamiento (fricción) con el aire. Para simplificar el problema se puede considerar el movimiento del proyectil como dos movimientos independientes: uno horizontal con $a = 0$ y $\upsilon_f = \upsilon_i = \upsilon_{prom}$ (es decir, con velocidad constante), y un movimiento vertical con $a = g = 9.81$ m/s² dirigido hacia abajo.

PROBLEMAS RESUELTOS

2.1 [I] Un robot llamado Fred se mueve inicialmente a 2.20 m/s por un pasillo en una terminal espacial. Después acelera a 4.80 m/s en un tiempo de 0.20 s. Determine el tamaño o la *magnitud* de su aceleración media a lo largo de la trayectoria recorrida.

La ecuación escalar definitoria es $a_{prom} = (\upsilon_f - \upsilon_i)/t$. Todo está en las unidades adecuadas del SI, por lo que sólo se necesita realizar el cálculo:

$$a_{prom} = \frac{4.80 \text{ m/s} - 2.20 \text{ m/s}}{0.20 \text{ s}} = 13 \text{ m/s}^2$$

Observe que la respuesta tiene dos cifras significativas porque el tiempo sólo tiene dos cifras significativas.

2.2 [I] Un automóvil viaja a 20.0 m/s cuando el conductor pisa los frenos y se detiene en una línea recta en 4.2 s. ¿Cuál es la magnitud de su aceleración media?

La ecuación escalar definitoria es $a_{prom} = (v_f - v_i)/t$. Observe que la rapidez final es cero. Aquí la rapidez inicial es más grande que la rapidez final, de modo que se puede esperar que la aceleración sea negativa:

$$a_{prom} = \frac{0.0 \text{ m/s} - 2.20 \text{ m/s}}{4.2 \text{ s}} = -4.76 \text{ m/s}^2$$

Debido a que el tiempo se proporciona con sólo dos cifras significativas, la respuesta es -4.8 m/s^2.

2.3 [II] Un objeto parte del reposo con una aceleración constante de 8.00 m/s^2 a lo largo de una línea recta. Encuentre: *a*) la rapidez después de 5.00 s, *b*) la rapidez media para el intervalo de 5.00 s y *c*) la distancia total recorrida en los 5.00 s.

Note que interesa sólo el movimiento para los primeros 5.00 s. Considere la dirección del movimiento en dirección del eje x positivo (esto es, $s = x$). Se sabe que $v_i = 0$, $t = 5.00$ s y $a = 8.00$ m/s^2. Ya que el movimiento es uniformemente acelerado pueden aplicarse las cinco ecuaciones de movimiento.

a) $$v_{fx} = v_{ix} + at = 0 + (8.00 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s}) = 40.0 \text{ m/s}$$

b) $$a_{prom} = \frac{v_{ix} + v_{fx}}{2} = \frac{0 + 40.0}{2} \text{ m/s} = 20.0 \text{ m/s}$$

c) $$x = v_{ix}t + \tfrac{1}{2}at^2 = 0 + \tfrac{1}{2}(8.00 \text{ m/s}^2)(5.00 \text{ s})^2 = 100 \text{ m} \quad \text{o} \quad x = v_{prom}t = (20.0 \text{ m/s})(5.00 \text{ s}) = 100 \text{ m}$$

2.4 [II] La rapidez de un camión se incrementa uniformemente desde 15 km/h hasta 60 km/h en 20 s. Determine: *a*) la rapidez promedio, *b*) la aceleración y *c*) la distancia recorrida, todo en unidades de metros y segundos.

Para los primeros 20 s de viaje, se toma la dirección del movimiento en la dirección $+x$ y se tiene:

$$v_{ix} = \left(15 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(1\,000 \frac{\text{m}}{\text{km}}\right)\left(\frac{1}{3\,600} \frac{\text{h}}{\text{s}}\right) = 4.17 \text{ m/s}$$

$$v_{fx} = 60 \text{ km/h} = 16.7 \text{ m/s}$$

a) $$v_{prom} = \tfrac{1}{2}(v_{ix} + v_{fx}) = \tfrac{1}{2}(4.17 + 16.7) \text{ m/s} = 10 \text{ m/s}$$

b) $$a = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{t} = \frac{(16.7 - 4.17) \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = 0.63 \text{ m/s}^2$$

c) $$x = v_{prom}t = (10.4 \text{ m/s})(20 \text{ s}) = 208 \text{ m} = 0.21 \text{ km}$$

2.5 [II] El movimiento de un objeto a lo largo del eje x está graficado en la figura 2-1. Describa su movimiento.

La velocidad de un objeto en cualquier instante es igual a la pendiente de la gráfica desplazamiento-tiempo en el punto correspondiente a ese instante. Dado que la pendiente es cero desde exactamente $t = 0$ s hasta $t = 2.0$ s, el objeto permanece en reposo durante ese intervalo de tiempo. Cuando $t = 2.0$ s, el objeto inicia un movimiento en dirección del eje $+x$ con velocidad constante (la pendiente es positiva y constante). Para el intervalo de $t = 2.0$ s hasta $t = 4.0$ s,

$$v_{prom} = \text{pendiente} = \frac{\text{elevación}}{\text{tiempo}} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{3.0 \text{ m} - 0 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = \frac{3.0 \text{ m}}{2.0 \text{ s}} = 1.5 \text{ m/s}$$

Entonces, la velocidad promedio es $\vec{\mathbf{x}}_{prom} = 1.5$ m/s — DIRECCIÓN x POSITIVA.

Durante el intervalo $t = 4.0$ s hasta $t = 6.0$ s, el objeto está en reposo, la pendiente de la gráfica es cero y x no cambia en ese intervalo de tiempo.

De $t = 6.0$ s hasta $t = 10$ s y más allá, el objeto se mueve en dirección del eje $+x$, por lo que la pendiente y la velocidad son negativas. Se tiene

$$v_{prom} = \text{pendiente} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{-2.0 \text{ m} - 3.0 \text{ m}}{10.0 \text{ s} - 6.0 \text{ s}} = \frac{-5.0 \text{ m}}{4.0 \text{ s}} = -1.3 \text{ m/s}$$

Entonces, la velocidad promedio es $\vec{\mathbf{x}}_{prom} = 1.3$ m/s — DIRECCIÓN x NEGATIVA.

2.6 [II] El movimiento vertical de un objeto está graficado en la figura 2-2. Describa su movimiento cualitativamente y calcule la velocidad instantánea en los puntos A, B y C.

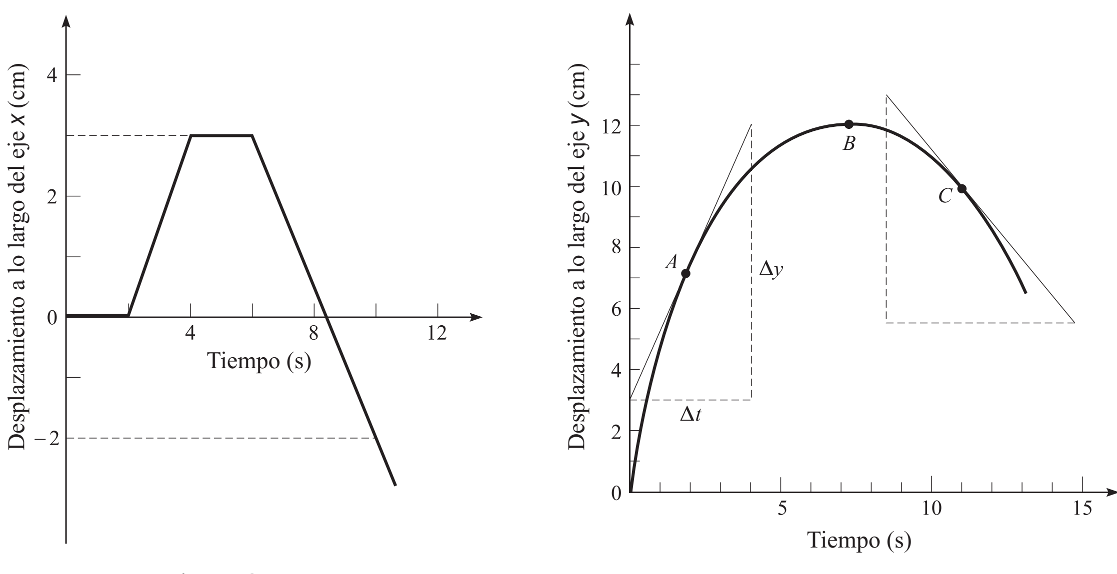


Figura 2-1 **Figura 2-2**

Al recordar que la velocidad instantánea está dada por la pendiente de la curva, se observa que el objeto se mueve más rápido en $t = 0$. Al elevarse, ésta decrece y finalmente se detiene en el punto B. (La pendiente ahí es cero.) Entonces comienza a caer hacia abajo incrementando su rapidez.

En el punto A, se tiene

$$v_A = \text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{12.0 \text{ m} - 3.0 \text{ m}}{4.0 \text{ s} - 0 \text{ s}} = \frac{9.0 \text{ m}}{4.0 \text{ s}} = 2.3 \text{ m/s}$$

La velocidad en el punto A es positiva, de modo que está en dirección del eje $+y$: $\vec{\mathbf{v}}_A = 2.3$ m/s — HACIA ARRIBA. Para los puntos B y C,

$$v_B = \text{pendiente} = 0 \text{ m/s}$$

$$v_C = \text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{5.5 \text{ m} - 13.0 \text{ m}}{15.0 \text{ s} - 8.5 \text{ s}} = \frac{-7.5 \text{ m}}{6.5 \text{ s}} = -1.2 \text{ m/s}$$

Es negativa, ya que la velocidad en C está en dirección del eje $-y$: $\vec{\mathbf{v}}_C = 1.2$ m/s — HACIA ABAJO. Recuerde que la velocidad es una cantidad vectorial y la dirección debe especificarse de manera explícita.

2.7 [II] Se deja caer una pelota, inicialmente en reposo, desde una altura de 50 m sobre el nivel del suelo. *a*) ¿Cuál será la rapidez de la pelota justo en el momento anterior al choque contra el suelo? *b*) ¿Cuánto tiempo requiere para llegar al suelo?

Si se ignora la fricción con el aire, la pelota se acelera uniformemente hasta llegar al suelo. Su aceleración se dirige hacia abajo y tiene un valor de 9.81 m/s². Tomando como positiva la dirección de la *caída*, para el recorrido se tiene:

$$y = 50.0 \text{ m} \qquad a = 9.81 \text{ m/s}^2 \qquad v_i = 0$$

a) $$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2ay = 0 + 2(9.81\ \text{m/s}^2)(50.0\ \text{m}) = 981\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

y por tanto, $v_f = 31.3$ m/s.

b) De la definición $a = (v_{fy} - v_{iy})/t$,

$$t = \frac{v_{fy} - v_{iy}}{a} = \frac{(31.3 - 0)\ \text{m/s}}{9.81\ \text{m/s}^2} = 3.19\ \text{s}$$

(Se podría haber considerado la dirección positiva *hacia arriba*. ¿Tendrían algún cambio los resultados?)

2.8 [II] Un esquiador parte del reposo y se desliza 9.0 m hacia abajo, por una pendiente, en 3.0 s. ¿Cuánto tiempo, después del inicio, el esquiador habrá adquirido una velocidad de 24 m/s? Considere la aceleración constante y la trayectoria recta.

Primero, es necesario determinar la aceleración del esquiador a partir de los datos relativos a los 3.0 s de viaje. Se considera la dirección del movimiento $+x$, para esto, se tiene $t = 3.0$ s, $v_{ix} = 0$ y $x = 9.0$ m. Entonces, $x = v_{ix}t + \frac{1}{2}at^2$ da:

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{18\ \text{m}}{(3.0\ \text{s})^2} = 2.0\ \text{m/s}^2$$

Ahora bien, este valor de *a* puede emplearse para el recorrido mayor, desde el punto de partida hasta el lugar donde $v_{fx} = 24$ m/s. Para este recorrido, $v_{ix} = 0$, $v_{fx} = 24$ m/s, $a = 2.0$ m/s^2. Entonces, de $v_f = v_i + at$, se obtiene

$$t = \frac{v_{fx} - v_{ix}}{a} = \frac{24\ \text{m/s}}{2.0\ \text{m/s}^2} = 12\ \text{s}$$

2.9 [II] Un autobús que se mueve en línea recta con rapidez de 20 m/s comienza a detenerse a razón de 3.0 m/s cada segundo. Encuentre cuánto se desplaza antes de detenerse.

Se considera que la dirección del movimiento es en la dirección del eje $+x$. Para el trayecto considerado, se tiene $v_i = 20$ m/s, $v_f = 0$ m/s, $a = -3.0$ m/s^2. Note que el autobús no incrementó su rapidez en la dirección del movimiento. En lugar de eso, disminuyó su rapidez en la misma dirección, por lo que su aceleración es negativa (una desaceleración). Utilice

$$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2ax$$

para calcular $$x = \frac{-(20\ \text{m/s})^2}{2(-3.0\ \text{m/s}^2)} = 67\ \text{m}$$

2.10 [II] Un automóvil que se mueve en un camino recto a 30 m/s disminuye su rapidez uniformemente hasta un valor de l0 m/s en un tiempo de 5.0 s. Determine: *a*) la aceleración del automóvil y *b*) la distancia que recorre en el tercer segundo.

Sea la dirección del movimiento en dirección del eje $+x$.

a) Para el intervalo de 5.0 s, se tiene $t = 5.0$ s, $v_{ix} = 30$ m/s, $v_f = 10$ m/s. Usando $v_{fx} = v_{ix} + at$ se encuentra que

$$a = \frac{(10 - 30)\ \text{m/s}}{5.0\ \text{s}} = -4.0\ \text{m/s}^2$$

b) $$x = (\text{distancia recorrida en 3.0 s}) - (\text{distancia recorrida en 2.0 s})$$
$$x = (v_{ix}t_3 + \tfrac{1}{2}at_3^2) - (v_{ix}t_2 + \tfrac{1}{2}at_2^2)$$
$$x = v_{ix}(t_3 - t_2) + \tfrac{1}{2}a(t_3^2 - t_2^2)$$

Con $v_{ix} = 30$ m/s, $a = -4.0$ m/s^2, $t_2 = 2.0$ s, $t_3 = 3.0$, se obtiene

$$x = (30\ \text{m/s})(1.0\ \text{s}) - (2.0\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{s}^2) = 20\ \text{m}$$

2.11 [II] La rapidez de un tren se reduce uniformemente desde 15 m/s hasta 7.0 m/s al recorrer una distancia de 90 m. *a*) Calcule la aceleración. *b*) ¿Qué distancia recorrerá el tren antes de alcanzar el reposo, si se considera que la aceleración permanece constante?

Suponga la dirección del movimiento en la dirección +*x*.

a) Se tiene que $v_{ix} = 15$ m/s, $v_{fx} = 7.0$ m/s, $x = 90$ m. Entonces $v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2ax$ da

$$a = -0.98 \text{ m/s}^2$$

b) Ahora, las nuevas condiciones son $v_{ix} = 7.0$ m/s, $v_f = 0$, $a = -0.98$ m/s^2. Por consiguiente

$$v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2ax$$

nos da

$$x = \frac{0 - (7.0 \text{ m/s})^2}{-1.96 \text{ m/s}^2} = 25 \text{ m}$$

2.12 [II] Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba y se eleva a una altura de 20 m. ¿Con qué rapidez se lanzó?

Considere el *ascenso* con dirección positiva *y*. La velocidad de la piedra es cero en el extremo superior de su trayectoria. Entonces, $v_{fy} = 0$, $y = 20$ m, $a = -9.81$ m/s^2. (El signo negativo obedece a que la aceleración debida a la gravedad es siempre hacia abajo y se consideró que el *ascenso* es positivo.) Utilice $v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2ay$ para encontrar

$$v_{iy} = \sqrt{-2(-9.81 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m})} = 20 \text{ m/s}$$

2.13 [II] Una piedra se lanza hacia arriba con una rapidez de 20 m/s. En su camino hacia abajo es atrapada en un punto situado a 5.0 m por encima del lugar desde donde se lanzó. *a*) ¿Qué rapidez tenía cuando fue atrapada? *b*) ¿Cuánto tiempo tomó el recorrido?

En la figura 2-3 se muestra la situación. Suponga que el *ascenso* es positivo. Entonces, para el recorrido que dura desde el instante en que se lanza hasta el instante en que se atrapa, se tiene $v_{iy} = 20$ m/s, $y = +5.0$ m (dado que el desplazamiento es hacia arriba), $a = -9.81$ m/s^2.

a) Utilice $v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2ay$ para encontrar

$$v_{fy}^2 = (20 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ m}) = 302 \text{ m}^2/\text{s}^2$$
$$v_{fy} = \pm\sqrt{302 \text{ m}^2/\text{s}^2} = -17 \text{ m/s}$$

Se escoge el signo negativo porque la piedra va descendiendo, en el sentido negativo, en el instante final.

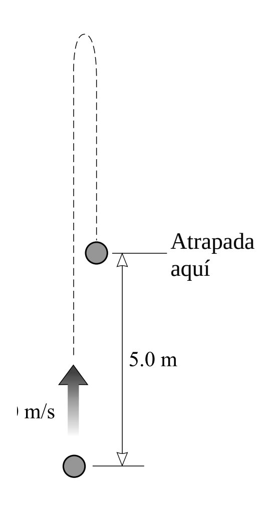


Figura 2-3

b) Se usa $a = (v_{fy} - v_{iy})/t$ para encontrar

$$t = \frac{(-17.4 - 20)\ \text{m/s}}{-9.81\ \text{m/s}^2} = 3.8\ \text{s}$$

Advierta la necesidad de usar el signo negativo para v_{fy}.

2.14 [II] Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba en la Luna y regresa a su punto de partida en 4.0 s. La aceleración debida a la gravedad en ese lugar es de 1.60 m/s². Encuentre la rapidez inicial.

Considere el *ascenso* como positivo. Para el recorrido de principio a fin, $y = 0$ (el punto de partida y el punto final son los mismos), $a = -1.60\ \text{m/s}^2$, $t = 4.0$ s. Utilice $y = v_{iy}t + \frac{1}{2}at^2$ para calcular

$$0 = v_{iy}(4.0\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-1.60\ \text{m/s}^2)(4.0\ \text{s})^2$$

de donde $v_{iy} = 3.2$ m/s.

2.15 [III] Se lanza una pelota de béisbol verticalmente hacia arriba en la superficie lunar con una rapidez inicial de 35 m/s. Calcule: *a*) la máxima altura que alcanza la pelota, *b*) el tiempo que tarda en alcanzar esa altura, *c*) su velocidad 30 s después de lanzarse y *d*) cuándo la pelota está a 100 m de altura.

Considere el *ascenso* como positivo. En el punto más alto, la velocidad de la pelota es cero.

a) Ya que $g = 1.60$ m/s² en la Luna, y dado que $v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2ay$, se tiene

$$0 = (35\ \text{m/s})^2 + 2(-1.60\ \text{m/s}^2)y \qquad \text{o} \qquad y = 0.38\ \text{km}$$

b) De $v_{fy} = v_{iy} + at$ se tiene

$$0 = 35\ \text{m/s} + (-1.60\ \text{m/s}^2)t \qquad \text{o} \qquad t = 22\ \text{s}$$

c) De $v_{fy} = v_{iy} + at$ se tiene

$$v_{fy} = 35\ \text{m/s} + (-1.60\ \text{m/s}^2)(30\ \text{s}) \qquad \text{o} \qquad v_{fy} = -13\ \text{m/s}$$

El signo negativo se debe a que se consideró el *ascenso* como positivo y la velocidad v_f se dirige hacia abajo. La pelota desciende en $t = 30$ s.

d) Ya que $y = v_{iy}t + \frac{1}{2}at^2$ se tiene

$$100\ \text{m} = (35\ \text{m/s})t + \tfrac{1}{2}(-1.60\ \text{m/s}^2)t^2 \qquad \text{o} \qquad 0.80t^2 - 35t + 100 = 0$$

Por el uso de la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

se encuentra que $t = 3.1$ s y 41 s. En $t = 3.1$ s la pelota está a 100 m de altura en el ascenso y en $t = 41$ s tiene la misma altura pero en el descenso.

2.16 [III] Desde un globo que está a 300 m sobre el suelo y se eleva a 13 m/s, se deja caer una bolsa de lastre. Para la bolsa, encuentre: *a*) la altura máxima que alcanza, *b*) su posición y velocidad después de 5.0 s de haberse desprendido y *c*) el tiempo que tarda en bajar y golpear el suelo.

La velocidad inicial de la bolsa cuando se suelta es la misma que la del globo, 13 m/s en ascenso. El *ascenso* se considera como positivo y $y = 0$ en el punto del desprendimiento.

a) En el punto más alto, $v_f = 0$. De $v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2ay$,

$$0 = (13\ \text{m/s})^2 + 2(-9.81\ \text{m/s}^2)y \qquad \text{o} \qquad y = 8.6\ \text{m}$$

La máxima altura es 300 + 8.6 m = 308.6 m o 0.31 km.

b) El punto final se toma en la posición para $t = 5.0$ s. Entonces, de la ecuación $y = v_{iy}t + \frac{1}{2}at^2$,

$$y = (13\ \text{m/s})(5.0\ \text{s}) + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{s})^2 = -57.5\ \text{m o } -58\ \text{m}$$

Así que la altura es de 300 − 58 = 242 m. También de la ecuación $v_{fy} = v_{iy} + at$,

$$v_{fy} = 13 \text{ m/s} + (-9.81 \text{ m/s}^2)(5.0 \text{ s}) = -36 \text{ m/s}$$

Es decir, la bolsa de lastre en su trayectoria de caída HACIA ABAJO tiene una velocidad de 36 m/s.

c) En el instante anterior al choque contra el suelo, el desplazamiento de la bolsa es de −300 m. Entonces

$$y = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad \text{da} \quad -300 \text{ m} = (13 \text{ m/s})t + \tfrac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2)t^2$$

o $4.90\,t^2 - 13t - 300 = 0$. De la fórmula cuadrática se determina que $t = 9.3$ s y −6.6 s. Sólo el valor positivo del tiempo tiene significado físico, así que la respuesta es 9.3 s.

Se podría haber evitado la fórmula cuadrática al determinar primero v_f:

$$v_{fy}^2 = v_{iy}^2 + 2as \quad \text{da} \quad v_{fy}^2 = (13 \text{ m/s})^2 + 2(-9.81 \text{ m/s}^2)(-300 \text{ m})$$

de donde $v_{fy} = \pm 77.8$ m/s. Entonces, con el valor negativo de v_{fy} (¿por qué?) en $v_{fy} = v_{iy} + at$, se obtiene $t = 9.3$ s, como anteriormente.

2.17 [II] Como se muestra en la figura 2-4, desde la cima de un risco de 80 m de alto se dispara un proyectil con una rapidez horizontal de 30 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo necesitará para chocar contra el suelo en la base del risco? *b*) ¿A qué distancia del pie del risco será el choque? *c*) ¿Con qué velocidad se estrellará?

a) Los movimientos horizontal y vertical son independientes uno del otro. Considere primero el movimiento vertical. Al considerar el *ascenso* como positivo y $y = 0$ en lo alto del risco, se tiene

$$y = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2$$

o bien

$$-80 \text{ m} = 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81 \text{ m/s}^2)t^2$$

de donde $t = 4.04$ s o 4.0 s. Note que la velocidad inicial tiene componente vertical con valor igual a cero, así que $v_i = 0$ para el movimiento vertical.

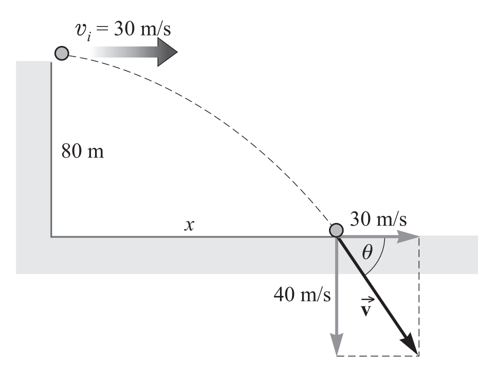


Figura 2-4

b) Ahora considere el movimiento horizontal. Para éste, $a = 0$ y así $v_x = v_{ix} = v_{fx} = 30$ m/s. Entonces, utilizando el valor de t encontrado en *a*), se tiene

$$x = v_x t = (30 \text{ m/s})(4.04 \text{ s}) = 121 \text{ m} \quad \text{o} \quad 0.12 \text{ km}$$

c) La velocidad final tiene una componente horizontal de 30 m/s, pero su componente vertical al tiempo $t = 4.04$ s está dada por $v_{fy} = v_{iy} + a_y t$, así que

$$v_{fy} = 0 + (-9.8 \text{ m/s}^2)(4.04 \text{ s}) = -40 \text{ m/s}$$

La resultante de esas dos componentes es $\vec{\mathbf{x}}$ en la figura 2-4; se tiene

$$v = \sqrt{(40\ \text{m/s})^2 + (30\ \text{m/s})^2} = 50\ \text{m/s}$$

El ángulo θ que se muestra en la figura está dado por $\tan\theta = 40/30$, de donde $\theta = 53°$. En consecuencia, $\vec{\mathbf{x}} = 50\ \text{m/s} — 53°$ DEBAJO DEL EJE x.

2.18 [I] Un piloto acróbata vuela a l5 m/s en dirección paralela al suelo plano que se encuentra l00 m debajo, como se muestra en la figura 2-5. ¿A qué distancia x del objetivo debe estar el avión para que, si deja caer un saco de harina, éste choque con el blanco?

Siguiendo el mismo procedimiento que en el problema 2.17, se utiliza $y = v_{iy}t + \frac{1}{2}a_y t^2$ para obtener

$$-100\ \text{m} = 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)t^2 \qquad \text{o} \qquad t = 4.52\ \text{s}$$

Ahora se aplica $v_x t = (15\ \text{m/s})(4.52\ \text{s}) = 67.8\ \text{m o } 68\ \text{m}$.

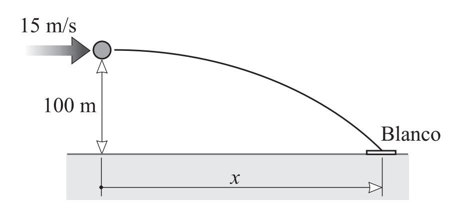


Figura 2-5

2.19 [II] Se lanza una pelota de béisbol con una velocidad inicial de 100 m/s con un ángulo de 30.0° en relación con la horizontal, como se muestra en la figura 2-6. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento alcanzará la pelota su nivel inicial?

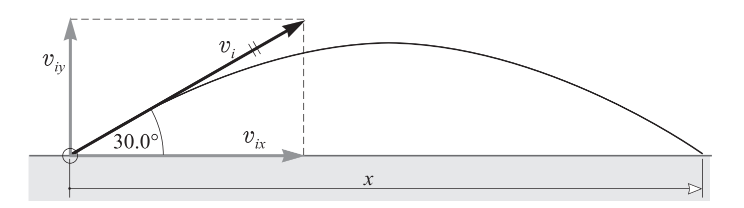


Figura 2-6

Conviene dividir el problema en dos partes; una horizontal y otra vertical, para lo cual

$$v_{ix} = v_i \cos 30.0° = 86.6\ \text{m/s} \qquad \text{y} \qquad v_{iy} = v_i\ \text{sen}\ 30.0° = 50.0\ \text{m/s}$$

donde el *ascenso* se toma como positivo.

Para la parte vertical del problema, $y = 0$, ya que la pelota regresa a su altura original; entonces

$$y = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 \qquad \text{o} \qquad 0 = (50.0\ \text{m/s}) + \tfrac{1}{2}(-9.81\ \text{m/s}^2)t$$

y $t = 10.2$ s.

Para la parte horizontal del problema, $v_{ix} = v_{fx} = v_x = 86.6$ m/s. De donde

$$x = v_x t = (86.6\ \text{m/s})(10.2\ \text{s}) = 884\ \text{m}$$

2.20 [III] Como se muestra en la figura 2-7, se lanza una pelota desde lo alto de un edificio hacia otro más alto, a 50 m de distancia. La velocidad inicial de la pelota es de 20 m/s, con una inclinación de 40° SOBRE LA HORIZONTAL. ¿A qué distancia, por encima o por debajo de su nivel inicial, golpeará la pelota sobre la pared opuesta?

Figura 2-7

Se tiene

$$v_{ix} = (20 \text{ m/s}) \cos 40^\circ = 15.3 \text{ m/s}$$
$$v_{iy} = (20 \text{ m/s}) \operatorname{sen} 40^\circ = 12.9 \text{ m/s}$$

Considere primero el movimiento horizontal. Para éste,

$$v_{ix} = v_{fx} = v_x = 15.3 \text{ m/s}$$

Entonces $x = v_x t$ produce

$$50 \text{ m} = (15.3 \text{ m/s})t \qquad \text{o} \qquad t = 3.27 \text{ s}$$

En el movimiento vertical, al tomar la *caída* como positiva, se tiene

$$y = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}a_y t^2 = (-12.9 \text{ m/s})(3.27 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(9.81 \text{ m/s}^2)(3.27 \text{ s})^2 = 10.3 \text{ m}$$

y a dos cifras significativas $y = 10$ m. Debido a que el valor de y es positivo y como se consideró positiva la *caída*, la pelota golpeará a una distancia de 10 m por debajo de su nivel inicial.

2.21 [III] *a*) Encuentre el alcance x de una pistola que dispara un proyectil con una velocidad de salida v y con un ángulo de elevación θ. *b*) Encuentre el ángulo de elevación θ de la pistola que dispara un proyectil con una velocidad de salida de 120 m/s y alcanza un blanco localizado en el mismo nivel, pero a una distancia de 1 300 m (véase la figura 2-8).

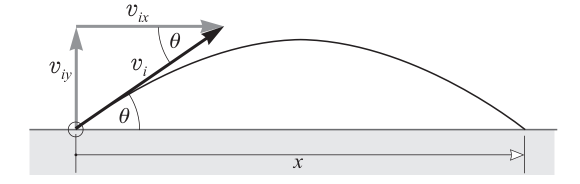


Figura 2-8

a) Sea t el tiempo que tarda el proyectil en dar en el blanco. Entonces, $x = v_{ix}t$ o $t = x/v_{ix}$. Considere por separado el movimiento en la dirección vertical y tome el *ascenso* como positivo. Cuando el proyectil golpea en el blanco,

$$\text{Desplazamiento vertical} = 0 = v_{iy}t + \tfrac{1}{2}(-g)t^2$$

Al despejar t de esta ecuación se obtiene $t = 2v_{iy}/g$. Pero $t = x/v_{ix}$, así que

$$\frac{x}{v_{ix}} = \frac{2v_{iy}}{g} \qquad \text{o} \qquad x = \frac{2v_{ix}v_{iy}}{g} = \frac{2(v_i \cos \theta)(v_i \operatorname{sen} \theta)}{g}$$

Para simplificar la ecuación anterior puede emplearse la expresión $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = \operatorname{sen} 2\theta$. Después de sustituir, se obtiene

$$x = \frac{v_i^2 \text{ sen } 2\theta}{g}$$

El alcance máximo corresponde a $\theta = 45°$, ya que sen 2θ tiene un valor máximo de 1 cuando $2\theta = 90°$, $\theta = 45°$.

b) De la ecuación del alcance encontrada en *a*), se tiene

$$\text{sen } 2\theta = \frac{gx}{v_i^2} = \frac{(9.81 \text{ m/s}^2)(1300 \text{ m})}{(120 \text{ m/s})^2} = 0.885$$

Por consiguiente, 2θ = arcsen 0.885 = 62°, así que θ = 31°.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

2.22 [I] Para el objeto cuyo movimiento se grafica en la figura 2-2, calcule su velocidad instantánea en los siguientes tiempos: *a*) 1.0 s, *b*) 4.0 s y *c*) 10 s. **Resp.** *a*) 3.3 m/s en la dirección *y* positiva; *b*) 1.0 m/s en la dirección *y* positiva; *c*) 0.83 m/s en la dirección *y* negativa.

2.23 [I] Un cuerpo con velocidad inicial de 8.0 m/s se mueve a lo largo de una línea recta con aceleración constante y recorre 640 m en 40 s. Para el intervalo de 40 s, encuentre: *a*) la velocidad promedio, *b*) la velocidad final y *c*) la aceleración. **Resp.** *a*) 16 m/s; *b*) 24 m/s; *c*) 0.40 m/s^2.

2.24 [I] Un autobús parte del reposo y se mueve con una aceleración constante de 5.0 m/s^2. Encuentre su rapidez y la distancia recorrida después de transcurridos 4.0 s. **Resp.** 20 m/s, 40 m.

2.25 [I] Una caja se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado con aceleración uniforme. Parte del reposo y alcanza una rapidez de 2.7 m/s en 3.0 s. Encuentre *a*) la aceleración y *b*) la distancia recorrida en los primeros 6.0 s. **Resp.** *a*) 0.90 m/s^2; *b*) 16 m.

2.26 [I] Un automóvil acelera uniformemente mientras pasa por dos puntos marcados que están separados 30 m. El tiempo que tarda en recorrer la distancia entre los dos puntos es de 4.0 s y la rapidez del automóvil en el primer punto marcado es de 5.0 m/s. Encuentre la aceleración del automóvil y su rapidez al llegar al segundo punto marcado. **Resp.** 1.3 m/s^2, 10 m/s.

2.27 [I] La velocidad de un automóvil aumenta uniformemente de 6.0 m/s a 20 m/s al recorrer una distancia de 70 m en línea recta. Calcule la aceleración y el tiempo transcurrido. **Resp.** 2.6 m/s^2, 5.4 s.

2.28 [I] Un aeroplano parte del reposo y acelera uniformemente en línea recta sobre el piso antes de elevarse. Recorre 600 m en 12 s. Encuentre: *a*) la aceleración, *b*) la rapidez al final de los 12 s y *c*) la distancia que recorre durante el duodécimo segundo. **Resp.** *a*) 8.3 m/s^2; *b*) 0.10 km/s; *c*) 96 m.

2.29 [I] Un tren que corre a lo largo de una línea recta a 30 m/s frena uniformemente hasta detenerse en 44 s. Determine la aceleración y la distancia recorrida hasta detenerse. **Resp.** -0.68 m/s^2, 0.66 km o 6.6×10^2 m.

2.30 [II] Un objeto que se mueve a 13 m/s frena uniformemente a razón de 2.0 m/s por cada segundo durante un tiempo de 6.0 s. Determine: *a*) su rapidez final, *b*) su rapidez promedio durante los 6.0 s y *c*) la distancia recorrida en los 6.0 s. **Resp.** *a*) 1.0 m/s; *b*) 7.0 m/s; *c*) 42 m.

2.31 [I] Un cuerpo cae libremente desde el reposo. Encuentre: *a*) su aceleración, *b*) la distancia que recorre en 3.0 s, *c*) su rapidez después de caer 70 m, *d*) el tiempo necesario para alcanzar una rapidez de 25 m/s y *e*) el tiempo que tarda en caer 300 m. **Resp.** *a*) 9.81 m/s^2; *b*) 44 m; *c*) 37 m/s; *d*) 2.6 s; *e*) 7.8 s.

2.32 [I] Se deja caer una canica desde un puente y golpea el agua en un tiempo de 5.0 s. Calcule *a*) la rapidez con que choca contra el agua y *b*) la altura del puente. **Resp.** *a*) 49 m/s; *b*) 0.12 km o 1.2×10^2 m.

2.33 [II] Se arroja una piedra hacia abajo en línea recta con una rapidez inicial de 8.0 m/s y desde una altura de 25 m. Encuentre *a*) el tiempo que tarda en llegar al piso y *b*) la rapidez con la que choca contra el piso.
Resp. *a*) 1.6 s; *b*) 24 m/s.

2.34 [II] Se lanza una pelota de béisbol hacia arriba con una rapidez de 30 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo tarda en subir? *b*) ¿A qué altura llegará? *c*) ¿Cuánto tiempo tardará, a partir de que se separa de la mano, en regresar a su punto de partida? *d*) ¿Cuándo tendrá una rapidez de 16 m/s? **Resp.** *a*) 3.1 s; *b*) 46 m; *c*) 6.1 s; *d*) 1.4 s y 4.7 s.

2.35 [II] Una botella que se deja caer desde un globo alcanza el piso en 20 s. Determine la altura del globo si: *a*) estuviera en reposo en el aire, *b*) ascendiera con una rapidez de 50 m/s cuando se deja caer la botella.
Resp. *a*) 2.0 km; *b*) 0.96 km.

2.36 [II] Se dejan caer dos pelotas al piso desde diferentes alturas. Una se deja caer 1.5 s después de la otra, pero ambas golpean el piso al mismo tiempo, 5.0 s después de dejar caer la primera. *a*) ¿Cuál es la diferencia de alturas a la cual se dejaron caer? *b*) ¿Desde qué altura se dejó caer la primera pelota? **Resp.** *a*) 62.54 m o 63 m; *b*) 0.12 km.

2.37 [II] Mientras un ascensor se mueve hacia arriba por un cubo a una velocidad de 3.00 m/s, se suelta una tuerca de un tornillo. La tuerca golpea el fondo del cubo del ascensor en 2.00 s. *a*) ¿A qué altura con respecto al fondo del cubo se encuentra el ascensor cuando se desprendió la tuerca? *b*) ¿Qué tan lejos del fondo estaba la tuerca 0.25 s después de salirse de su sitio? **Resp.** *a*) 13.6 m; *b*) 14 m.

2.38 [I] Una canica, que rueda con una rapidez de 20 cm/s, cae por el borde de una mesa que tiene una altura de 80 cm. *a*) ¿Cuánto tiempo necesita para chocar con el piso? *b*) ¿A qué distancia horizontal del borde de la mesa chocará la canica contra el piso? **Resp.** *a*) 0.40 s; *b*) 8.1 cm.

2.39 [II] Un cuerpo con rapidez inicial de 40 m/s se lanza hacia arriba desde el nivel del piso, con un ángulo de 50° con la horizontal. *a*) ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el cuerpo choque contra el piso? *b*) ¿A qué distancia del punto de partida golpeará el piso? *c*) ¿Cuál será el ángulo con la horizontal al chocar? **Resp.** *a*) 6.3 s; *b*) 0.16 km; *c*) 50°.

2.40 [II] Se lanza un cuerpo hacia abajo desde el punto más alto de un edificio de 170 m de altura, formando un ángulo de 30° con la horizontal. Su rapidez inicial es de 40 m/s. *a*) ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el cuerpo llegue al piso? *b*) ¿A qué distancia del pie del edificio golpeará? *c*) ¿Cuál será el ángulo con la horizontal al cual chocará? **Resp.** *a*) 4.2 s; *b*) 0.15 km; *c*) −60°.

2.41 [II] Una manguera que se encuentra tendida en el piso lanza una corriente de agua hacia arriba con un ángulo de 40° con la horizontal. La rapidez del agua es de 20 m/s cuando sale de la manguera. ¿A qué altura golpeará sobre una pared que se encuentra a 8.0 m de distancia? **Resp.** 5.4 m.

2.42 [II] Un bateador en la Serie Mundial conecta un cuadrangular; la pelota es impulsada con una velocidad de 40 m/s y con un ángulo de 26° sobre la horizontal. Un jardinero, que tiene un alcance de 3.0 m sobre el suelo, se apoya contra la pared de las gradas de sol, que está a 110 m del plato de *home*. La pelota estaba a l20 cm sobre el piso cuando fue bateada. ¿A qué altura por encima del guante del jardinero pasa la pelota?
Resp. 5.9 m o 6.0 m.

2.43 [II] Demuestre que el disparo de una pistola puede alcanzar el triple de altura cuando tiene un ángulo de elevación de 60° que cuando su ángulo es de 30°, pero que tendrá el mismo alcance horizontal.

2.44 [II] Se lanza una pelota hacia arriba formando un ángulo de 30° con la horizontal y cae en la parte más alta de un edificio que está a 20 m de distancia. El borde superior se encuentra a 5.0 m por encima del punto de lanzamiento. ¿Con qué rapidez se lanzó la pelota? **Resp.** 20 m/s.

2.45 [III] Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con rapidez v desde un punto que se encuentra a h metros sobre el piso. Demuestre que el tiempo que tarda la pelota en golpear el piso es $(v/g)[1 + \sqrt{1 + (2hg/v^2)}]$.

LEYES DE NEWTON 3

LA MASA de un objeto es una medida de su inercia. Se llama **inercia** a la tendencia de un objeto en reposo a permanecer en este estado, y de un objeto en movimiento a continuarlo sin cambiar su velocidad. Durante varios siglos, los físicos habían encontrado útil concebir la masa como una representación de la cantidad de materia, pero esa idea ya no es sostenible (como se aprendió a partir de la Relatividad Especial).

EL KILOGRAMO PATRÓN es un objeto cuya masa se define como un kilogramo. Las masas de otros objetos se encuentran por comparación con esta masa. Un *gramo masa* equivale exactamente a 0.001 kg.

FUERZA, en general, es el agente del cambio. En mecánica, es aquello que cambia la velocidad de un objeto. La fuerza es una cantidad vectorial, que tiene magnitud y dirección. Una *fuerza externa* es aquella cuya fuente se encuentra fuera del sistema que se está considerando.

LA FUERZA RESULTANTE que actúa sobre un objeto le proporciona una aceleración en la dirección de la fuerza. La aceleración es proporcional a la fuerza e inversamente proporcional a la masa del objeto. (A partir de la Teoría Especial de la Relatividad, ahora se sabe que este enunciado en realidad es una aproximación excelente, aplicable a todas las situaciones donde la rapidez es apreciablemente menor que la de la luz, c.)

EL NEWTON es la unidad de fuerza en el SI. Un newton (1 N) es la fuerza resultante que proporciona a 1 kg una aceleración de 1 $\mathrm{m/s^2}$. La *libra* equivale a 4.45 N o, de manera alternativa, un newton es aproximadamente un cuarto de libra.

PRIMERA LEY DE NEWTON: *Un objeto en reposo permanecerá en reposo; un objeto en movimiento seguirá moviéndose con velocidad constante, excepto en cuanto recibe la acción de una fuerza externa.* La fuerza es lo que cambia el movimiento.

SEGUNDA LEY DE NEWTON: Como la enunció Newton, la segunda ley se estructuró en términos del concepto de cantidad movimiento. En el capítulo 8 se tratará un enunciado rigurosamente correcto. En este punto, el enfoque será sobre una variación menos fundamental, pero muy útil. Si la fuerza resultante (neta) $\vec{\mathbf{F}}$ que actúa sobre un objeto de masa m no es cero, el objeto se acelerará en la dirección de 1a fuerza. La aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ es proporcional a 1a fuerza e inversamente proporcional a la masa del objeto. Con $\vec{\mathbf{F}}$ en newtons, m en kilogramos y $\vec{\mathbf{a}}$ en $\mathrm{m/s^2}$, esta proporcionalidad se puede escribir como una ecuación:

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{m} \qquad \text{o} \qquad \vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$$

La aceleración $\vec{\mathbf{a}}$ tiene la misma dirección que la fuerza resultante $\vec{\mathbf{F}}$.

La ecuación vectorial $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ puede escribirse en términos de sus componentes como

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z$$

donde las fuerzas son las componentes de las fuerzas externas que actúan sobre el objeto.

TERCERA LEY DE NEWTON: La materia *interactúa* con la materia; las fuerzas se presentan en pares. *Por cada fuerza que actúa sobre un cuerpo, existe otra igual, pero en sentido opuesto, actuando sobre algún otro cuerpo.* Con frecuencia a ésta se le llama *ley de acción y reacción*. Note que las fuerzas de acción y reacción actúan en los dos diferentes cuerpos que interactúan.

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL: Cuando dos masas m y m' interactúan gravitacionalmente se atraen entre sí con fuerzas de igual magnitud. Para masas puntuales (o cuerpos con simetría esférica), la fuerza de atracción F_G está dada por

$$F_G = G\frac{mm'}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los centros de las masas, y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N · m²/kg² cuando F_G está en newtons, m y m' están en kilogramos y r está en metros.

EL PESO de un cuerpo (F_W) es la fuerza gravitacional que atrae al cuerpo. En la Tierra, es la fuerza gravitacional que ejerce la Tierra sobre el cuerpo. Sus unidades son newtons (en el SI) y libras (en el sistema británico). Debido a que la Tierra no es una esfera uniforme perfecta, y sobre todo más por su rotación, el peso medido por una balanza (con frecuencia llamado *peso efectivo*) será diferente, de manera muy ligera, del que se acaba de definir.

RELACIÓN ENTRE MASA Y PESO: Un cuerpo de masa m en caída libre hacia la Tierra está bajo la acción de una sola fuerza, la atracción gravitacional, a la que se conoce como peso F_W del objeto. La aceleración g que tiene un objeto en caída libre se debe a su peso F_W. Entonces, la ecuación $\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ da la relación entre $F = F_W$, $a = g$ y m; esto es, $F_W = mg$. Como en la superficie terrestre, en promedio, $g = 9.81$ m/s², un objeto de 1.00 kg pesa 9.81 N (o 2.20 lb).

FUERZA DE TENSIÓN ($\vec{\mathbf{F}}_T$) es la fuerza con la que una cuerda o cadena tira del objeto al cual está unida. La magnitud de la fuerza de tensión es la **tensión** (F_T).

FUERZA DE FRICCIÓN ($\vec{\mathbf{F}}_f$) es una fuerza tangencial que actúa sobre una superficie que se opone al deslizamiento de la superficie a través de una superficie adyacente. La fuerza de fricción es paralela a la superficie y opuesta, en sentido, a su movimiento. Un objeto empezará a resbalar sólo cuando la fuerza aplicada sobrepase la fuerza máxima de fricción estática.

FUERZA NORMAL ($\vec{\mathbf{F}}_N$) sobre una superficie que descansa sobre una segunda superficie, es la componente perpendicular de la fuerza ejercida por la superficie de soporte sobre la superficie que está siendo soportada.

COEFICIENTE DE FRICCIÓN CINÉTICA (μ_c) se define para el caso en el que una superficie se desliza a través de otra con rapidez constante. Esto es

$$\mu_c = \frac{\text{fuerza de fricción}}{\text{fuerza normal}} = \frac{F_f}{F_N}$$

EL COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICA (μ_e) se define para el caso en donde una superficie está a punto de deslizarse a través de otra superficie. Esto es

$$\mu_e = \frac{\text{fuerza de fricción crítica}}{\text{fuerza normal}} = \frac{F_f(\text{máx})}{F_N}$$

donde la fuerza de fricción máxima es la fuerza de fricción cuando el objeto está a punto de iniciar su desplazamiento.

ANÁLISIS DIMENSIONAL: Todas las cantidades mecánicas, tales como la aceleración y la fuerza, se pueden expresar en términos de tres dimensiones fundamentales: la longitud L, la masa M y el tiempo T. Por ejemplo, la aceleración es una longitud (una distancia) dividida entre (tiempo)²; se dice que sus *dimensiones* son L/T^2, que se puede escribir como $[LT^{-2}]$. Las dimensiones de volumen son $[L^3]$ y las de velocidad $[LT^{-1}]$. Como la fuerza es la masa multiplicada por la aceleración, sus dimensiones son $[MLT^{-2}]$. El análisis dimensional es muy útil para ver si una ecuación está correctamente escrita, ya que cada término de una ecuación debe tener las mismas dimensiones. Por ejemplo, las dimensiones de la ecuación

$$s = v_i t + \tfrac{1}{2}at^2$$

son

$$[L] \rightarrow [LT^{-1}][T] + [LT^{-2}][T^2]$$

y cada término tiene dimensiones de longitud. *Recuerde: todos los términos en una ecuación deben tener las mismas dimensiones*. Por ejemplo, una ecuación no puede tener un término de volumen $[L^3]$ sumado con otro de área $[L^2]$, o tampoco un término de fuerza $[MLT^{-2}]$ puede restarse a un término de velocidad $[LT^{-1}]$; estos términos no tienen las mismas dimensiones.

OPERACIONES MATEMÁTICAS CON UNIDADES: En toda operación matemática, las unidades (por ejemplo, lb, cm, ft^3, mi/h, m/s^2) deben acompañar a los números y someterse a las mismas operaciones matemáticas.

Las cantidades no pueden sumarse o restarse directamente a menos que tengan las mismas unidades (así como las mismas dimensiones). Por ejemplo, si se va a sumar algebraicamente 5 m (longitud) y 8 cm (longitud), primero se debe convertir m a cm o cm a m. Sin embargo, cualquier tipo de cantidad se puede combinar con las operaciones de multiplicación o división, ya que las unidades, así como los números, obedecen a las leyes del álgebra en cuanto a elevar al cuadrado, simplificar, etc. De esta forma:

(1) $6\ \text{m}^2 + 2\ \text{m}^2 = 8\ \text{m}^2 \qquad (\text{m}^2 + \text{m}^2 \to \text{m}^2)$

(2) $5\ \text{cm} \times 2\ \text{cm}^2 = 10\ \text{cm}^3 \qquad (\text{cm} \times \text{cm}^2 \to \text{cm}^3)$

(3) $2\ \text{m}^3 \times 1\,500\ \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 3\,000\ \text{kg} \qquad \left(\text{m}^3 \times \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \to \text{kg}\right)$

(4) $2\ \text{s} \times 3\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}^2} = 6\ \dfrac{\text{km}}{\text{s}} \qquad \left(\text{s} \times \dfrac{\text{km}}{\text{s}^2} \to \dfrac{\text{km}}{\text{s}}\right)$

(5) $\dfrac{15\ \text{g}}{3\ \text{g/cm}^3} = 5\ \text{cm}^3 \qquad \left(\dfrac{\text{g}}{\text{g/cm}^3} \to \text{g} \times \dfrac{\text{cm}^3}{\text{g}} \to \text{cm}^3\right)$

PROBLEMAS RESUELTOS

3.1 [I] Cuatro fuerzas coplanares actúan sobre un cuerpo en el punto *O* presentado en la figura 3-1*a*. Determine su resultante de manera gráfica.

A partir de *O* se grafican uno tras otro los cuatro vectores, como en la figura 3-1*b*. Se ubica el extremo de la cola de cada vector en la punta del anterior. La flecha de *O* a la punta del último vector representa la resultante de los vectores.

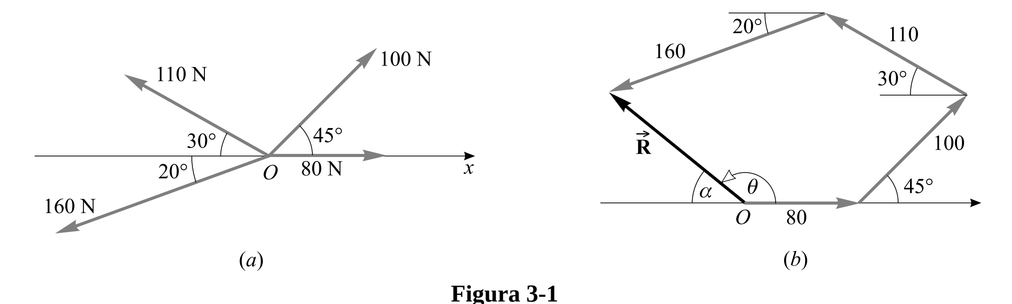


Figura 3-1

Se mide *R* del dibujo a escala en la figura 3-1*b* y se observa que es 119 N. El ángulo α se mide con un transportador y es de 37°. Por tanto, la resultante hace un ángulo $\theta = 180° - 37° = 143°$ con el eje *x* positivo. La resultante es 119 N en 143°.

3.2 [II] Las cinco fuerzas coplanares presentadas en la figura 3-2*a* actúan sobre un objeto. Encuentre su resultante.

1) Primero se determinan las componentes *x* y *y* de cada fuerza. Éstas son las siguientes:

Fuerza	Componente *x*	Componente *y*
19.0 N	19.0 N	0 N
15.0 N	(15.0 N) cos 60.0° = 7.50 N	(15.0 N) sen 60.0° = 13.0 N
16.0 N	−(16.0 N) cos 45.0° = −11.3 N	(16.0 N) sen 45.0° = 11.3 N
11.0 N	−(11.0 N) cos 30.0° = −9.53 N	−(11.0 N) sen 30.0° = −5.50 N
22.0 N	0 N	−22.0 N

Observe los signos + y − para indicar una dirección.

2) La resultante $\vec{\mathbf{R}}$ tiene componentes $R_x = \Sigma F_x$ y $R_y = \Sigma F_y$, en donde se lee ΣF_x como "la suma de todas las componentes de la fuerza x". En tal caso, se tiene

$$R_x = 19.0 \text{ N} + 7.50 \text{ N} - 11.3 \text{ N} - 9.53 \text{ N} + 0 \text{ N} = +5.7 \text{ N}$$
$$R_y = 0 \text{ N} + 13.0 \text{ N} + 11.3 \text{ N} - 5.50 \text{ N} - 22.0 \text{ N} = -3.2 \text{ N}$$

3) La magnitud de la resultante es

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 6.5 \text{ N}$$

4) Por último, se traza la resultante igual que en la figura 3-2*b* y se halla su ángulo. Se observa que

$$\tan \phi = \frac{3.2 \text{ N}}{5.7 \text{ N}} = 0.56$$

a partir de la cual $\phi = 29°$. Entonces, $\theta = 360° - 29° = 331°$. La resultante es 6.5 N en 331° (o $-29°$) o $\vec{\mathbf{R}} = 6.5$ N — 331° DESDE EL EJE $+x$.

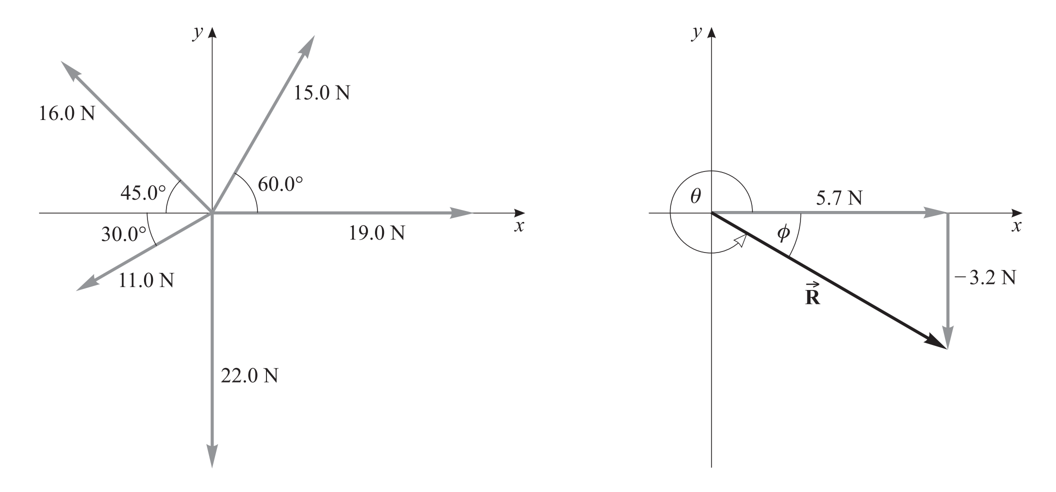


Figura 3-2

3.3 [II] Resuelva el problema 3.1 mediante el método de componentes. Obtenga una respuesta con una magnitud de dos cifras significativas.

Las fuerzas y sus componentes son:

Fuerza	Componente x	Componente y
80 N	80 N	0
100 N	(100 N) cos 45° = 71 N	(100 N) sen 45° = 71 N
110 N	−(110 N) cos 30° = −95 N	(110 N) sen 30° = 55 N
160 N	−(160 N) cos 20° = −150 N	−(160 N) sen 20° = −55 N

Observe el signo de cada componente. Para determinar la resultante, se tiene

$$R_x = \Sigma F_x = 80 \text{ N} + 71 \text{ N} - 95 \text{ N} - 150 \text{ N} = -94 \text{ N}$$
$$R_y = \Sigma F_y = 0 + 71 \text{ N} + 55 \text{ N} - 55 \text{ N} = 71 \text{ N}$$

La resultante se presenta en la figura 3-3; ahí, se ve que

$$R = \sqrt{(94 \text{ N})^2 + (71 \text{ N})^2} = 1.2 \times 10^2 \text{ N}$$

Además, $\tan \alpha = (71 \text{ N})/(94 \text{ N})$, a partir de lo cual $\alpha = 37°$. Por tanto, la resultante es 118 N en $180° - 37° = 143°$ o $\vec{\mathbf{R}} = 118$ N — 143° DESDE EL EJE $+x$.

3.4 [II] Una fuerza de 100 N hace un ángulo de θ con el eje x y tiene una componente y escalar de 30 N. Encuentre la componente x escalar de la fuerza y el ángulo θ. (Recuerde que el número 100 N tiene tres cifras significativas, mientras que 30 N sólo tiene dos.)

Los datos se trazan aproximadamente en la figura 3-4. Se pretende encontrar F_x y θ. Se sabe que

$$\text{sen } \theta = \frac{30 \text{ N}}{100 \text{ N}} = 0.30$$

$\theta = 17.46°$, y por tanto, con dos cifras significativas, $\theta = 17°$. En tal caso, mediante cos θ, se tiene

$$F_x = (100 \text{ N}) \cos 17.46° = 95 \text{ N}$$

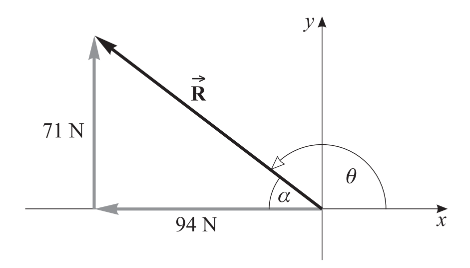


Figura 3-3

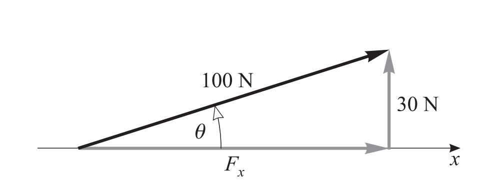


Figura 3-4

3.5 [I] Un niño jala una cuerda atada a un trineo con una fuerza de 60 N. La cuerda hace un ángulo de 40° con el suelo. *a*) Calcule el valor real del tirón que tiende a mover el trineo por el suelo. *b*) Calcule la fuerza que tiende a elevar el trineo verticalmente.

Como se aprecia en la figura 3-5, las componentes de la fuerza de 60 N son 39 N y 46 N. *a*) El tirón sobre el suelo es la componente horizontal, 46 N. *b*) La fuerza elevadora es la componente vertical, 39 N.

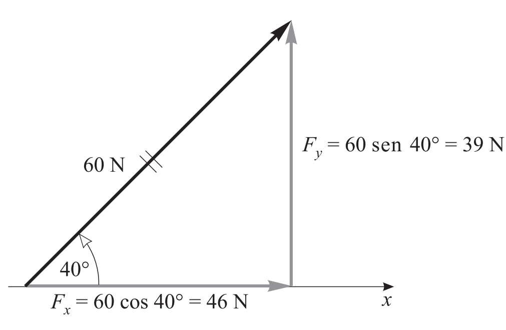


Figura 3-5

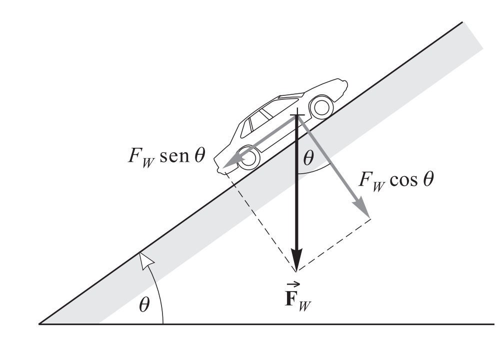


Figura 3-6

3.6 [I] Un automóvil que pesa F_W está en una rampa que tiene un ángulo θ con la horizontal. ¿Cuál es la intensidad de la fuerza perpendicular que debe soportar la rampa para que no se rompa bajo el peso del automóvil?

Como se observa en la figura 3-6, el peso del vehículo es una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_W$ que atrae el automóvil directamente hacia abajo. Se toma una componente de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo del plano inclinado y la otra perpendicular a ella. La rampa debe equilibrar la componente de fuerza $F_W \cos \theta$ para que el automóvil no atraviese la rampa y caiga.

3.7 [II] Tres fuerzas que actúan sobre una partícula están dadas mediante $\vec{\mathbf{F}}_1 = (20\hat{\mathbf{i}} - 36\hat{\mathbf{j}} + 73\hat{\mathbf{k}})$ N, $\vec{\mathbf{F}}_2 = (-17\hat{\mathbf{i}} + 21\hat{\mathbf{j}} - 46\hat{\mathbf{k}})$ N y $\vec{\mathbf{F}}_3 = (-12\hat{\mathbf{k}})$ N. Encuentre su vector resultante. Determine también la magnitud de la resultante con dos cifras significativas.

Se sabe que

$$R_x = \Sigma F_x = 20 \text{ N} - 17 \text{ N} + 0 \text{ N} = 3 \text{ N}$$
$$R_y = \Sigma F_y = -36 \text{ N} + 21 \text{ N} + 0 \text{ N} = -15 \text{ N}$$
$$R_z = \Sigma F_z = 73 \text{ N} - 46 \text{ N} - 12 \text{ N} = 15 \text{ N}$$

Dado que $\vec{\mathbf{R}} = R_x\hat{\mathbf{i}} + R_y\hat{\mathbf{j}} + R_z\hat{\mathbf{k}}$, se encuentra

$$\vec{\mathbf{R}} = 3\hat{\mathbf{i}} - 15\hat{\mathbf{j}} + 15\hat{\mathbf{k}}$$

Para dos cifras significativas, el teorema de Pitágoras tridimensional produce

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{459} = 21 \text{ N}$$

3.8 [I] Encuentre el peso de un cuerpo, si su masa en la Tierra es *a*) 3.00 kg, *b*) 200 g.

La relación general entre masa *m* y peso F_W es $F_W = mg$. En esta expresión, *m* debe estar en kilogramos, *g* en m/s² y F_W en newtons. Sobre la Tierra, $g = 9.81$ m/s². La aceleración debida a la gravedad varía de un lugar a otro en el universo.

a) $$F_W = (3.00 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 29.4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 29.4 \text{ N}$$

b) $$F_W = (0.200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 1.96 \text{ N}$$

3.9 [I] A un objeto de 20.0 kg que se mueve libremente se le aplica una fuerza resultante de 45.0 N en la dirección $-x$. Calcule la aceleración del objeto.

Se usa la segunda ley en su forma de componentes, $\Sigma F_x = ma_x$, con $\Sigma F_x = -45.0$ N y $m = 20.0$ kg. Entonces

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{-45.0 \text{ N}}{20.0 \text{ kg}} = -2.25 \text{ N/kg} = -2.25 \text{ m/s}^2$$

donde se usó el hecho de que 1 N = 1 kg · m/s². Como la fuerza resultante que actúa sobre el objeto está en la dirección $-x$ su aceleración también está en esa dirección.

3.10 [I] El objeto que se muestra en la figura 3-7*a* pesa 50 N y está suspendido por una cuerda. Encuentre el valor de la tensión en la cuerda.

Para iniciar el análisis, primero hay que aislar mentalmente el objeto. Dos fuerzas actúan sobre él: la fuerza de la cuerda que jala hacia arriba y la fuerza que lo jala hacia abajo debida a la gravedad. La fuerza de tensión que ejerce la cuerda se denota por medio de F_T, y la fuerza que ejerce la gravedad, el peso del objeto, se denota por $F_W = 50$ N. Estas dos fuerzas se muestran en el diagrama de cuerpo libre en la figura 3-7*b*.

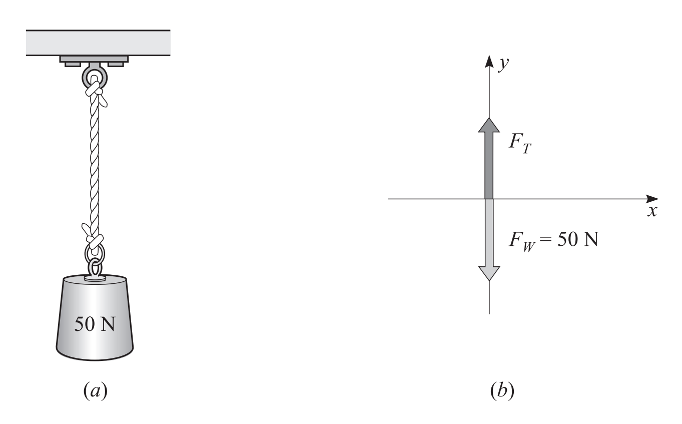


Figura 3-7

Las fuerzas ya están en su forma de componentes, por lo que es posible escribir la primera condición de equilibrio tomando *arriba* y a la *derecha* como direcciones positivas:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad 0 = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad F_T - 50 \text{ N} = 0$$

de donde $F_T = 50$ N. Entonces, cuando una sola cuerda vertical sostiene un cuerpo en equilibrio, la tensión en la cuerda es igual al peso del cuerpo.

3.11 [I] Un objeto de 5.0 kg se jala hacia arriba con una cuerda acelerándolo a 0.30 m/s². ¿Cuál debe ser la tensión en la cuerda?

El diagrama de cuerpo libre para el objeto se muestra en la figura 3-8. La tensión en la cuerda es F_T y el peso del objeto es $F_W = mg = (5.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 49.1\text{ N}$. Usando $\Sigma F_y = ma_y$, con la dirección hacia arriba tomada como positiva, se tiene

$$F_T - mg = ma_y \qquad \text{o} \qquad F_T - 49.1\text{ N} = (5.0\text{ kg})(0.30\text{ m/s}^2)$$

de lo cual $F_T = 50.6\text{ N} = 51\text{ N}$. Como comprobación, se puede ver que F_T es mayor que F_W, como debe ser si el cuerpo se acelera hacia arriba.

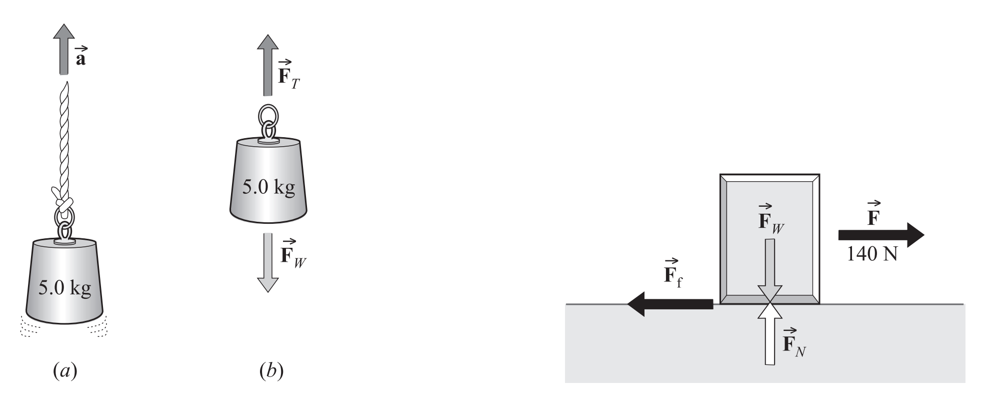


Figura 3-8 **Figura 3-9**

3.12[II] Se necesita una fuerza horizontal de 140 N para jalar una caja de 60.0 kg sobre un piso horizontal con rapidez constante. ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre el piso y la caja? Determínelo a tres cifras significativas, aun cuando esto no sea muy realista.

El diagrama de cuerpo libre para la caja se muestra en la figura 3-9. Como la caja no se mueve en dirección vertical, $a_y = 0$. Por tanto,

$$\Sigma F_y = ma_y \qquad \text{da} \qquad F_N - mg = (m)(0\text{ m/s}^2)$$

de donde se encuentra que $F_N = mg = (60.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 588.6\text{ N}$. Como la caja se mueve horizontalmente con rapidez constante, $a_x = 0$ y en consecuencia

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \text{da} \qquad 140\text{ N} = F_f = 0$$

de donde la fuerza de fricción es $F_f = 140\text{ N}$. Entonces se tiene

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{140\text{ N}}{588.6\text{ N}} = 0.238$$

3.13 [II] La única fuerza que actúa sobre un objeto de 5.0 kg tiene por componentes $F_x = 20\text{ N}$ y $F_y = 30\text{ N}$. Encuentre la aceleración del objeto.

Se utiliza $\Sigma F_x = ma_x$ y $\Sigma F_y = ma_y$ para obtener

$$a_x = \frac{\Sigma F_x}{m} = \frac{20\text{ N}}{5.0\text{ kg}} = 4.0\text{ m/s}^2$$

$$a_y = \frac{\Sigma F_y}{m} = \frac{30\text{ N}}{5.0\text{ kg}} = 6.0\text{ m/s}^2$$

Estas componentes de la aceleración se muestran en la figura 3-10. De la figura, se observa que

$$a = \sqrt{(4.0)^2 + (6.0)^2}\text{ m/s}^2 = 7.2\text{ m/s}^2$$

y $\theta = \arctan(6.0/4.0) = 56°$.

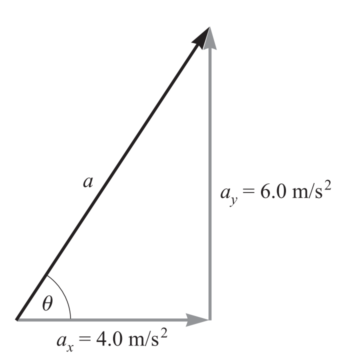


Figura 3-10

3.14 [II] Se desea aplicar una aceleración de 0.70 m/s² a un objeto de 600 N. ¿De qué magnitud debe ser la fuerza no balanceada que actúa sobre él?

Observe que se da como dato el peso, no la masa. Si considera que el peso se determinó en la Tierra, se utiliza $F_W = mg$ para encontrar

$$m = \frac{F_W}{g} = \frac{600\ \text{N}}{9.81\ \text{m/s}^2} = 61\ \text{kg}$$

Ahora que se conocen la masa del objeto (61 kg) y la aceleración deseada (0.70 m/s²), se tiene

$$F = ma = (61\ \text{kg})(0.70\ \text{m/s}^2) = 43\ \text{N}$$

3.15 [III] Una fuerza constante actúa sobre un objeto de 5.0 kg y disminuye su velocidad de 7.0 m/s a 3.0 m/s en un tiempo de 3.0 s. Encuentre la fuerza.

En primer lugar, se debe calcular la aceleración del objeto, que es constante porque la fuerza también es constante. Tomando la dirección del movimiento como positiva, del capítulo 2 se tiene

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{-4.0\ \text{m/s}}{3.0\ \text{s}} = -1.33\ \text{m/s}^2$$

Ahora se puede usar $F = ma$ con $m = 5.0$ kg:

$$F = (5.0\ \text{kg})(-1.33\ \text{m/s}^2) = -6.7\ \text{N}$$

El signo menos indica que la fuerza es una fuerza retardadora y que se opone al movimiento.

3.16 [II] Un bloque de 400 g con rapidez inicial de 80 cm/s resbala sobre la cubierta de una mesa horizontal en contra de una fuerza de fricción de 0.70 N. *a*) ¿Qué distancia recorrerá resbalando antes de detenerse? *b*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción entre el bloque y la cubierta de la mesa?

a) Considere la dirección del movimiento como positiva. La única fuerza no balanceada que actúa sobre el bloque es la fuerza de fricción, −0.70 N. Por tanto,

$$\Sigma F = ma \qquad \text{se convierte en} \qquad -0.70\ \text{N} = (0.400\ \text{kg})\,(a)$$

de donde $a = -1.75$ m/s². (Note que *m* siempre está en kilogramos.) Para encontrar la distancia a la que resbala el bloque, se tiene que $v_{ix} = 0.80$ m/s, $v_{fx} = 0$ y $a = -1.75$ m/s². Entonces la ecuación $v_{fx}^2 - v_{ix}^2 = 2ax$ da por resultado

$$x = \frac{v_{fx}^2 - v_{ix}^2}{2a} = \frac{(0 - 0.64)\ \text{m}^2/\text{s}^2}{(2)(-1.75\ \text{m/s}^2)} = 0.18\ \text{m}$$

b) Como las fuerzas verticales que actúan sobre el cuerpo deben cancelarse, el empuje hacia arriba F_N de la mesa debe ser igual al peso *mg* del bloque. Entonces

$$\mu_c = \frac{\text{fuerza de fricción}}{F_N} = \frac{0.70\ \text{N}}{(0.40\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)} = 0.18$$

3.17 [II] Un automóvil de 600 kg de peso se mueve en un camino nivelado a 30 m/s. *a*) ¿Qué tan grande debe ser la magnitud de la fuerza retardadora (supuesta constante) que se requiere para detener al automóvil en una distancia de 70 m? *b*) ¿Cuál es el mínimo coeficiente de fricción entre las llantas y el camino para que esto suceda? Suponga que las ruedas no están trabadas, en cuyo caso se trata con fricción estática; no hay resbalamiento.

a) En primer término se debe encontrar la aceleración del automóvil a partir de una ecuación de movimiento. Con los datos $v_{ix} = 30$ m/s, $v_{fx} = 0$ y $x = 70$ m se usa la ecuación $v_{fx}^2 = v_{ix}^2 + 2ax$ para encontrar

$$a = \frac{v_{fx}^2 - v_{ix}^2}{2x} = \frac{0 - 900\ \text{m}^2/\text{s}^2}{140\ \text{m}} = -6.43\ \text{m/s}^2$$

Ahora puede escribirse

$$F = ma = (600\ \text{kg})(-6.43\ \text{m/s}^2) = -3\,860\ \text{N} = -3.9\ \text{kN}$$

b) La fuerza calculada en *a*) es igual a la fuerza de fricción que existe entre las llantas y el camino. Por tanto, la magnitud de la fuerza de fricción sobre las llantas es $F_f = 3\,860$ N. El coeficiente de fricción está

dado por $\mu_e = F_f/F_N$, donde F_N es la fuerza normal. En este caso, el camino empuja hacia arriba sobre el automóvil con una fuerza igual al peso del automóvil. Así que,

$$F_N = F_W = mg = (600\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 5\,886\text{ N}$$

entonces se tiene $$\mu_e = \frac{F_f}{F_N} = \frac{3\,860}{5\,886} = 0.66$$

El coeficiente de fricción debe ser al menos de 0.66 para que el automóvil se detenga dentro de los 70 m.

3.18 [I] Una locomotora de 8000 kg tira de un tren de 40 000 kg a lo largo de una vía nivelada y le proporciona una aceleración $a_1 = 1.20\text{ m/s}^2$. ¿Qué aceleración (a_2) le proporcionaría a un tren de 16 000 kg?

Para una fuerza dada de la locomotora, la aceleración es inversamente proporcional a la masa total. Entonces

$$a_2 = \frac{m_1}{m_2}a_1 = \frac{8\,000\text{ kg} + 40\,000\text{ kg}}{8\,000\text{ kg} + 16\,000\text{ kg}}(1.20\text{ m/s}^2) = 2.40\text{ m/s}^2$$

3.19 [I] En la figura 3-11*a* un objeto de masa *m* está colgado de una cuerda. Calcule la tensión en la cuerda si el objeto *a*) está en reposo, *b*) se mueve con velocidad constante, *c*) acelera hacia arriba con una aceleración $a = 3g/2$ y *d*) acelera hacia abajo con $a = 0.75g$.

Dos fuerzas actúan sobre el objeto: la tensión hacia arriba F_T y la atracción gravitacional hacia abajo *mg*, tal como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la figura 3-11*b*. Se considera como positiva la dirección *hacia arriba* y se escribe $\Sigma F_y = ma_y$, en cada caso.

a)	$a_y = 0$:	$F_T - mg = ma_y = 0$	o	$F_T = mg$
b)	$a_y = 0$:	$F_T - mg = ma_y = 0$	o	$F_T = mg$
c)	$a_y = 3g/2$:	$F_T - mg = m(3g/2)$	o	$F_T = 2.5\,mg$
d)	$a_y = -3g/4$:	$F_T - mg = m(-3g/4)$	o	$F_T = 0.25\,mg$

Note que la tensión en la cuerda es menor que *mg* en el inciso *d*); sólo entonces el objeto tiene una aceleración hacia abajo. ¿Podría explicar por qué $F_T = 0$ si $a_y = -g$?

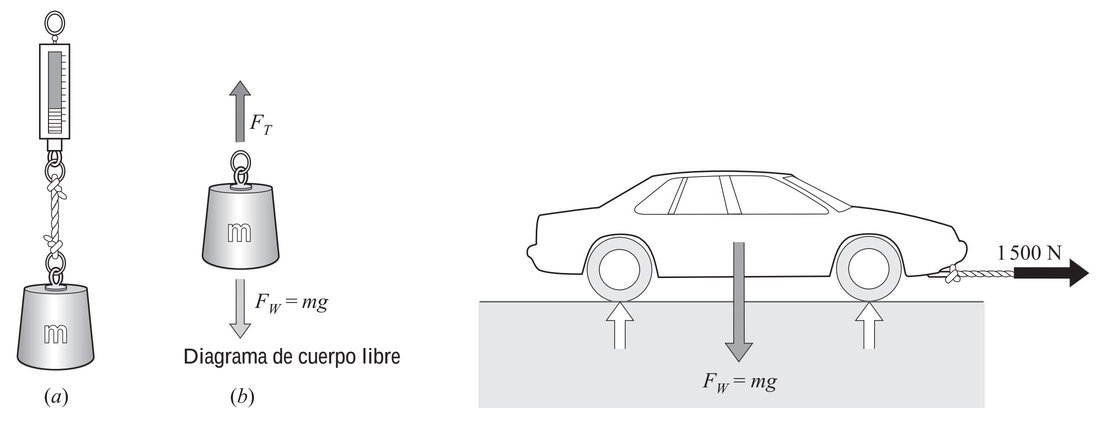


Figura 3-11 **Figura 3-12**

3.20 [I] Una cuerda de remolque se romperá si la tensión sobre ella excede los 1 500 N. Se utilizará para remolcar un automóvil de 700 kg a lo largo de un piso nivelado. ¿Cuál es el valor máximo de la aceleración que se puede aplicar al automóvil con esta cuerda? (Recuerde que 1 500 tiene cuatro cifras significativas; vea el apéndice A.)

Las fuerzas que actúan sobre el automóvil se muestran en la figura 3-12. Sólo son importantes las fuerzas en la dirección *x*, ya que las fuerzas en la dirección *y* se equilibran entre sí. Indicando la dirección positiva con el signo + y una pequeña flecha se tiene:

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma_x \qquad \text{se convierte en} \qquad 1\,500\text{ N} = (700\text{ kg})(a)$$

de donde $a = 2.14\text{ m/s}^2$.

3.21 [I] Calcule la aceleración mínima con la que una mujer de 45 kg se desliza por una cuerda, si la cuerda sólo puede soportar una tensión de 300 N.

El peso de la mujer es $mg = (45\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 441$ N. Como la cuerda únicamente soporta 300 N, la fuerza no balanceada F que actúa hacia abajo sobre la mujer debe ser de al menos 441 N − 300 N = 141 N. La aceleración mínima en su movimiento de bajada es

$$a = \frac{F}{m} = \frac{141\text{ N}}{45\text{ kg}} = 3.1\text{ m/s}^2$$

3.22 [II] Una caja de 70 kg resbala a lo largo de un piso debido a una fuerza de 400 N, como se muestra en la figura 3-13. El coeficiente de fricción entre la caja y el piso cuando la caja resbala es de 0.50. Calcule la aceleración de la caja.

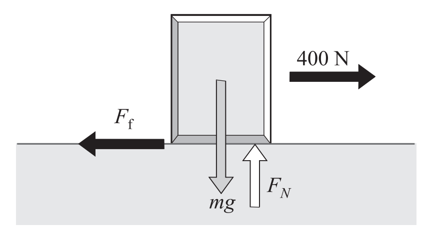


Figura 3-13

Como las fuerzas en la dirección y deben balancearse,

$$F_N = mg = (70\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 687\text{ N}$$

Pero la fuerza de fricción F_f está dada por

$$F_f = \mu_c F_N = (0.50)(687\text{ N}) = 344\text{ N}$$

Se puede escribir $\Sigma F_x = ma_x$ para la caja, tomando como positiva la dirección del movimiento:

$$400\text{ N} - 344\text{ N} = (70\text{ kg})(a) \qquad \text{o} \qquad a = 0.80\text{ m/s}^2$$

3.23 [II] Suponga, como se muestra en la figura 3-14, que una caja de 70 kg se jala con una fuerza de 400 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción cinética es 0.50. Calcule la aceleración de la caja.

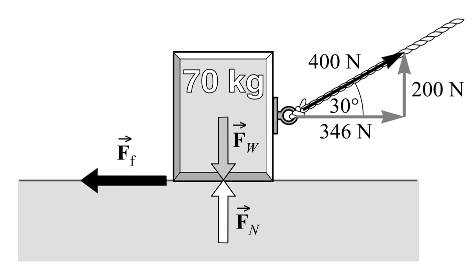


Figura 3-14

Como la caja no tiene movimiento en la dirección vertical, se tiene que $\Sigma F_y = ma_y = 0$. A partir de la figura 3-14 se ve que esta ecuación es

$$F_N + 200\text{ N} - mg = 0$$

Pero $mg = (70\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 687$ N, y se sigue que $F_N = 486$ N.

A continuación se calcula la fuerza de fricción que actúa sobre la caja:

$$F_f = \mu_c F_N = (0.50)(486\text{ N}) = 243\text{ N}$$

Ahora se escribe $\Sigma F_x = ma_x$ para la caja. Esto es

$$(346 - 243)\text{ N} = (70\text{ kg})(a_x)$$

de donde $a_x = 1.5\text{ m/s}^2$.

3.24 [III] Un automóvil que se mueve a 20 m/s en un camino horizontal aplica de manera repentina los frenos y finalmente llega al reposo. ¿Cuál es la distancia más corta en que puede detenerse si el coeficiente de fricción entre las llantas y el camino es de 0.90? Suponga que todas las llantas frenan idénticamente y que los frenos no traban la detención del automóvil mediante la fricción estática.

La fuerza de fricción en una llanta, llámese llanta 1, es

$$F_{f1} = \mu_e F_{N1} = \mu F_{W1}$$

donde F_{W1} es el peso que soporta la llanta 1. La fuerza de fricción total F_f se obtiene al sumar estos términos para las cuatro llantas:

$$F_f = \mu_e F_{W1} + \mu_e F_{W2} + \mu_e F_{W3} + \mu_e F_{W4} = \mu_e (F_{W1} + F_{W2} + F_{W3} + F_{W4}) = \mu_e F_W$$

donde F_W es el peso total del automóvil (observe que se supone un frenado óptimo en cada llanta). Esta fuerza de fricción es la única fuerza no balanceada sobre el automóvil (se desprecia la fricción del viento y factores similares). Al escribir $F = ma$ para el automóvil, y sustituir F con $-\mu_e F_W$, se obtiene $-\mu_e F_W = ma$, donde m es la masa del automóvil y la dirección positiva se considera como la dirección del movimiento. Sin embargo, $F_W = mg$; de modo que la aceleración del automóvil es

$$a = \frac{\mu_e F_W}{m} = -\frac{\mu_e mg}{m} = -\mu_e g = (-0.90)(9.81 \text{ m/s}^2) = -8.8 \text{ m/s}^2$$

Se puede calcular qué tan lejos viajó el automóvil antes de pararse resolviendo un problema de movimiento. Se conoce $v_i = 20$ m/s, $v_f = 0$ y $a = -8.8$ m/s², de la ecuación $v_f^2 - v_i^2 = 2ax$ se calcula

$$x = \frac{(0 - 400) \text{ m}^2/\text{s}^2}{-17.6 \text{ m/s}^2} = 23 \text{ m}$$

Si el frenado no fuera uniforme en las cuatro llantas, la distancia necesaria para detenerse sería más grande.

3.25 [II] Como se muestra en la figura 3-15, una fuerza de 400 N empuja una caja de 25 kg. Partiendo del reposo, la caja alcanza una velocidad de 2.0 m/s en un tiempo de 4.0 s. Encuentre el coeficiente de fricción cinético entre la caja y el piso.

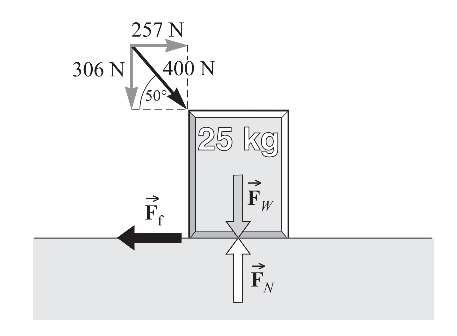


Figura 3-15

Es necesario encontrar f usando la ecuación $F = ma$. Para esto se debe encontrar a con las ecuaciones de movimiento. Se sabe que $v_i = 0$, $v_f = 2.0$ m/s, $t = 4.0$ s. Al usar $v_f = v_i + at$ se encuentra que

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} = \frac{2.0 \text{ m/s}}{4.0 \text{ s}} = 0.50 \text{ m/s}^2$$

Ahora se puede escribir $\Sigma F_x = ma_x$, donde $a_x = a = 0.50$ m/s². De la figura 3-15, esta ecuación es

$$257 \text{ N} - F_f = (25 \text{ kg})(0.50 \text{ m/s}^2) \qquad \text{o} \qquad F_f = 245 \text{ N}$$

Se desea calcular $\mu = F_f/F_N$. Para calcular F_N se escribe $\Sigma F_y = ma_y = 0$, pues no hay movimiento vertical. De la figura 3-15,

$$F_N - 306 \text{ N} - (25)(9.81) \text{ N} = 0 \qquad \text{o} \qquad F_N = 551 \text{ N}$$

Entonces

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{245}{551} = 0.44$$

3.26[I] Se tira de una vagoneta de 200 N, con rapidez constante, hacia arriba de un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Qué tan grande debe ser la fuerza paralela al plano inclinado, si se desprecian los efectos de la fricción?

La situación se muestra en la figura 3-16*a*. Debido a que la vagoneta se mueve con velocidad constante a lo largo de una recta, su vector velocidad es constante. Por tanto, la vagoneta se encuentra en equilibrio de traslación y puede aplicarse al mismo la primera condición para el equilibrio.

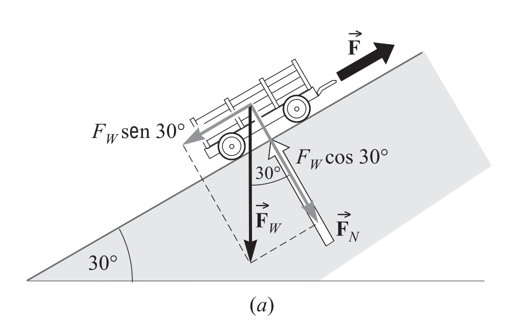
Se aísla la vagoneta como el objeto. Tres fuerzas no despreciables actúan sobre ella: 1) el tirón de la gravedad F_W (su peso) dirigido directamente hacia abajo; 2) la fuerza F sobre la vagoneta, paralela al plano inclinado, para tirar de aquélla hacia arriba de este último, 3) el empuje F_N del plano inclinado que soporta la vagoneta. En la figura 3-16*b* se muestran estas tres fuerzas en el diagrama de cuerpo libre.

Para situaciones en las que intervienen planos inclinados, es conveniente tomar el eje *x* paralelo al propio plano y el eje *y* perpendicular al mismo. Después de tomar las componentes a lo largo de estos ejes, se puede escribir la primera condición para el equilibrio:

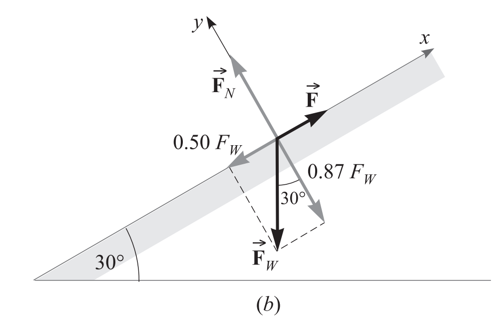
$$\overset{+}{\nearrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{queda} \qquad F - 0.50\, F_W = 0$$

$$\underset{+}{\nwarrow} \Sigma F_y = 0 \qquad \text{queda} \qquad F_N - 0.87\, F_W = 0$$

Si se resuelve la primera ecuación y se recuerda que $F_W = 200$ N, se encuentra que $F = 0.50\, F_W$. La fuerza de tracción requerida, con dos cifras significativas, es 0.10 kN.



(*a*)



(*b*)

Figura 3-16

3.27 [II] Una caja de 20 kg reposa sobre un plano inclinado, como se muestra en la figura 3-17. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano inclinado es 0.30. Calcule la aceleración con la que desciende la caja por el plano inclinado.

Para resolver problemas de plano inclinado, los ejes *x* y *y* se toman como se muestra en la figura; el eje *x* paralelo al plano, el eje *y* perpendicular al plano. Se encuentra la aceleración escribiendo $\Sigma F_x = ma_x$. Primero se debe calcular la fuerza de fricción F_f. Si aplica el hecho de que cos 30° = 0.866,

$$F_y = ma_y = 0 \qquad \text{da} \qquad F_N - 0.87\, mg = 0$$

de donde $F_N = (0.87)(20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 171$ N. Ahora se puede calcular F_f de la ecuación

$$F_f = \mu_c F_N = (0.30)(171 \text{ N}) = 51 \text{ N}$$

Escribiendo $\Sigma F_x = ma_x$, se tiene

$$F_f - 0.50mg = ma_x \quad \text{o}$$
$$51 \text{ N} - (0.50)(20)(9.81) \text{ N} = (20 \text{ kg})(a_x)$$

de donde $a_x = -2.35$ m/s². La aceleración de la caja al bajar por el plano es 2.4 m/s².

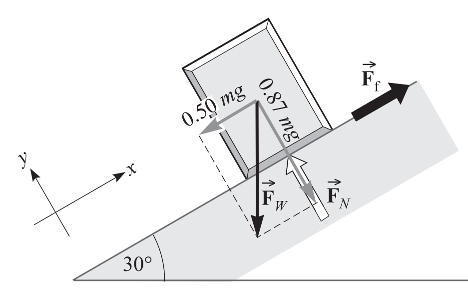


Figura 3-17

3.28 [III] Cuando una fuerza de 500 N empuja una caja de 25 kg, como se muestra en la figura 3-18, la aceleración de la caja al subir por el plano es 0.75 m/s². Calcule el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano.

Las fuerzas que actúan y sus componentes se muestran en la figura 3-18. Note cómo se tomaron los ejes *x* y *y*. Como la caja sube por el plano inclinado, la fuerza de fricción (que siempre actúa para retardar el movimiento) está dirigida hacia abajo.

Primero se encuentra F_f escribiendo $\Sigma F_x = ma_x$. De la figura 3-18, al usar sen 40° = 0.643,

$$383\text{ N} - F_f - (0.64)(25)(9.81)\text{ N} = (25\text{ kg})(0.75\text{ m/s}^2)$$

de donde $F_f = 207$ N.

También se necesita F_N. Al escribir $\Sigma F_y = ma_y = 0$ y usar cos 40° = 0.766, se obtiene

$$F_N - 321\text{ N} - (0.77)(25)(9.81)\text{ N} = 0 \quad \text{o} \quad F_N = 510\text{ N}$$

Entonces: $$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{207}{510} = 0.41$$

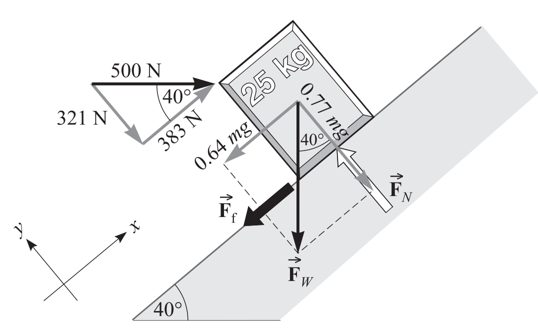


Figura 3-18

3.29 [III] Dos bloques, de masas m_1 y m_2, son empujados por una fuerza *F* como se muestra en la figura 3-19. El coeficiente de fricción entre cada bloque y la mesa es 0.40. *a*) ¿Cuál debe ser el valor de la fuerza *F* si los bloques han de tener una aceleración de 200 cm/s²? *b*) ¿Qué fuerza ejerce m_1 sobre m_2? Utilice $m_1 = 300$ g y $m_2 = 500$ g. Recuerde trabajar en unidades del Sistema Internacional.

La fuerza de fricción sobre cada bloque es $F_{f1} = 0.4m_1g$ y $F_{f2} = 0.4m_2g$. Para el análisis se toman los dos bloques como si fueran un solo objeto; las fuerzas horizontales *externas* sobre el objeto son *F*, F_{f1} y F_{f2}. Aunque los dos bloques se empujan entre sí, los impulsos son fuerzas *internas*, por lo que no forman parte de la fuerza externa no balanceada que actúa sobre el objeto compuesto por dos masas. Para ese objeto,

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \text{se convierte en} \qquad F - F_{f1} - F_{f2} = (m_1 + m_2)a_x$$

a) Resolviendo para *F* y sustituyendo los valores conocidos, se encuentra

$$F = 0.40g(m_1 + m_2) + (m_1 + m_2)a_x = 3.14\text{ N} + 1.60\text{ N} = 4.7\text{ N}$$

b) Ahora considere sólo el bloque m_2. Las fuerzas que actúan sobre él en la dirección *x* son el impulso debido al bloque m_1 (que se representa por F_b) y la fuerza de fricción retardadora $F_{f2} = 0.4m_2g$. Entonces, para éste,

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \text{se convierte en} \qquad F_b - F_{f2} = m_2a_x$$

Se sabe que $a_x = 2.0$ m/s² y por tanto

$$F_b = F_{f2} + m_2a_x = 1.96\text{ N} + 1.00\text{ N} = 2.96\text{ N} = 3.0\text{ N}$$

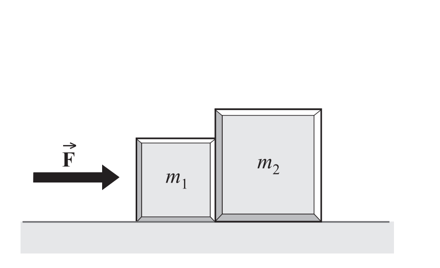
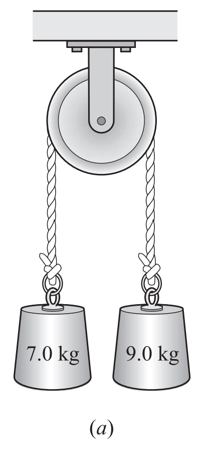




Figura 3-19



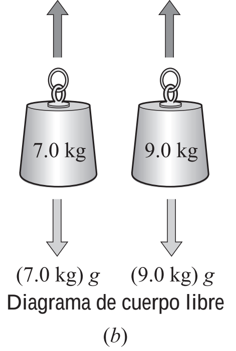


Figura 3-20

3.30 [II] Una masa de 7.0 kg cuelga del extremo de una cuerda que pasa por una polea sin masa ni fricción, y en el otro extremo cuelga una masa de 9.0 kg, como se muestra en la figura 3-20. (Este arreglo se llama *máquina de Atwood*.) Encuentre la aceleración de las masas y la tensión en la cuerda.

Como no hay fricción en la polea, la tensión en la cuerda será la misma en sus dos lados. Las fuerzas que actúan en cada una de las dos masas están dibujadas en la figura 3-20. Recuerde que el peso de un objeto es *mg*.

En situaciones en las que los objetos están conectados por cuerdas, es conveniente considerar positiva la dirección del movimiento. En este caso, se considera positivo *hacia arriba* para la masa de 7.0 kg y positivo *hacia abajo* para la masa de 9.0 kg. (Si se hace esto, la aceleración será positiva para cada masa. Como la cuerda no se estira, las aceleraciones son numéricamente iguales.) Al escribir $\Sigma F_y = ma_y$ para cada masa, se tiene

$$F_T - (7.0)(9.81)\text{ N} = (7.0\text{ kg})(a) \qquad \text{y} \qquad (9.0)(9.81)\text{ N} - F_T = (9.0\text{ kg})(a)$$

Si se suman estas dos ecuaciones, se elimina la incógnita F_T, lo que resulta en

$$(9.0 - 7.0)(9.81)\text{ N} = (16\text{ kg})(a)$$

para el cual $a = 1.23\text{ m/s}^2$. Ahora se puede sustituir a por 1.23 m/s^2 en cualquiera de las dos ecuaciones y obtener $F_T = 77$ N.

3.31 [III] En la figura 3-21, el coeficiente de fricción cinética entre el bloque *A* y la mesa es 0.20. Además, $m_A = 25$ kg, $m_B = 15$ kg. ¿Cuánto bajará el cuerpo *B* en los primeros 3.0 s después de liberar el sistema?

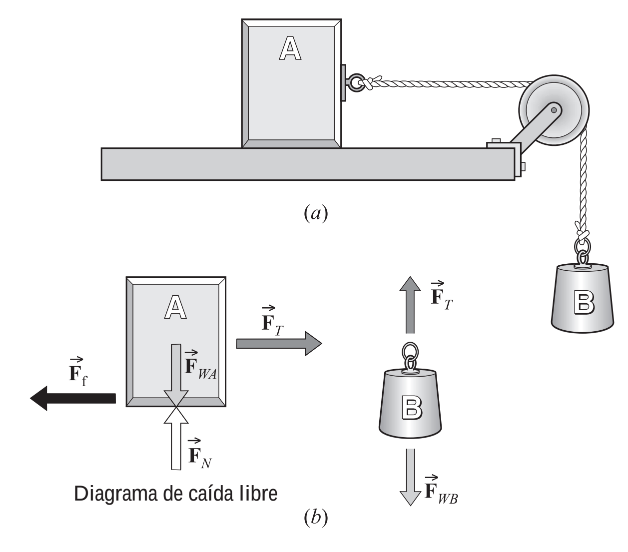


Figura 3-21

Como para el bloque *A* no hay movimiento vertical, la fuerza normal es

$$F_N = m_A g = (25\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 245\text{ N}$$

y
$$F_f = \mu_c F_N = (0.20)(245\text{ N}) = 49\text{ N}$$

En primer término se debe encontrar la aceleración del sistema para poder describir su movimiento. Aplique $F = ma$ a cada bloque. Al tomar la dirección del movimiento como positiva, se tiene

$$F_T - F_f = m_A a \qquad \text{o} \qquad F_T - 49\text{ N} = (25\text{ kg})(a)$$

y
$$m_B g - F_T = m_B a \qquad \text{o} \qquad -F_T + (15)(9.81)\text{ N} = (15\text{ kg})(a)$$

Se puede eliminar F_T sumando las dos ecuaciones. Entonces, al resolver para *a*, se encuentra que $a = 2.45\text{ m/s}^2$.

Ahora ya se puede trabajar el problema de movimiento con $a = 2.45\text{ m/s}^2$, $\upsilon_i = 0$, $t = 3.0$ s:

$$y = \upsilon_{iy} t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad \text{produce} \qquad y = 0 + \tfrac{1}{2}(2.45\text{ m/s}^2)(3.0\text{ s})^2 = 11\text{ m}$$

como la distancia que *B* baja en los primeros 3.0 s.

3.32 [II] En la figura 3-21, ¿qué tan grande debe ser la fuerza horizontal que tira del bloque A, además de F_T, para darle una aceleración de 0.75 m/s² *hacia la izquierda*? Suponga, como en el problema 3.31, que $\mu_c = 0.20$, $m_A = 25$ kg y $m_B = 15$ kg.

Si se dibujara nuevamente la figura 3-21 para este caso, se debe incluir una fuerza F que tira de A hacia la izquierda. Además, en el nuevo dibujo, la fuerza de fricción retardadora F_f debe estar en dirección contraria a la de la figura. Igual que en el problema 3.31, $F_f = 49$N.

Al escribir $F = ma$ para cada bloque, y tomar la dirección de movimiento como positiva, se tiene

$$F - F_T - 49 \text{ N} = (25 \text{ kg})(0.75 \text{ m/s}^2) \qquad \text{y} \qquad F_T - (15)(9.81) \text{ N} = (15 \text{ kg})(0.75 \text{ m/s}^2)$$

Resolviendo la última ecuación para F_T y sustituyendo en la ecuación anterior, se puede calcular el valor de F encontrando que éste es de 226 N o 0.23 kN.

3.33 [II] El coeficiente de fricción estático entre una caja y la plataforma de un camión es de 0.60. ¿Cuál es la máxima aceleración que puede tener el camión sobre un terreno nivelado si la caja no debe resbalar?

La caja experimenta una sola fuerza en dirección x, que es la fuerza de fricción. Cuando la caja está a punto de resbalar, $F_f = \mu_e F_W$, donde F_W es el peso de la caja.

Conforme el camión acelera, la fuerza de fricción proporciona a la caja la misma aceleración que tiene el camión; de otra forma, la caja resbalaría. Cuando ésta no resbala, $\Sigma F_x = ma_x$, aplicada a la caja da $F_f = ma_x$. Sin embargo, si la caja está a punto de deslizarse, $F_f = \mu_e F_W$ de modo que $\mu_e F_W = ma_x$. Como $F_W = mg$, esto da

$$a_x \frac{\mu_e mg}{m} = \mu_e g = (0.60)(9.81 \text{ m/s}^2) = 5.9 \text{ m/s}^2$$

como la máxima aceleración sin que exista deslizamiento.

3.34 [III] En la figura 3-22, las dos cajas tienen masas idénticas de 40 kg. Ambas experimentan una fuerza de fricción cinética con $\mu_c = 0.15$. Encuentre la aceleración de las cajas y la tensión en la cuerda que las une.

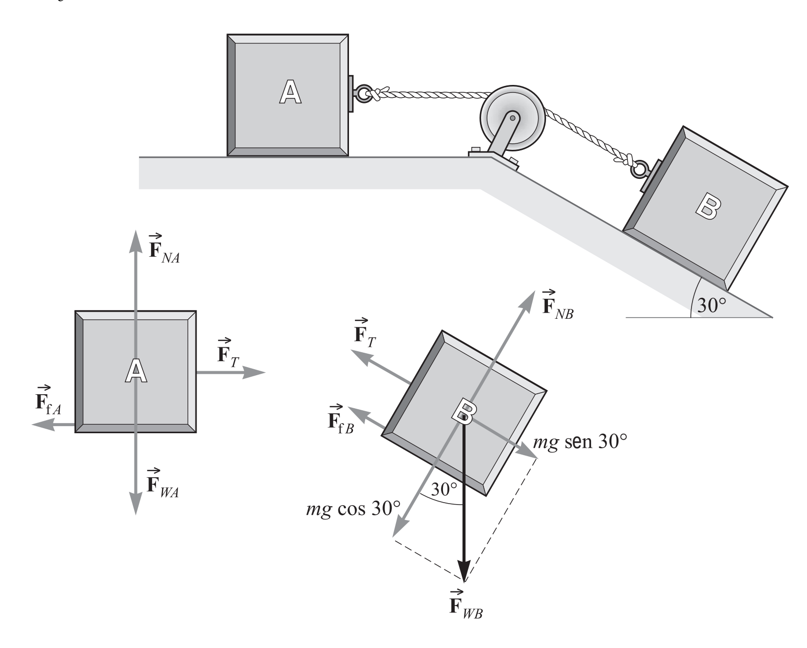


Figura 3-22

Usando $F_f = \mu_c F_N$, se encuentra que las fuerzas de fricción sobre las dos cajas son

$$F_{fA} = (0.15)(mg) \qquad \text{y} \qquad F_{fB} = (0.15)(0.87mg)$$

Pero $m = 40$ kg, de modo que $F_{fA} = 59$ N y $F_{fB} = 51$ N.

Ahora se aplica $\Sigma F_x = ma_x$ a cada bloque, tomando como positiva la dirección de movimiento. Esto da

$$F_T - 59 \text{ N} = (40 \text{ kg})(a) \qquad \text{y} \qquad 0.5mg - F_T - 51 \text{ N} = (40 \text{ kg})(a)$$

Al resolver estas dos ecuaciones para a y F_T se obtiene $a = 1.1 \text{ m/s}^2$ y $F_T = 0.10$ kN.

3.35 [III] En el sistema mostrado en la figura 3-23*a*, la fuerza F acelera al bloque m_1 hacia la derecha. Encuentre su aceleración en términos de F y del coeficiente de fricción μ_c entre las superficies de contacto.

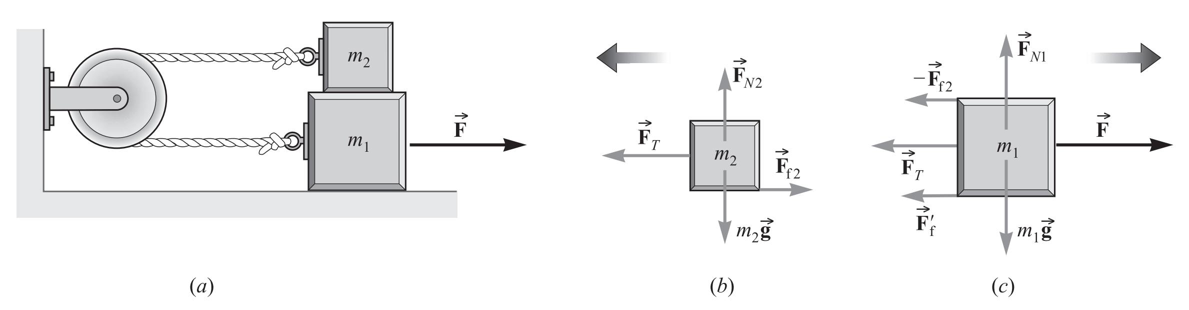


Figura 3-23

Las fuerzas horizontales sobre el bloque se muestran en la figuras 3-23*b* y *c*. El bloque m_2 presiona al m_1 con su peso, $m_2 g$. Ésta es la fuerza normal donde m_1 y m_2 están en contacto, entonces la fuerza de fricción es $F_{f2} = \mu_c m_2 g$. Sin embargo, en la superficie inferior de m_1, la fuerza normal es $(m_1 + m_2)g$. Por tanto, $F_f' = \mu_c(m_1 + m_2)g$. Ahora se escribe $\Sigma F_x = ma_x$ para cada bloque, tomando como positiva la dirección del movimiento:

$$F_T - \mu_c m_2 g = m_2 a \qquad \text{y} \qquad F - F_T - \mu m_2 g - \mu_c (m_1 + m_2)g = m_1 a$$

Se puede eliminar F_T sumando las dos ecuaciones para obtener

$$F - 2\mu_c m_2 g - \mu_c(m_1 + m_2)(g) = (m_1 + m_2)(a)$$

de donde
$$a = \frac{F - 2\mu_c m_2 g}{m_1 + m_2} - \mu_c g$$

3.36 [II] En el sistema de la figura 3-24, la fricción y la masa de la polea son despreciables. Encuentre la aceleración de m_2 si $m_1 = 300$ g, $m_2 = 500$ g y $F = 1.50$ N.

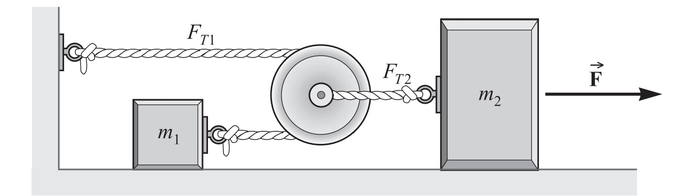


Figura 3-24

Nótese que m_1 tiene el doble de la aceleración que m_2 (cuando la polea se mueve una distancia d, m_1 se mueve una distancia $2d$). También observe que la tensión F_{T1} en la cuerda que jala a m_1 es la mitad de F_{T2} (tensión en la cuerda que jala a la polea), ya que la fuerza total sobre la polea debe ser cero. ($F = ma$ indica que esto es así, ya que la masa de la polea es cero.) Al escribir $\Sigma F_x = ma_x$ para cada masa, se tiene

$$F_{T1} = (m_1)(2a) \qquad \text{y} \qquad F - F_{T2} = m_2 a$$

Sin embargo, se sabe que $F_{T1} = \frac{1}{2} F_{T2}$ y la primera ecuación da $F_{T2} = 4m_1 a$. Sustituyendo en la segunda ecuación se obtiene

$$F = (4m_1 + m_2)(a) \qquad \text{o bien} \qquad a = \frac{F}{4m_1 + m_2} = \frac{1.50 \text{ N}}{1.20 \text{ kg} + 0.50 \text{ kg}} = 0.882 \text{ m/s}^2$$

3.37 [III] En la figura 3-25, los pesos de los objetos son 200 N y 300 N. Se considera que las poleas no tienen fricción y que sus masas son despreciables. La polea P_1 tiene un eje estacionario, la polea P_2 puede subir o bajar libremente. Calcule las tensiones F_{T1} y F_{T2}, así como la aceleración de cada cuerpo.

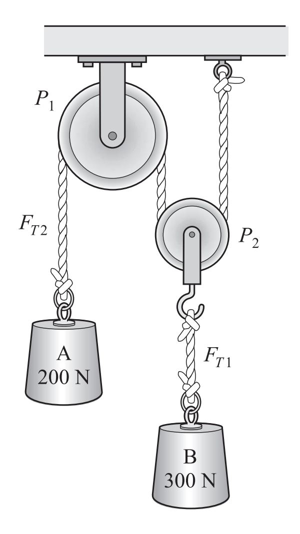


Figura 3-25

La masa *B* sube y la masa *A* baja. Esto se puede ver si se observa que las fuerzas que actúan sobre la polea P_2 son $2F_{T2}$ hacia arriba y F_{T1} hacia abajo. Como la polea no tiene masa, no puede tener aceleración, y por tanto $F_{T1} = 2F_{T2}$ (como la inercia de las poleas es despreciable, ésta únicamente transmite la tensión). La fuerza que tira hacia arriba al objeto *B* es dos veces la fuerza que actúa sobre *A*.

Sea *a* la aceleración descendente de *A*; entonces $a/2$ es la aceleración ascendente de *B*. (¿Por qué?) Ahora se escribe $\Sigma F_y = ma_y$ para cada masa, tomando como positiva la dirección del movimiento. Se tiene

$$F_{T1} - 300 \text{ N} = (m_B)(\tfrac{1}{2}a) \qquad \text{y} \qquad 200 \text{ N} - F_{T2} = m_A a$$

Pero $m = F_W/g$ entonces $m_A = (200/9.81)$ kg y $m_B = (300/9.81)$ kg. Además $F_{T1} = 2F_{T2}$. La sustitución de estos valores en las dos ecuaciones permite calcular F_{T2}, F_{T1} y *a*. Los resultados son

$$F_{T1} = 327.27 \text{ N o } 327 \text{ N} \qquad F_{T2} = 163.64 \text{ o } 164 \text{ N} \qquad a = 1.78 \text{ m/s}^2$$

3.38 [II] Calcule la masa de la Tierra, suponiendo que es una esfera de radio 6 370 km. Dé su respuesta con tres cifras significativas.

Sea *M* la masa de la Tierra, y *m* la masa de un cierto objeto próximo a la superficie terrestre. El peso del objeto es igual a *mg*, el cual es igual a la fuerza gravitacional $G(Mm)/r^2$, donde *r* es el radio de la Tierra. Entonces,

$$mg = G\frac{Mm}{r^2}$$

de donde

$$M = \frac{gr^2}{G} = \frac{(9.81 \text{ m/s}^2)(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

3.39 [I] Dos fuerzas actúan sobre un objeto en un punto del modo siguiente: 100 N en 170.0° y 100 N en 50.0°. Determine su resultante. **Resp.** 100 N en 110°.

3.40 [I] Calcule de manera algebraica la resultante de las siguientes fuerzas coplanares: 100 N en 30°, 141.4 N en 45° y 100 N en 240°. Compruebe el resultado de manera gráfica. **Resp.** 0.15 kN en 25°.

3.41 [I] Dos fuerzas, de 80 N y 100 N, que actúan en un ángulo de 60° entre sí, atraen un objeto. *a*) ¿Qué fuerza única reemplazaría a las dos fuerzas? *b*) ¿Qué fuerza única (llamada la *equilibrante*) equilibraría las dos fuerzas? Resuelva de manera algebraica. **Resp.** *a*) $\vec{\mathbf{R}}$: 0.16 kN en 34° con la fuerza de 80 N; *b*) $-\vec{\mathbf{R}}$: 0.16 kN en 214° con la fuerza de 80 N.

3.42 [I] Determine de manera algebraica *a*) la resultante y *b*) la equilibrante (consulte el problema 1.26) de las fuerzas coplanares siguientes: 300 N en exactamente 0°, 400 N en 30° y 400 N en 150°. **Resp.** *a*) 0.50 kN en 53°; *b*) 0.50 kN en 233°.

3.43 [I] Un niño evita que un vagón ruede hacia abajo por unas vías inclinadas a 20° de la horizontal. Si el vagón pesa 150 N, ¿con cuál fuerza debe el niño jalar la manija si ésta se encuentra paralela al plano inclinado? **Resp.** 51 N.

3.44 [II] Repita el problema 3.43 con la manija a un ángulo de 30° por encima del plano inclinado. **Resp.** 59 N.

3.45 [I] Una vez encendido, el motor de un cohete pequeño en una nave espacial ejerce una fuerza constante de 10 N durante 7.80 s. Durante el encendido, el cohete hace que la nave de 100 kg acelere de manera uniforme. Determine esa aceleración. **Resp.** 0.10 m/s^2.

3.46 [II] Una bala suele salir de una pistola normal calibre 45 (cañón de 5.0 in) con una rapidez de 262 m/s. Si tarda 1 ms en atravesar el cañón, determine la aceleración promedio experimentada por la bala de 16.2 g dentro del arma y luego calcule la fuerza promedio ejercida sobre ella. **Resp.** 3×10^5 m/s^2; 0.4×10^2 N.

3.47 [I] Una fuerza actúa sobre una masa de 2 kg y le provoca una aceleración de 3 m/s^2. ¿Qué aceleración produce la misma fuerza al actuar sobre una masa de *a*) 1 kg? *b*) 4 kg? *c*) ¿Cuánto mide la fuerza?
Resp. *a*) 6 m/s^2; *b*) 2 m/s^2; *c*) 6 N.

3.48 [I] Un objeto tiene una masa de 300 g. *a*) ¿Cuánto pesa en la Tierra? *b*) ¿Cuál es su masa en la Luna? *c*) ¿Cuál será su aceleración en la Luna cuando una fuerza resultante de 0.500 N actúe sobre él?
Resp. *a*) 2.94 N; *b*) 0.300 kg; *c*) 1.67 m/s^2.

3.49 [I] Un cable horizontal jala un carro de 200 kg por una pista horizontal. La tensión en el cable es de 500 N. Si al principio está en reposo, *a*) ¿Cuánto tardará el carro en alcanzar una rapidez de 8.0 m/s? *b*) ¿Cuánta distancia habrá recorrido? **Resp.** *a*) 3.2 s; *b*) 13 m.

3.50 [II] Un automóvil de 900 kg recorre 20 m/s en un camino nivelado. ¿Cuánta fuerza retardadora constante se requiere para detenerlo en una distancia de 30 m? (*Sugerencia*: Determine primero su desaceleración.)
Resp. 6.0 kN.

3.51 [II] Después de estar en reposo, una bala de 12.0 g acelera con una rapidez de 700 m/s mientras viaja 20.0 cm en el cañón de un arma. Si supone que la aceleración es constante, ¿cuánto mide la fuerza de la aceleración? (*Tenga cuidado con las unidades*.) **Resp.** 14.7 kN.

3.52 [II] Una caja de madera de 20 kg cuelga en el extremo de una cuerda larga. Encuentre su aceleración (magnitud y dirección) cuando la tensión en la cuerda es de *a*) 250 N, *b*) 150 N, *c*) cero, *d*) 196 N. (Considere el valor de la aceleración de la gravedad igual a 9.8 m/s^2.) **Resp.** *a*) 2.7 m/s^2 hacia arriba; *b*) 2.3 m/s^2 hacia abajo; *c*) 9.8 m/s^2 hacia abajo; *d*) cero.

3.53 [II] Una masa de 5.0 kg cuelga en el extremo de una cuerda. Encuentre la tensión en la cuerda si la aceleración de la masa es *a*) 1.5 m/s^2 hacia arriba, *b*) 1.5 m/s^2 hacia abajo, *c*) 9.8 m/s^2 hacia abajo. (Considere el valor de la aceleración de la gravedad igual a 9.8 m/s^2). **Resp.** *a*) 57 N; *b*) 42 N; *c*) cero.

3.54 [II] Un hombre de 700 N está de pie sobre una báscula en el piso de un elevador. La báscula registra la fuerza que ejerce sobre cualquier cosa que esté en ella. ¿Cuánto lee la báscula si el elevador tiene una aceleración de *a*) 1.8 m/s^2 hacia arriba? *b*) 1.8 m/s^2 hacia abajo? *c*) 9.8 m/s^2 hacia abajo? (Considere el valor de la aceleración de la gravedad igual a 9.8 m/s^2.) **Resp.** *a*) 0.83 kN; *b*) 0.57 kN; *c*) cero.

3.55 [II] Con la báscula descrita en el problema 3.54, un astronauta de 65 kg se pesa en la Luna, en donde $g = 1.60$ m/s^2. ¿Cuánto lee la báscula? **Resp.** 104 N.

3.56 [II] Una cuerda que pasa sobre una polea sin fricción ni masa tiene atado un objeto de 4.0 kg en un extremo y un objeto de 12 kg en el otro extremo. Calcule la aceleración y la tensión en la cuerda. (Considere el valor de la aceleración de la gravedad igual a 9.8 m/s^2.) **Resp.** 4.9 m/s^2, 59 N.

3.57 [II] Un elevador parte del reposo con una aceleración constante hacia arriba. Avanza 2.0 m en los primeros 0.60 s. Un usuario del elevador sostiene un paquete de 3.0 kg con una cuerda vertical. ¿Cuánta tensión tiene la cuerda durante el proceso de aceleración? **Resp.** 63 N.

3.58 [II] Justo cuando se abre su paracaídas, una paracaidista de 60 kg cae con una rapidez de 50 m/s. Después de transcurridos 0.80 s, el paracaídas está completamente abierto y su rapidez disminuye a 12.0 m/s. Encuentre

la fuerza retardadora promedio ejercida en la paracaidista durante este tiempo si la desaceleración es uniforme. El peso del paracaídas es de 12.379 kg. **Resp.** 2 850 N + 588 N = 3 438 N = 3.4 kN.

3.59 [II] Una masa de 300 g cuelga en el extremo de una cuerda. Una segunda cuerda cuelga desde la parte inferior de esa masa y sostiene una masa de 900 g. *a*) Encuentre la tensión en cada cuerda cuando las masas aceleran hacia arriba a 0.700 m/s^2. *b*) Encuentre la tensión en cada cuerda cuando la aceleración es de 0.700 m/s^2 hacia abajo. **Resp.** *a*) 12.6 N y 9.45 N; *b*) 10.9 N y 8.19 N.

3.60 [II] Un vagón de 20 kg es jalado a nivel del suelo por una cuerda inclinada 30° sobre la horizontal. Una fuerza de fricción de 30 N se opone al movimiento. ¿Cuánto mide la fuerza de atracción si el vagón se mueve con *a*) una rapidez constante y *b*) una aceleración de 0.40 m/s^2? **Resp.** *a*) 35 N; *b*) 44 N.

3.61 [II] Una caja de 12 kg es liberada desde la parte superior de un plano inclinado que mide 5.0 m y hace un ángulo de 40° con la horizontal. Una fuerza de fricción de 60 N impide el movimiento de la caja. *a*) ¿Cuál será la aceleración de la caja? *b*) ¿Cuánto tardará en llegar a la parte inferior del plano inclinado?
Resp. *a*) 1.3 m/s^2; *b*) 2.8 s.

3.62 [II] Para la situación resumida en el problema 3.61, ¿cuál es el coeficiente de fricción entre la caja y el plano inclinado? **Resp.** 0.67.

3.63 [II] Un plano inclinado hace un ángulo de 30° con la horizontal. Encuentre la fuerza constante, aplicada paralela al plano, requerida para hacer que una caja de 15 kg se deslice *a*) hacia arriba en el plano con una aceleración de 1.2 m/s^2 y *b*) hacia abajo en el plano inclinado con una aceleración de 1.2 m/s^2. No considere las fuerzas de la fricción. **Resp.** *a*) 92 N; *b*) 56 N.

3.64 [II] Se ejerce una fuerza horizontal *F* sobre una caja de 20 kg para deslizarla hacia arriba por un plano inclinado de 30°. La fuerza de fricción que retarda el movimiento es de 80 N. ¿Cuánto debe medir *F* si la aceleración de la caja al moverse será *a*) cero y *b*) 0.75 m/s^2? **Resp.** *a*) 0.21 kN; *b*) 0.22 kN.

3.65 [II] Un plano inclinado que hace un ángulo de 25° con la horizontal tiene una polea en su parte superior. Un bloque de 30 kg sobre el plano está conectado a un bloque de 20 kg que cuelga libre mediante una cuerda que pasa sobre la polea. Calcule la distancia que caerá el bloque de 20 kg en 2.0 s si parte del reposo. No tome en cuenta la fricción. **Resp.** 2.9 m.

3.66 [III] Repita el problema 3.65 con un coeficiente de fricción de 0.20 entre el bloque y el plano. **Resp.** 0.74 m.

3.67 [III] Se requiere una fuerza horizontal de 200 N para hacer que un bloque de 15 kg se deslice hacia arriba en un plano inclinado a 20° con una aceleración de 25 cm/s^2. Encuentre *a*) la fuerza de fricción sobre el bloque y *b*) el coeficiente de fricción. **Resp.** *a*) 0.13 kN; *b*) 0.65.

3.68 [II] Calcule la aceleración de los bloques de la figura 3-26 si las fuerzas de fricción son despreciables. ¿Cuál es la tensión en la cuerda que los une? **Resp.** 3.3 m/s^2, 13 N.

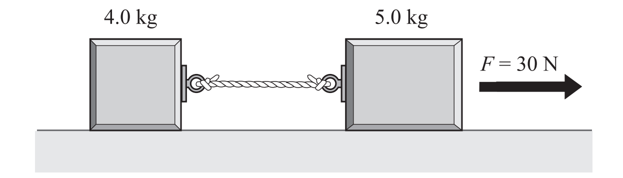


Figura 3-26

3.69 [III] Repita el problema 3.68 si el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y la mesa es de 0.30.
Resp. 0.39 m/s^2, 13 N.

3.70[III] ¿Qué fuerza *F* se necesita en la figura 3-27 para tirar del bloque de 6.0 kg con una aceleración de 1.50 m/s^2 si el coeficiente de fricción en sus superficies es de 0.40? **Resp.** 48 N.

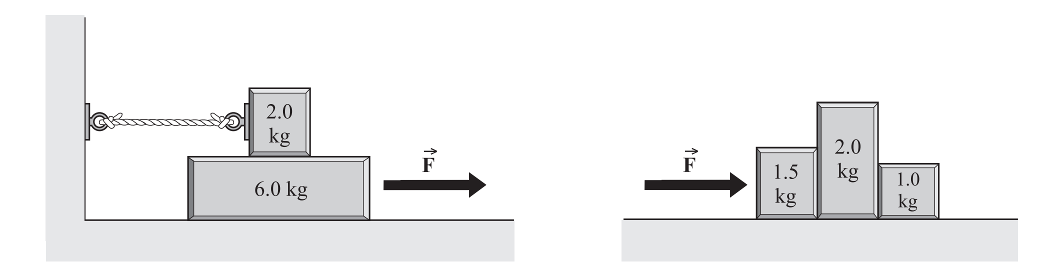


Figura 3-27 **Figura 3-28**

3.71 [III] En la figura 3-28, ¿qué fuerza se necesita para dar a los bloques una aceleración de 3.0 m/s² si el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y la mesa es de 0.20? ¿Qué fuerza ejerce el bloque de 1.50 kg sobre el bloque de 2.0 kg? **Resp.** 22 N, 15 N.

3.72 [III] *a*) ¿Cuál es la fuerza más pequeña paralela a un plano inclinado de 37° necesaria para impedir que un peso de 100 N resbale hacia abajo si los coeficientes de fricción estática y cinética son ambos de 0.30? *b*) ¿Qué fuerza paralela se requiere para hacer que el peso se mueva hacia arriba del plano con rapidez constante? *c*) Si la fuerza paralela de empuje es de 94 N, ¿cuál será la aceleración del objeto? *d*) Si el objeto en *c*) parte del reposo, ¿cuánto se moverá en 10 s? **Resp.** *a*) 36 N; *b*) 84 N; *c*) 0.98 m/s² hacia arriba por el plano; *d*) 49 m.

3.73 [III] Un bloque de 5.0 kg descansa sobre un plano inclinado de 30°. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano inclinado es de 0.20. ¿Qué fuerza horizontal se necesita para empujar al bloque si éste debe estar a punto de resbalar *a*) hacia arriba sobre el plano y *b*) hacia abajo sobre el plano?
Resp. *a*) 43 N; *b*) 16.6 N.

3.74 [III] Tres bloques de masas 6.0 kg, 9.0 kg y 10 kg están unidos como se muestra en la figura 3-29. El coeficiente de fricción entre la mesa y el bloque de 10 kg es de 0.20. Calcule *a*) la aceleración del sistema y *b*) la tensión en la cuerda de la izquierda y la tensión en la cuerda de la derecha. **Resp.** *a*) 0.39 m/s²; *b*) 61 N, 85 N.

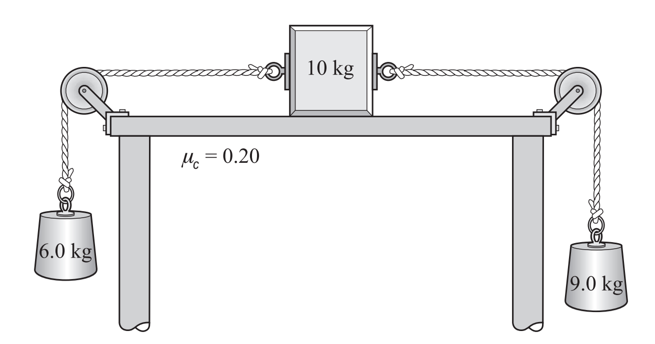


Figura 3-29

3.75 [II] El radio de la Tierra es de aproximadamente 6 370 km. Un objeto que tiene una masa de 20 kg se lleva a una altura de 160 km sobre la superficie de la Tierra. *a*) ¿Cuál es la masa del objeto a esta altura? *b*) ¿Cuánto pesa el objeto (es decir, cuánta fuerza gravitacional experimenta) a esta altura? **Resp.** *a*) 20 kg; *b*) 0.19 kN.

3.76 [II] El radio de la Tierra es de aproximadamente 6 370 km, mientras que el de Marte es más o menos de 3 440 km. Si un objeto pesa 200 N en la Tierra, ¿cuál será su peso y cuál la aceleración debida a la gravedad en Marte? La masa de Marte es 0.11 veces la de la Tierra. **Resp.** 75 N, 3.7 m/s².

EQUILIBRIO BAJO LA ACCIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES

4

LAS FUERZAS CONCURRENTES son todas las fuerzas cuyas líneas de acción pasan a través de un punto común. Las fuerzas que actúan sobre un objeto puntual son concurrentes porque todas ellas pasan a través del mismo punto, que es el objeto puntual.

UN OBJETO ESTÁ EN EQUILIBRIO bajo la acción de fuerzas concurrentes, siempre que no se esté acelerando.

LA PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO requiere que $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0$, o bien, en forma de componentes, que

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$$

Es decir, la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el objeto debe ser cero. Esta condición es suficiente para el equilibrio cuando las fuerzas externas son concurrentes. Una segunda condición debe satisfacerse si el objeto permanece en equilibrio bajo la acción de fuerzas no concurrentes; esto se estudiará en el capítulo 5.

MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (FUERZAS CONCURRENTES):

1. Aísle el objeto por estudiar.
2. Muestre, en un diagrama, las fuerzas que actúan sobre el cuerpo aislado (*diagrama de cuerpo libre*).
3. Encuentre las componentes rectangulares de cada fuerza.
4. Escriba la primera condición de equilibrio en forma de ecuación.
5. Resuelva para determinar las cantidades requeridas.

EL PESO DE UN OBJETO ($\vec{\mathbf{F}}_W$) es la fuerza con que la gravedad tira al cuerpo hacia abajo.

LA FUERZA DE TENSIÓN ($\vec{\mathbf{F}}_T$) es la fuerza que actúa sobre una cuerda, un cable o una cadena (o, de hecho, sobre cualquier miembro estructural) y que tiende a alargarlo. La magnitud escalar de la fuerza de tensión es la *tensión* (F_T).

FUERZA DE FRICCIÓN ($\vec{\mathbf{F}}_f$) es una fuerza tangencial que actúa sobre un objeto que se opone al deslizamiento del objeto a través de una superficie adyacente con la que está en contacto. La fuerza de fricción es paralela a la superficie y opuesta, en sentido, a su movimiento o del movimiento inminente.

LA FUERZA NORMAL ($\vec{\mathbf{F}}_N$) sobre un objeto que descansa por una superficie es la componente de la fuerza de soporte que es perpendicular a la superficie.

POLEAS: Cuando un sistema de varias poleas ligeras sin fricción tiene una cuerda simple continua alrededor de él, la tensión en *cada trozo de la cuerda* es igual a la fuerza aplicada al extremo de la cuerda (F) por algún agente externo. Así, cuando la carga es soportada por N trozos de esta cuerda, la fuerza neta entregada a la cuerda, la fuerza suministrada, es NF. Con frecuencia, la polea adjunta a la carga se mueve con la carga y sólo es necesario contar el número de trozos de la cuerda (N) que actúan sobre dicha polea para determinar la fuerza suministrada.

PROBLEMAS RESUELTOS

4.1 [II] En la figura 4-1*a* la tensión en la cuerda horizontal es de 30 N. Encuentre el peso del objeto.

La tensión de la cuerda 1 es igual al peso del cuerpo que cuelga de ella. Por tanto $F_{T1} = F_W$ y se requiere encontrar F_{T1} o F_W.

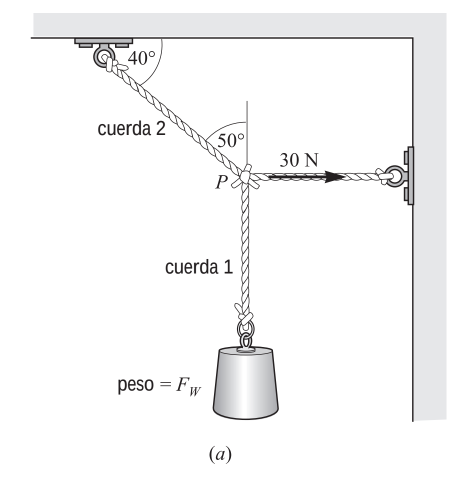
Note que la fuerza desconocida F_{T1} y la conocida de 30 N actúan ambas sobre el nudo en el punto P. Así pues, tiene sentido aislar el nudo en P como objeto de estudio. La figura 4-1*b* muestra el diagrama de cuerpo libre del nudo. Las componentes de las fuerzas también se muestran en el diagrama.

A continuación se establece la primera condición de equilibrio para el nudo. Del diagrama de cuerpo libre,

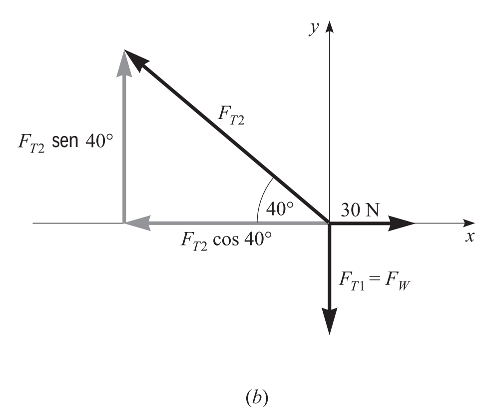
$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad \text{se convierte en} \quad 30\text{ N} - F_{T2}\cos 40^\circ = 0$$

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad \text{se convierte en} \quad F_{T2}\text{ sen } 40^\circ - F_W = 0$$

Al resolver la primera ecuación se encuentra que $F_{T2} = 39.2$ N. Al sustituir este valor en la segunda ecuación se obtiene $F_W = 25$ N como el peso del objeto.



(*a*)



(*b*)

Figura 4-1

4.2 [II] Una cuerda se extiende entre dos postes. Un joven de 90 N se cuelga de la cuerda como se muestra en la figura 4-2*a*. Encuentre las tensiones en las dos secciones de la cuerda.

Las tensiones se denotan por F_{T1} y F_{T2}; se aísla la cuerda en la porción que comprende las manos del joven. El diagrama de cuerpo libre para el objeto de estudio se muestra en la figura 4-2*b*.

Después de determinar las componentes de las fuerzas que se muestran, puede escribirse la primera condición de equilibrio:

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \quad \text{se convierte en} \quad F_{T2}\cos 5.0^\circ - F_{T1}\cos 10^\circ = 0$$

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0 \quad \text{se convierte en} \quad F_{T2}\text{ sen } 5.0^\circ + F_{T1}\text{ sen } 10^\circ - 90\text{ N} = 0$$

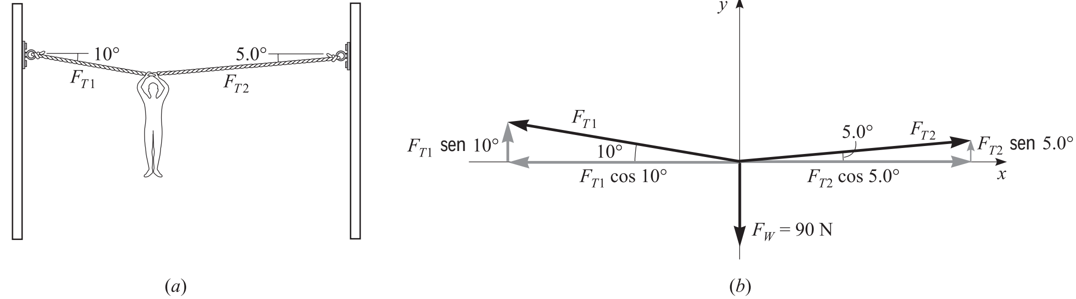
Al evaluar los senos y los cosenos las ecuaciones se convierten en

$$9.996F_{T2} - 0.985F_{T1} = 0 \qquad \text{y} \qquad 0.087F_{T2} + 0.174F_{T1} - 90 = 0$$

Resolviendo la primera para F_{T2} se encuentra $F_{T2} = 0.990F_{T1}$. Sustituyendo este valor en la segunda, se obtiene

$$0.086F_{T1} + 0.174F_{T1} - 90 = 0$$

de donde $F_{T1} = 0.35$ kN. Luego entonces, ya que $F_{T2} = 0.990F_{T1}$, se tiene que $F_{T2} = 0.34$ kN.



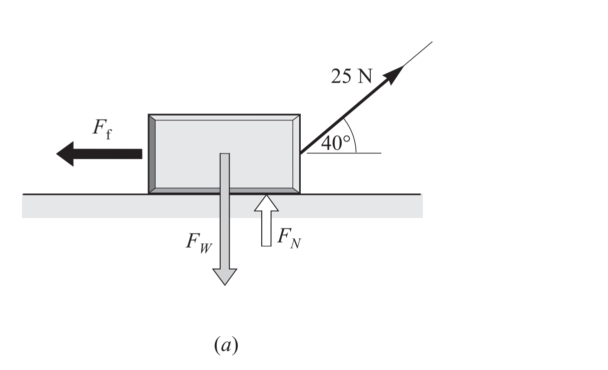
(*a*) (*b*)

Figura 4-2

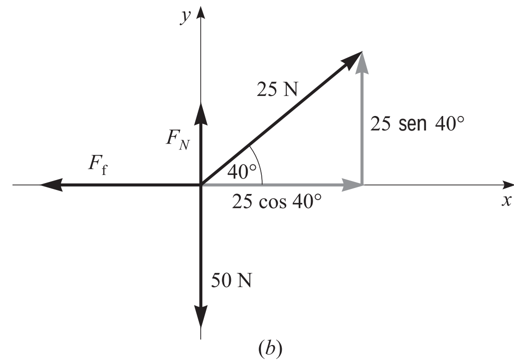
4.3 [II] Una caja de 50 N se desliza sobre el piso con rapidez constante por medio de una fuerza de 25 N, como se muestra en la figura 4-3*a*. *a*) ¿Cuál es el valor de la fuerza de fricción que se opone al movimiento de la caja? *b*) ¿Cuál es el valor de la fuerza normal? *c*) Determine μ_c entre la caja y el piso.

Advierta que las fuerzas que actúan sobre la caja se muestran en la figura 4-3*a*. La fuerza de fricción es F_f y la fuerza normal, la fuerza de soporte ejercida por el piso, es F_N. El diagrama de cuerpo libre y las componentes de las fuerzas se muestran en la figura 4-3*b*. Ya que la caja se mueve con velocidad constante, se encuentra en equilibrio. La primera condición de equilibrio, tomando a la derecha como positivo, dice que

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad 25 \cos 40° - F_f = 0$$



(*a*)



(*b*)

Figura 4-3

a) Es posible resolver para encontrar el valor de la fuerza de fricción $F_f = 19.2$ N o bien, con dos cifras significativas, $F_f = 19$ N.

b) Para determinar la fuerza normal F_N se usa

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_N + 25 \text{ sen } 40° - 50 = 0$$

El valor que se obtiene para la fuerza normal es $F_N = 33.9$ N o bien, con dos cifras significativas, $F_N = 34$ N.

c) De la definición de μ_c se tiene

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{19.2 \text{ N}}{33.9 \text{ N}} = 0.57$$

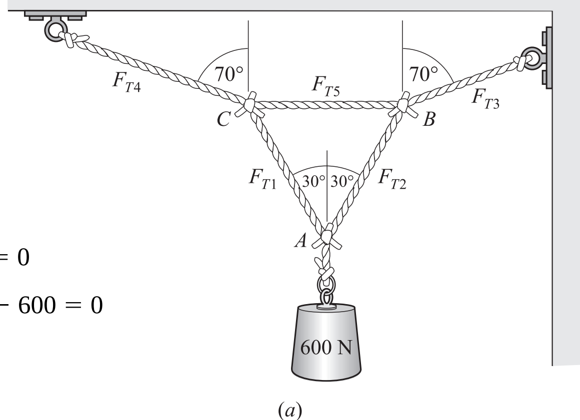
4.4 [II] Determine las tensiones de las cuerdas que se muestran en la figura 4-4*a*, si el objeto soportado pesa 600 N.

Se escoge el nudo *A* como el objeto ya que se conoce una de las fuerzas que actúan sobre él. El peso actúa sobre el objeto verticalmente hacia abajo con una fuerza de 600 N, de modo que el diagrama de cuerpo libre para el nudo es como se muestra en la figura 4-4*b*. Al aplicar la primera condición de equilibrio para este diagrama de cuerpo libre, se obtiene

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T2} \cos 60° - F_{T1} \cos 60° = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T1} \text{ sen } 60° + F_{T2} \text{ sen } 60° - 600 = 0$$

De la primera ecuación se encuentra que $F_{T1} = F_{T2}$. (Esto se puede inferir de la simetría del sistema. También por simetría, $F_{T3} = F_{T4}$). Sustituyendo F_{T1} por F_{T2} en la segunda ecuación se obtiene que $F_{T1} = 346$ N y por tanto $F_{T2} = 346$ N también.



(*a*)

Figura 4-4 (*continúa*)

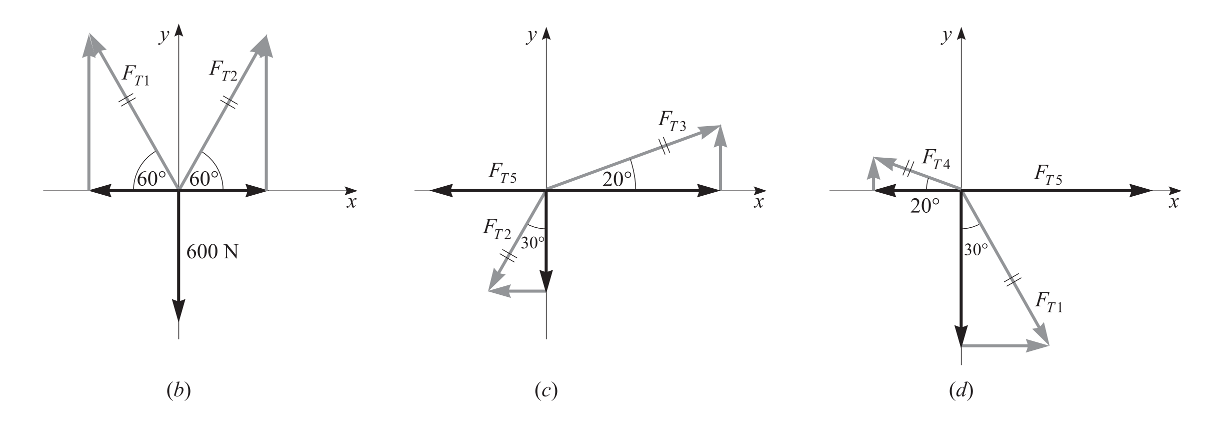


Figura 4-4 (*continuación*)

Ahora se aísla el nudo *B* como objeto de estudio. El diagrama de cuerpo libre correspondiente se muestra en la figura 4-4*c*. Anteriormente se determinó que F_{T2} = 346 N o 0.35 kN y, en consecuencia, las ecuaciones de equilibrio son

$$\overset{+}{\rightarrow}\sum F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T3}\cos 20° - F_{T5} - 346 \text{ sen } 30° = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{T3}\text{ sen } 20° - 346\cos 30° = 0$$

De la última ecuación se tiene F_{T3} = 877 N o 0.88 kN. Al sustituir este valor en la ecuación previa se obtiene F_{T5} = 651 N o 0.65 kN. Como se mencionó anteriormente, por simetría, $F_{T4} = F_{T3}$ = 877 N o 0.88 kN. ¿Podría determinar el valor de F_{T4} sin el recurso de simetría? (*Sugerencia*: Vea la figura 4-4*d*.)

4.5 [I] Los objetos de la figura 4-5 están en equilibrio. Determine el valor de la fuerza normal F_N en cada caso.

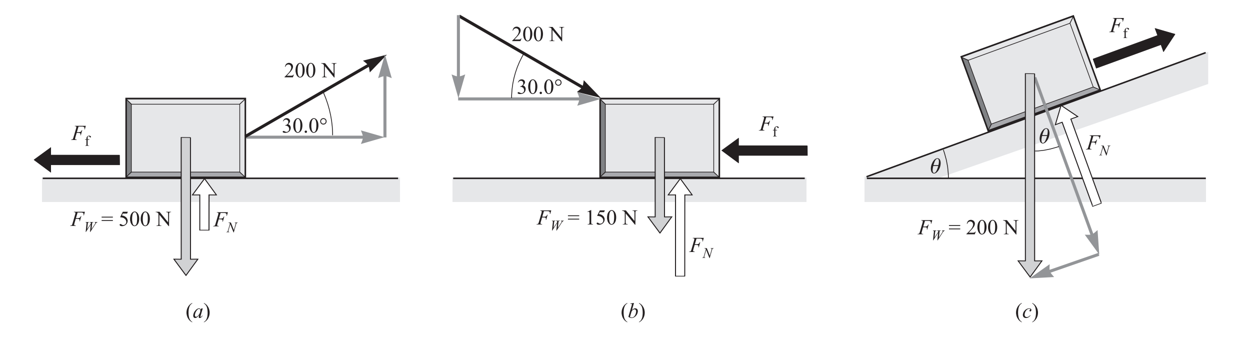


Figura 4-5

Aplique $\sum F_y = 0$ en cada caso.

a)	$F_N + (200\text{ N})\text{ sen } 30.0° - 500 = 0$	de donde	$F_N = 400$ N
b)	$F_N - (200\text{ N})\text{ sen } 30.0° - 150 = 0$	de donde	$F_N = 250$ N
c)	$F_N - (200\text{ N})\cos\theta = 0$	de donde	$F_N = (200\cos\theta)$ N

4.6 [I] Para las situaciones del problema 4.5, determine el coeficiente de fricción cinética si el objeto se mueve con rapidez constante. Redondee sus respuestas a dos cifras significativas.

Ya se encontró la fuerza normal F_N para cada caso del problema 4.5. Para calcular el valor de F_f, la fuerza de fricción de deslizamiento, se usará $\sum F_x = 0$. Posteriormente se usará la definición de μ_c.

a) Se tiene $200\cos 30.0° - F_f = 0$, de modo que F_f = 173 N. Por tanto, $\mu_c = F_f/F_N = 173/400 = 0.43$.

b) Se tiene $200\cos 30.0° - F_f = 0$, de modo que F_f = 173 N. Por tanto, $\mu_c = F_f/F_N = 173/250 = 0.69$.

c) Se tiene $-200\text{ sen }\theta + F_f = 0$, de modo que $F_f = (200\text{ sen }\theta)$ N. Por tanto, $\mu_c = F_f/F_N = (200\text{ sen }\theta)/(200\cos\theta) = \tan\theta$.

4.7 [II] Suponga que el bloque que se encuentra en la figura 4-5*c* está en reposo. El ángulo del plano se aumenta lentamente. A un ángulo $\theta = 42°$, el bloque comienza a deslizarse. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano inclinado? (El bloque y la superficie no son los mismos de los problemas 4.5 y 4.6.)

En el instante en que el bloque empieza a deslizarse, la fricción tiene su valor máximo. Por tanto, $\mu_e = F_f/F_N$ en ese instante. Siguiendo el método de los problemas 4.5 y 4.6 se tiene

$$F_N = F_W \cos\theta \qquad \text{y} \qquad F_f = F_W \operatorname{sen}\theta$$

En consecuencia, cuando justamente se inicia el deslizamiento,

$$\mu_e = \frac{F_f}{F_N} = \frac{F_W \operatorname{sen}\theta}{F_W \cos\theta} = \tan\theta$$

Pero experimentalmente se encontró que θ es 42°. Por tanto $\mu_e = \tan 42° = 0.90$.

4.8 [II] Jalado por un bloque de 8.0 N, como se muestra en la figura 4-6*a*, un bloque de 20 N se desliza hacia la derecha con velocidad constante. Calcule μ_c entre el bloque y la mesa. Suponga que la fricción en la polea es despreciable.

Dado que el bloque de 20 N se mueve con velocidad constante, éste se encuentra en equilibrio. Como la fricción en la polea es despreciable, la tensión en la cuerda continua es la misma en ambos lados de la polea. Por tanto, $F_{T1} = F_{T2} = 8.0$ N.

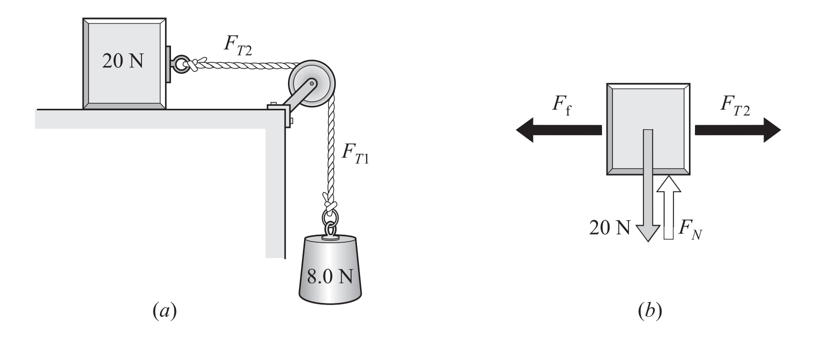


Figura 4-6

Al analizar el diagrama de cuerpo libre en la figura 4-6*b* y recordar que el bloque está en equilibrio, se tiene

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_f = F_{T2} = 8.0 \text{ N}$$

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_N = 20 \text{ N}$$

Entonces, a partir de la definición de μ_c,

$$\mu_c = \frac{F_f}{F_N} = \frac{8.0 \text{ N}}{20 \text{ N}} = 0.40$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

4.9 [I] La carga que aparece en la figura 4-7 cuelga en reposo. Todas las cuerdas están verticales y las poleas no tienen peso ni fricción. *a*) ¿Cuántos segmentos de la cuerda soportan la combinación de la polea y la cuerda inferior? *b*) ¿Cuál es la tensión en la cuerda que se enreda en las poleas? *c*) ¿Cuánta fuerza ejerce la persona? *d*) ¿Cuánta fuerza actúa hacia abajo sobre el gancho del techo? **Resp.** *a*) 2; *b*) 100 N; *c*) 100 N; *d*) 300 N.

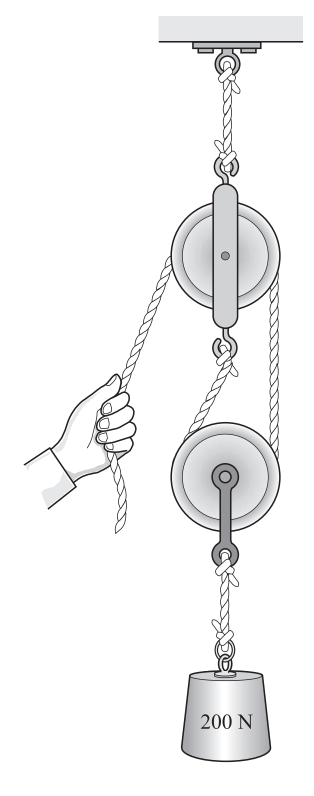


Figura 4-7

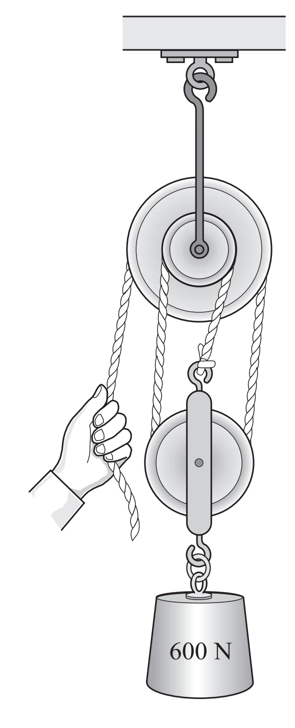


Figura 4-8

4.10 [I] En la figura 4-8 aparece una carga de 600 N que cuelga sin movimiento. Suponga que las cuerdas están todas verticales y que las poleas no tienen fricción ni peso. *a*) ¿Cuál es la tensión en el gancho inferior unido, mediante un anillo, a la carga? *b*) ¿Cuántas partes de la cuerda soportan la polea móvil? *c*) ¿Cuál es la tensión a lo largo de la cuerda? *d*) ¿Cuánta fuerza aplica la persona? *e*) ¿Cuánta fuerza actúa hacia abajo en el techo? **Resp.** *a*) 600 N; *b*) 3; *c*) 200 N; *d*) 200 N; *e*) 800 N.

4.11 [I] Para la situación mostrada en la figura 4-9, encuentre los valores de F_{T1} y F_{T2} si el peso del objeto es de 600 N. **Resp.** 503 N, 783 N.

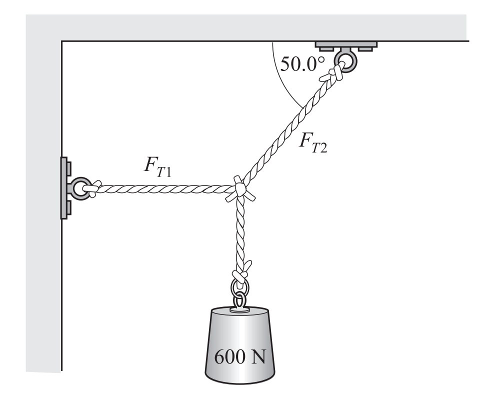


Figura 4-9

4.12 [I] Las fuerzas coplanares siguientes tiran sobre un anillo: 200 N a 30.0°, 500 N a 80.0°, 300 N a 240° y una fuerza desconocida. Encuentre la fuerza y la dirección de la fuerza desconocida si el anillo está en equilibrio. **Resp.** 350 N a 252°.

4.13 [II] En la figura 4-10 las poleas no tienen fricción y el sistema cuelga en equilibrio. Si F_{W3}, el peso del objeto ubicado a la derecha, es de 200 N, ¿cuáles son los valores de F_{W1} y F_{W2}? **Resp.** 260 N, 150 N.

4.14 [II] Suponga que F_{W1} de la figura 4-10 es de 500 N. Encuentre los valores de F_{W2} y F_{W3} si el sistema cuelga en equilibrio como se muestra. **Resp.** 288 N, 384 N.

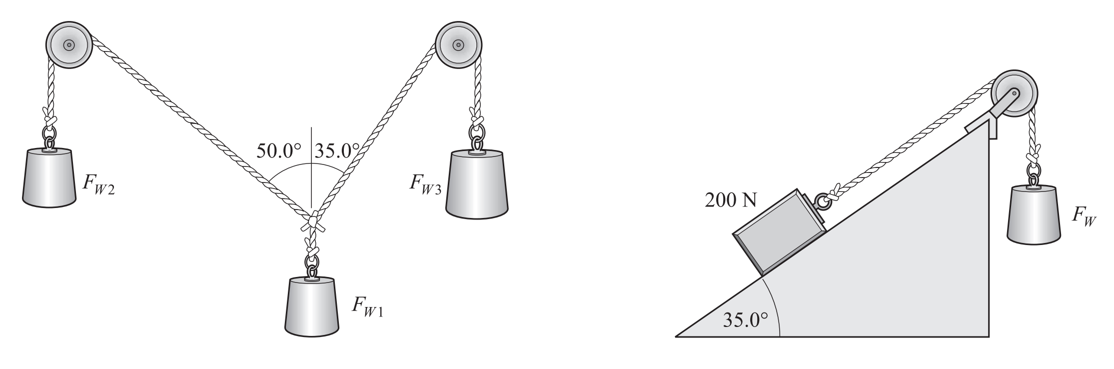


Figura 4-10 **Figura 4-11**

4.15 [I] En la figura 4-11, ¿cuánto debe pesar el objeto que está a la derecha si el bloque de 200 N permanece en reposo y la fricción entre el bloque y la pendiente es despreciable? **Resp.** 115 N.

4.16 [II] El sistema de la figura 4-11 permanece en reposo cuando F_W = 220 N. ¿Cuáles son la magnitud y dirección de la fuerza de fricción en el bloque de 200 N? **Resp.** 105 en la superficie de la pendiente.

4.17 [II] Encuentre la fuerza normal que actúa sobre el bloque en cada una de las situaciones de equilibrio que se muestran en la figura 4-12. **Resp.** *a*) 34 N; *b*) 46 N; *c*) 91 N.

4.18 [II] El bloque que se muestra en la figura 4-12*a* se desliza con una rapidez constante bajo la acción de la fuerza mostrada. *a*) ¿Cuán grande es la fuerza de fricción retardadora? *b*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie? **Resp.** *a*) 12 N; *b*) 0.34.

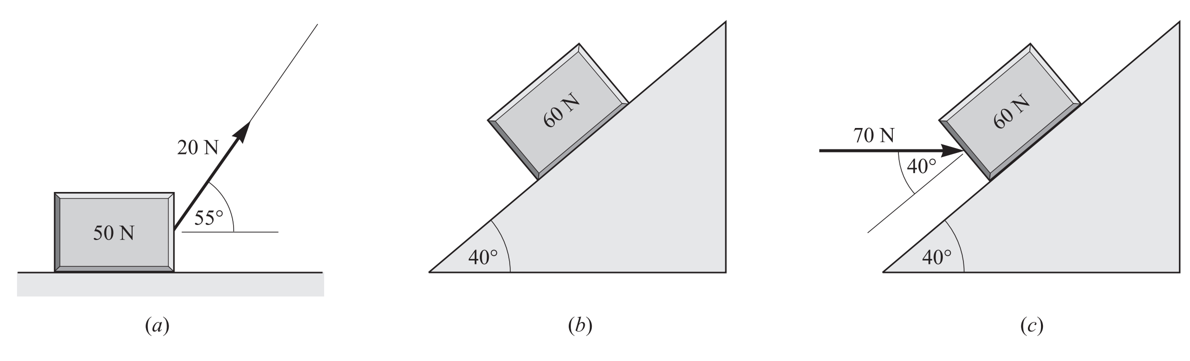


Figura 4-12

4.19 [II] El bloque que se muestra en la figura 4-12*b* se desliza hacia abajo con rapidez constante. *a*) ¿De cuánto es la fuerza de fricción que se opone a su movimiento? *b*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción de deslizamiento (cinética) entre el bloque y el plano? **Resp.** *a*) 39 N; *b*) 0.84.

4.20 [II] El bloque de la figura 4-12*c* empieza a deslizarse hacia arriba de la pendiente cuando la fuerza de empuje mostrada se incrementa a 70 N. *a*) ¿Cuál es la fuerza de fricción estática máxima sobre él? *b*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción estática? **Resp.** *a*) 15 N; *b*) 0.17.

4.21 [II] Si F_W = 40 N en la situación de equilibrio que se muestra en la figura 4-13, encuentre F_{T1} y F_{T2}.
Resp. 58 N, 31 N.

4.22[III] Observe la situación de equilibrio de la figura 4-13. Las cuerdas son lo suficientemente fuertes como para soportar una tensión máxima de 80 N. ¿Cuál es el valor mayor de F_W que pueden soportar tal como se muestra? **Resp.** 55 N.

4.23[III] El objeto de la figura 4-14 está en equilibrio y tiene un peso $F_W = 80$ N. Encuentre F_{T1}, F_{T2}, F_{T3} y F_{T4}. Dé las respuestas con dos cifras significativas. **Resp.** 37 N, 88 N, 77 N, 0.14 kN.

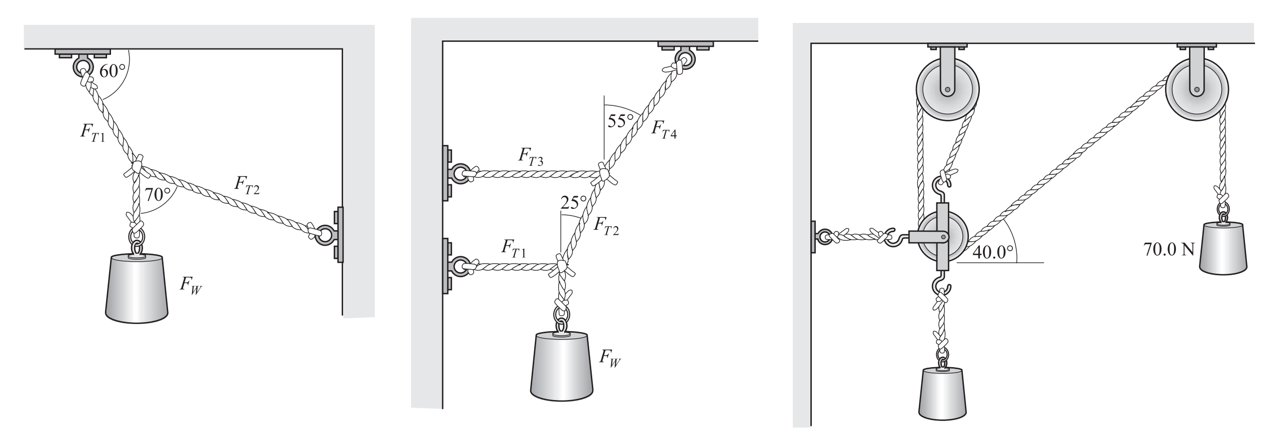


Figura 4-13 **Figura 4-14** **Figura 4-15**

4.24 [III] Las poleas que se muestran en la figura 4-15 tienen peso y fricción despreciables. ¿Cuál es el valor de F_W si el sistema está en equilibrio? **Resp.** 185 N.

4.25 [III] El sistema de la figura 4-16 está en equilibrio. *a*) ¿Cuál es el máximo valor que puede tener F_W, si la fuerza de fricción sobre el bloque de 40 N no puede exceder de 12.0 N? *b*) ¿Cuál es el valor del coeficiente de fricción estática entre el bloque y la mesa? **Resp.** *a*) 6.9 N; *b*) 0.30.

4.26 [III] El sistema de la figura 4-16 está a punto de deslizarse. Si $F_W = 8.0$ N, ¿cuál es el valor del coeficiente de fricción estática entre el bloque y la mesa? **Resp.** 0.35.

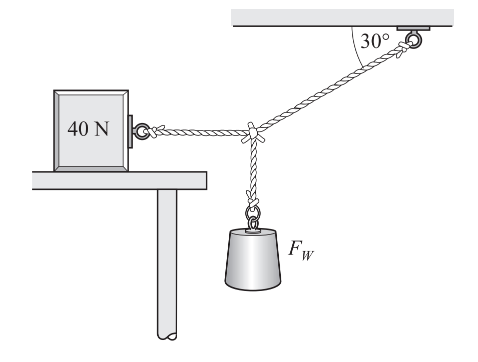


Figura 4-16

EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO BAJO LA ACCIÓN DE FUERZAS COPLANARES

5

LA TORCA (O MOMENTO DE TORSIÓN) (τ) alrededor de un eje, debida a una fuerza, es una medida de la efectividad de la fuerza para que ésta produzca una rotación alrededor de un eje. La torca se define de la siguiente forma:

$$\text{Torca} = \tau = rF \text{ sen } \theta$$

donde r es la distancia radial desde el eje al punto de aplicación de la fuerza y θ es el ángulo agudo entre las direcciones de $\vec{\mathbf{r}}$ y de $\vec{\mathbf{F}}$, como se muestra en la figura 5-1*a*. Con frecuencia, esta definición se escribe en términos del *brazo de palanca* de la fuerza, que es la distancia perpendicular desde el eje a la línea de acción de la fuerza, como se muestra en la figura 5-1*b*. Como el brazo de palanca es igual a r sen θ, la ecuación de la torca se reescribe como

$$\tau = (F) \text{ (brazo de palanca)}$$

Las unidades de la torca son newton-metro (N · m). La torca puede ser positiva o negativa; es positiva cuando la rotación alrededor del eje es en sentido opuesto al movimiento de las manecillas del reloj y negativa cuando la rotación es en el mismo sentido en que se mueven las manecillas del reloj.

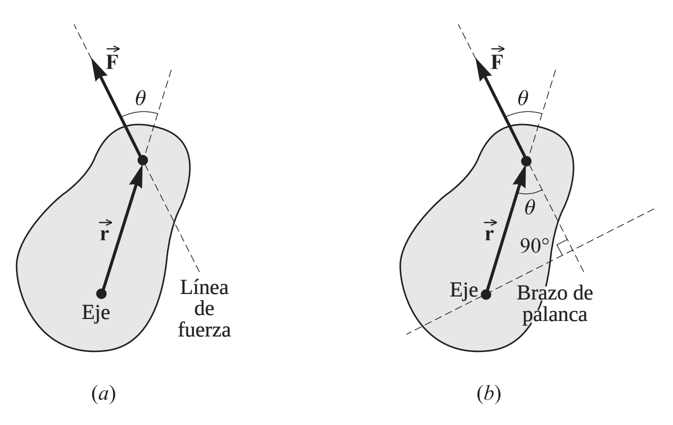


Figura 5-1

LAS DOS CONDICIONES PARA EL EQUILIBRIO de un cuerpo rígido bajo la acción de *fuerzas coplanares* son:

1. La *primera* o *condición de la fuerza*: La suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo debe ser cero:

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0$$

   donde se ha tomado al plano *xy* como el plano de las fuerzas coplanares.

2. La *segunda* o *condición de la torca*: Tome un eje perpendicular al plano de las fuerzas coplanares. Todas las torcas que tienden a producir una rotación en el sentido del reloj considérelas como negativas, y las que producen una rotación contra el sentido del reloj, como positivas; la suma de todas las torcas que actúan sobre el objeto debe ser cero:

$$\circlearrowleft^{+} \Sigma \tau = 0$$

EL CENTRO DE GRAVEDAD de un objeto es el punto en el cual se puede considerar que está concentrado todo su peso; esto es, la línea de acción del peso pasa por el centro de gravedad. Una sola fuerza vertical y dirigida hacia arriba, igual en magnitud al peso del objeto y aplicada en el centro de gravedad, mantendrá al cuerpo en equilibrio.

LA POSICIÓN DE LOS EJES ES ARBITRARIA: Si la suma de las torcas es cero en torno a un eje determinado para un cuerpo que cumple la condición de fuerza, será cero para todo eje paralelo al primero. Generalmente se escoge el eje de tal forma que la línea de acción de la fuerza desconocida pase por la intersección del eje de rotación y el plano de las fuerzas. Entonces el ángulo θ entre $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{F}}$ es cero; en consecuencia, dicha fuerza desconocida particular ejerce una torca cero y por tanto no aparece en la ecuación de la torca.

PROBLEMAS RESUELTOS

5.1 [I] Calcule la torca alrededor del eje A (que es perpendicular a la página) en la figura 5-2 debida a cada una de las fuerzas indicadas.

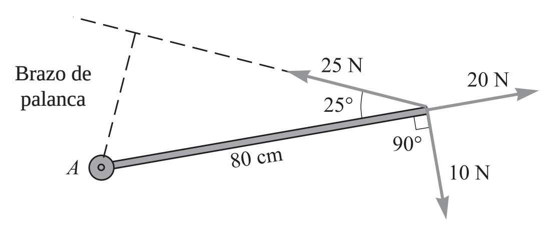


Figura 5-2

Al utilizar la ecuación $\tau = rF$ sen θ, recuerde que una torca en el sentido del reloj es negativa y las torcas contrarreloj son positivas. La torca de cada una de las tres fuerzas es

Para 10 N: $\tau = -\,(0.80 \text{ m})(10 \text{ N})(\text{sen } 90°) = -8.0 \text{ N} \cdot \text{m}$

Para 25 N: $\tau = +\,(0.80 \text{ m})(25 \text{ N})(\text{sen } 25°) = +8.5 \text{ N} \cdot \text{m}$

Para 20 N: $\tau = \pm\,(0.80 \text{ m})(20 \text{ N})(\text{sen } 0°) = 0$

La línea de acción de la fuerza de 20 N pasa por el eje y por tanto $\theta = 0°$. Expresándolo de otra forma, si la línea de acción de la fuerza pasa por el eje, entonces su brazo de palanca es cero. De cualquier forma, la torca es cero para esta (y cualquier otra) fuerza cuya línea de acción pase por el eje.

5.2 [II] Una viga metálica uniforme de longitud L pesa 200 N y sostiene un objeto de 450 N como se muestra en la figura 5-3. Calcule la magnitud de las fuerzas que ejercen sobre la viga las columnas de apoyo colocadas en los extremos. Suponga que las longitudes son exactas.

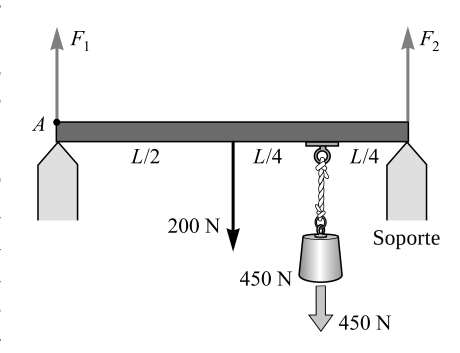


Figura 5-3

En lugar de dibujar por separado los diagramas de cuerpo libre, se muestran en la figura 5-3 las fuerzas que actúan sobre la viga. Como la viga es uniforme, su centro de gravedad se localiza en su centro geométrico. Por esta razón se muestra el peso de la viga (200 N) actuando sobre su centro. Las fuerzas F_1 y F_2 son las reacciones de las columnas de apoyo sobre la viga. Como no existen fuerzas en la dirección x que actúen sobre la viga, solamente hay que escribir dos ecuaciones para esta condición de equilibrio: $\Sigma F_y = 0$ y $\Sigma\tau = 0$.

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{se convierte en} \qquad F_1 + F_2 - 200 \text{ N} - 450 \text{ N} = 0$$

Antes de escribir la ecuación de la torca, se debe escoger un eje. Se escoge en el punto A, de tal forma que la fuerza desconocida F_1 pase por éste y no ejerza torca alguna. Entonces la ecuación de la torca es

$$\circlearrowleft\!+\ \Sigma\tau = -(L/2)(200 \text{ N})(\text{sen } 90°) - (3L/4)(450 \text{ N})(\text{sen } 90°) + LF_2 \text{ sen } 90° = 0$$

Al dividir la ecuación entre L y resolver para F_2, se encuentra que $F_2 = 438$ N.

Para calcular el valor de F_1, se sustituye el valor de F_2 en la ecuación de las fuerzas y se obtiene $F_1 = 212$ N.

5.3 [II] Un tubo uniforme de 100 N se utiliza como palanca, como se muestra en la figura 5-4. ¿Dónde se debe colocar el fulcro (punto de apoyo) si un peso de 500 N colocado en un extremo se debe balancear con uno de 200 N colocado en el otro extremo? ¿Cuál es la fuerza de reacción que ejerce el punto de apoyo en el tubo?

En la figura 5-4 se muestran las fuerzas, donde F_R es la fuerza de reacción que ejerce el apoyo sobre el tubo. Suponga que el punto de apoyo se encuentra a una distancia x de uno de los extremos. Considere que el eje se encuentra en el punto de apoyo. Entonces la ecuación de la torca, $\circlearrowleft\!+\ \Sigma\,\tau = 0$, se escribe como

$$+(x)(200\text{ N})(\text{sen }90°) + (x - \text{L}/2)(100\text{ N})(\text{sen }90°) - (L - x)(500\text{ N})(\text{sen }90°) = 0$$

Al simplificar

$$(800\text{ N})(x) = (550\text{ N})(L)$$

de donde $x = 0.69L$. El punto de apoyo se debe colocar a 0.69 del extremo donde se encuentra la carga más ligera.

La carga F_R que soporta el apoyo se encuentra con la ecuación $+\!\uparrow \Sigma\,F_y = 0$ y se obtiene

$$-200\text{ N} - 100\text{ N} - 500\text{ N} + F_R = 0$$

de donde $F_R = 800$ N.

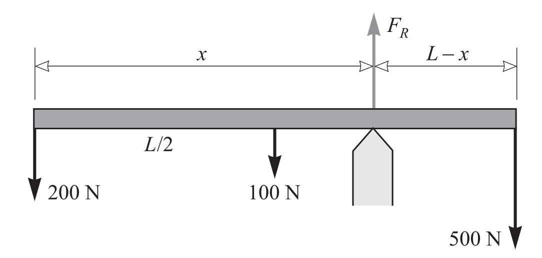


Figura 5-4

5.4 [II] ¿En qué punto de una pértiga rígida, uniforme y horizontal de 100 N se debe colgar un objeto de 0.80 kN, de tal forma que una niña, colocada en uno de los extremos, sostenga un tercio de lo que soporta una mujer colocada en el otro extremo?

En la figura 5-5 se muestra un esquema de las fuerzas. La fuerza que ejerce la niña se denota por F, y la de la mujer por $3F$. Tome el eje de giro en el extremo izquierdo. Con esta suposición, la ecuación de la torca es

$$-(x)(800\text{ N})(\text{sen }90°) - (L/2)(100\text{ N})(\text{sen }90°) + (L)(F)(\text{sen }90°) = 0$$

La segunda ecuación que se puede escribir es $\Sigma\,F_y = 0$, o bien

$$3F - 800\text{ N} - 100\text{ N} + F = 0$$

de donde $F = 225$ N. Sustituyendo este valor en la ecuación de la torca se obtiene

$$(800\text{ N})(x) = (225\text{ N})(L) - (100\text{ N})(L/2)$$

de donde $x = 0.22L$. La carga se debe colgar a 0.22 medido desde el extremo donde se encuentra parada la mujer.

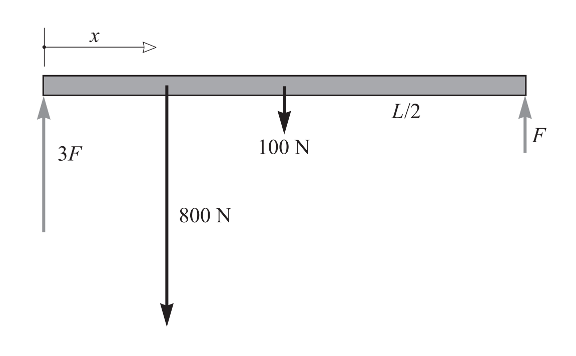


Figura 5-5

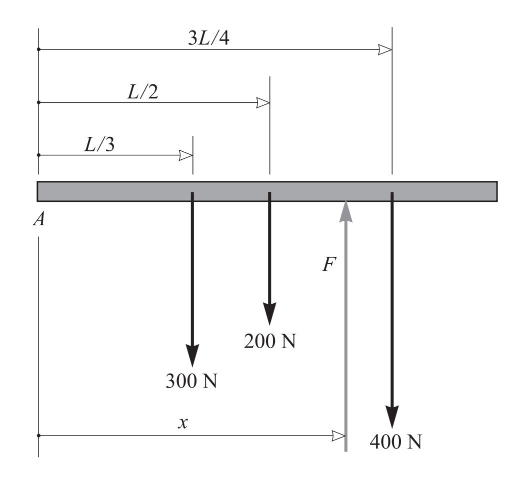


Figura 5-6

5.5 [II] En un tablón uniforme de 0.20 kN y longitud L se cuelgan dos objetos: 300 N a $L/3$ de un extremo, y 400 N a $3L/4$ a partir del mismo extremo. ¿Qué otra fuerza debe aplicarse para que el tablón se mantenga en equilibrio?

En la figura 5-6 se muestran las fuerzas que actúan sobre el tablón, donde F es la fuerza que se desea encontrar. $\Sigma\,F_y = 0$ es la condición de equilibrio; por tanto,

$$F = 400\text{ N} + 200\text{ N} + 300\text{ N} = 900\text{ N}$$

Como el tablón debe estar en equilibrio, se tiene libertad de escoger el eje de rotación en cualquier punto. Sea éste el punto A. Entonces $\Sigma\,\tau = 0$ da:

$$+(x)(F)(\text{sen } 90°) - (3L/4)(400\text{ N})(\text{sen } 90°) - (L/2)(200\text{ N})(\text{sen } 90°) - (L/3)(300\text{ N})(\text{sen } 90°) = 0$$

Utilizando $F = 900$ N, se determina que $x = 0.56L$. La fuerza requerida es de 0.90 kN hacia arriba a $0.56L$ del extremo izquierdo.

5.6 [II] La escuadra (regla de ángulo recto) que se muestra en la figura 5-7 cuelga en reposo de una clavija. Está fabricada con una hoja de metal uniforme. Uno de los brazos tiene una longitud de L cm y el otro tiene $2L$ cm de longitud. Calcule (a dos cifras significativas) el ángulo θ que forma cuando está colgada.

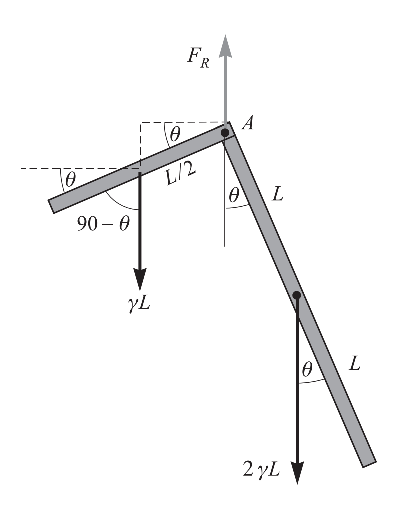


Figura 5-7

Si la escuadra no es muy ancha, se puede considerar que está formada por dos barras delgadas de longitudes L y $2L$, unidas perpendicularmente en el punto A. Sea γ el peso de cada centímetro de la escuadra. En la figura 5-7 se indican las fuerzas que actúan sobre la escuadra, donde F_R es la fuerza de reacción hacia arriba de la clavija.

Considere el punto A como eje para escribir la ecuación de la torca. Ya que $\tau = rF \text{ sen } \theta$ y como la torca en A debida a F_R es cero, la ecuación de la torca queda como sigue

$$+(L/2)(\gamma L)[\text{sen }(90° - \theta)] - (L)(2\gamma L)(\text{sen } \theta) = 0$$

Recuerde que $\text{sen }(90° - \theta) = \cos\theta$. Después de sustituir y dividir entre $2\gamma L^2 \cos\theta$, se obtiene

$$\frac{\text{sen } \theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{1}{4}$$

y da como resultado $\theta = 14°$.

5.7 [II] Examine el diagrama que se muestra en la figura 5-8*a*. La viga uniforme de 0.60 kN está sujeta a un gozne en el punto P. Calcule la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza de reacción que ejerce el gozne sobre la viga. Dé sus respuestas con dos cifras significativas.

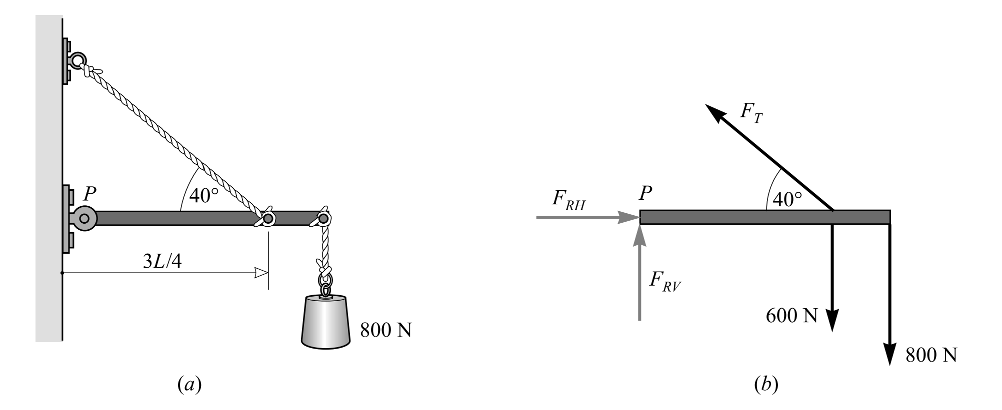


Figura 5-8

Las fuerzas sobre la viga se indican en la figura 5-8*b*, donde la fuerza ejercida por el gozne se representa mediante sus componentes, F_{RH} y F_{RV}. La ecuación de la torca tomando P como eje es

$$+(3L/4)(F_T)(\text{sen } 40°) - (L)(800\text{ N})(\text{sen } 90°) - (L/2)(600\text{ N})(\text{sen } 90°) = 0$$

(Se tomó el eje en P porque entonces F_{RH} y F_{RV} no aparecen en la ecuación de la torca.) Al resolver esta ecuación se obtiene $F_T = 2\,280$ N, o bien, con dos cifras significativas, $F_T = 2.3$ kN.

F_{RH} y F_{RV} se calculan con las siguientes ecuaciones:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad -F_T \cos 40^\circ + F_{RH} = 0$$

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_T \text{ sen } 40^\circ + F_{RV} - 600 - 800 = 0$$

Como F_T es conocida, estas ecuaciones dan $F_{RH} = 1\ 750$ N o 1.8 kN y $F_{RV} = 65.6$ N o 66 N.

5.8 [II] Un asta de densidad uniforme y 0.40 kN está suspendida como se muestra en la figura 5-9*a*. Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza que ejerce el pivote en *P* sobre el asta.

Las fuerzas que actúan sobre el asta se muestran en la figura 5-9*b*. Tome el pivote como eje. La ecuación de la torca es la siguiente

$$+(3L/4)(F_T)(\text{sen } 50^\circ) - (L/2)(400 \text{ N})(\text{sen } 40^\circ) - (L)(2\ 000 \text{ N})(\text{sen } 40^\circ) = 0$$

de donde $F_T = 2\ 460$ N o 2.5 kN. Ahora se escribe:

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{RII} - F_T = 0$$

por tanto, $F_{RH} = 25$ kN. Además

$$\Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{RV} - 2\ 000 \text{ N} - 400 \text{ N} = 0$$

entonces $F_{RV} = 2.4$ kN. F_{RH} y F_{RV} son las componentes de la fuerza de reacción en el pivote. La magnitud de esta fuerza es

$$\sqrt{(2\ 400)^2 + (2\ 400)^2} = 3.4 \text{ kN}$$

La tangente del ángulo que forma con la horizontal es tan $\theta = 2\ 400/2\ 460$, de donde $\theta = 44^\circ$.

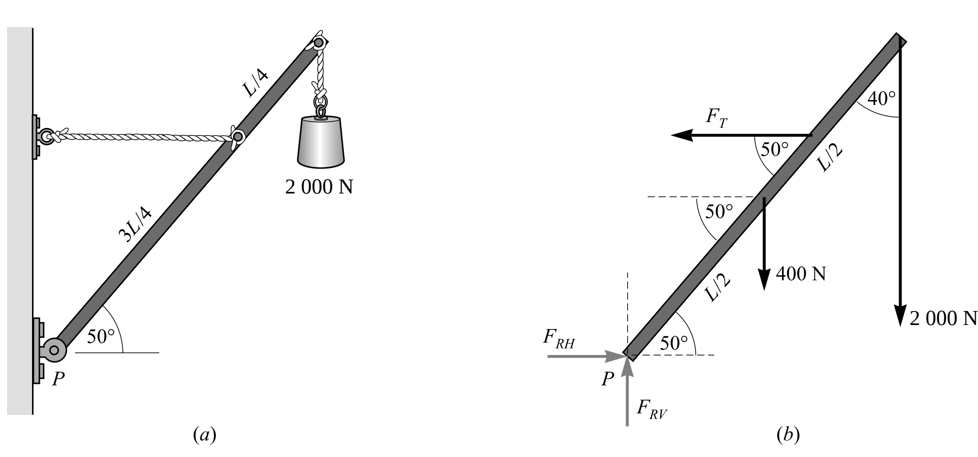


Figura 5-9

5.9 [III] En la figura 5-10, las bisagras *A* y *B* mantienen una puerta uniforme de 400 N en su lugar. La bisagra superior sostiene todo el peso de la puerta. Calcule las fuerzas ejercidas en las bisagras sobre la puerta. El ancho de la puerta es $h/2$, donde *h* es la separación entre las bisagras.

Las fuerzas que actúan sobre la puerta se muestran en la figura 5-10. Sólo una fuerza horizontal actúa en *B*, pues se supone que la bisagra superior sostiene todo el peso de la puerta. Tome las torcas considerando el punto *A* como eje.

$$\circlearrowleft\!+ \Sigma \tau = 0 \qquad \text{se convierte en}$$

$$+(h)(F)(\text{sen } 90.0^\circ) - (h/4)(400 \text{ N})(\text{sen } 90.0^\circ) = 0$$

de donde $F = 100$ N. También

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F - F_{RII} = 0$$

$$+\!\uparrow \Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{RV} - 400 \text{ N} = 0$$

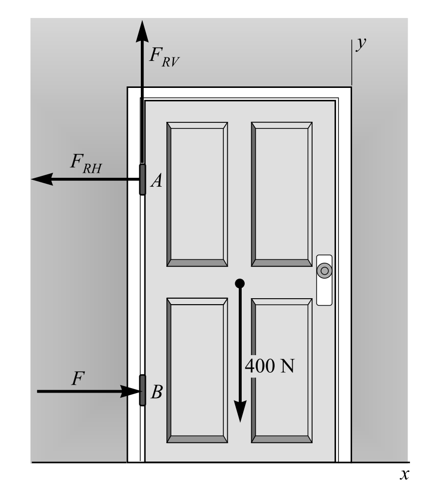


Figura 5-10

De estas ecuaciones se calcula $F_{RH} = 100$ N y $F_{RV} = 400$ N.

Para la fuerza de reacción resultante F_R en la bisagra A, se tiene

$$F_R = \sqrt{(400)^2 + (100)^2} = 412 \text{ N}$$

La tangente del ángulo que $\vec{\mathbf{F}}_R$ forma con la dirección negativa del eje x es F_{RV}/F_{RH} y por ende el ángulo es

$$\arctan 4.00 = 76.0°$$

5.10 [II] Una escalera se recarga contra una pared lisa, como se muestra en la figura 5-11. (Por pared "lisa" se debe entender que la pared sólo ejerce sobre la escalera una fuerza que es perpendicular a la pared. No existe fuerza de fricción.) La escalera pesa 200 N y su centro de gravedad está a 0.40L desde el pie y a lo largo de la escalera, L es la longitud de la escalera. *a*) ¿Cuál debe ser la magnitud de la fuerza de fricción al pie de la escalera para que ésta no resbale? *b*) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática?

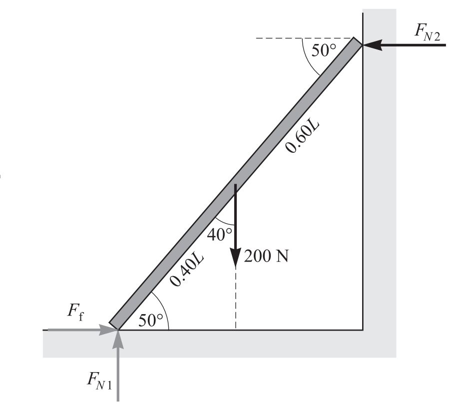


Figura 5-11

a) Se desea encontrar la fuerza de fricción F_f. Note que no existe fuerza de fricción en la parte superior de la escalera. Tomando las torcas alrededor del punto A se obtiene la ecuación de torcas

$$\circlearrowleft\!\!+\ \Sigma\tau_A = -(0.40L)(200 \text{ N})(\text{sen } 40°) + (L)(F_{N2})(\text{sen } 50°) = 0$$

Al resolver se obtiene $F_{N2} = 67.1$ N. También se puede escribir

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \text{o} \qquad F_f - F_{N2} = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad \text{o} \qquad F_{N1} - 200 = 0$$

Por tanto, $F_f = 67$ N y $F_{N1} = 0.20$ kN.

b)

$$\mu_e = \frac{F_f}{F_{N1}} = \frac{67.1}{200} = 0.34$$

5.11 [III] Para el diagrama de la figura 5-12*a*, calcule F_{T1}, F_{T2} y F_{T3}. El poste es uniforme y pesa 800 N.

En primer término, aplique la condición de fuerza en equilibrio al punto A. En la figura 5-12*b* se muestra el diagrama de cuerpo libre. Se tiene

$$F_{T2} \cos 50.0° - 2\,000 \text{ N} = 0 \qquad \text{y} \qquad F_{T1} - F_{T2} \text{ sen } 50.0° = 0$$

De la primera ecuación se encuentra $F_{T2} = 3.11$ kN; y al sustituir en la segunda ecuación se obtiene $F_{T1} = 2.38$ kN.

Aísle el poste y aplique las condiciones de equilibrio. En la figura 5-12*c* se muestra el diagrama de cuerpo libre. La ecuación de la torca, para las torcas alrededor del punto C, es

$$\circlearrowleft\!\!+\ \Sigma\tau_c = +(L)(F_{T3})(\text{sen } 20.0°) - (L)(3\,110 \text{ N})(\text{sen } 90.0°) - (L/2)(800 \text{ N})(\text{sen } 40.0°) = 0$$

Al resolver para F_{T3}, se encuentra que tiene una magnitud de 9.84 kN. Si fuera necesario, se pueden calcular F_{RH} y F_{RV} utilizando las ecuaciones en x y y de la fuerza.

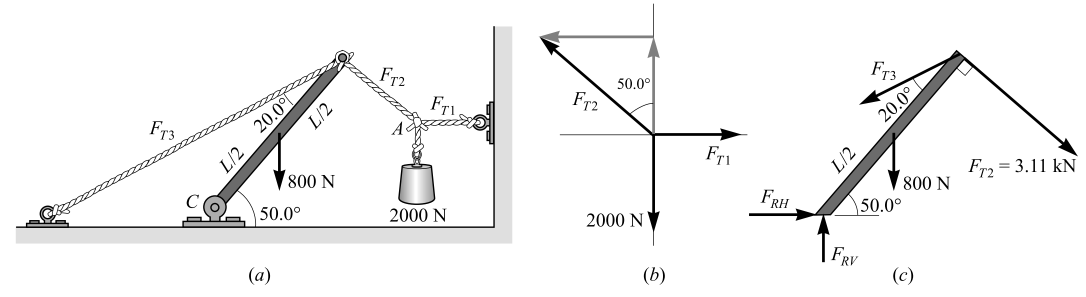


Figura 5-12

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

5.12 [II] Como se muestra en la figura 5-13, dos personas están sentadas en un carro que pesa 8 000 N. La persona en el frente pesa 700 N y la que se encuentra en la parte posterior pesa 900 N. Sea L la separación entre las llantas delanteras y las traseras. El centro de gravedad se localiza a una distancia de $0.400L$ detrás de las llantas delanteras. ¿Qué fuerza soporta cada una de las llantas delanteras y cada una de las traseras si las personas están sentadas sobre la línea central del carro? **Resp.** 2.09 kN, 2.71 kN.

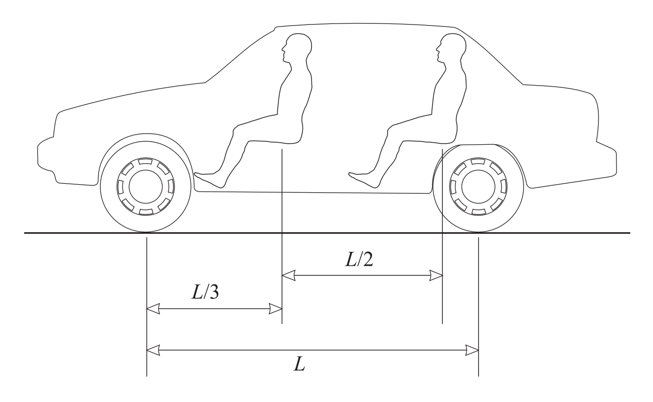


Figura 5-13

5.13 [I] Dos personas sostienen de los extremos una viga uniforme que pesa 400 N. Si la viga forma un ángulo de 25.0° con la horizontal, ¿qué fuerza vertical debe aplicar a la viga cada persona? **Resp.** 200 N.

5.14 [II] Repita el problema 5.13 si un niño de 140 N se sienta sobre la viga en un punto localizado a un cuarto de la longitud de la viga, medido desde el extremo más bajo. **Resp.** 235 N, 305 N.

5.15 [II] En la figura 5-14 se muestra un polín uniforme que pesa 1 600 N. El polín está sujeto de un gozne en uno de sus extremos y del otro tira una cuerda. Calcule la tensión F_T en la cuerda y las componentes de la fuerza en el gozne. **Resp.** $F_T = 0.67$ kN, $F_{RH} = 0.67$ kN, $F_{RV} = 1.6$ kN.

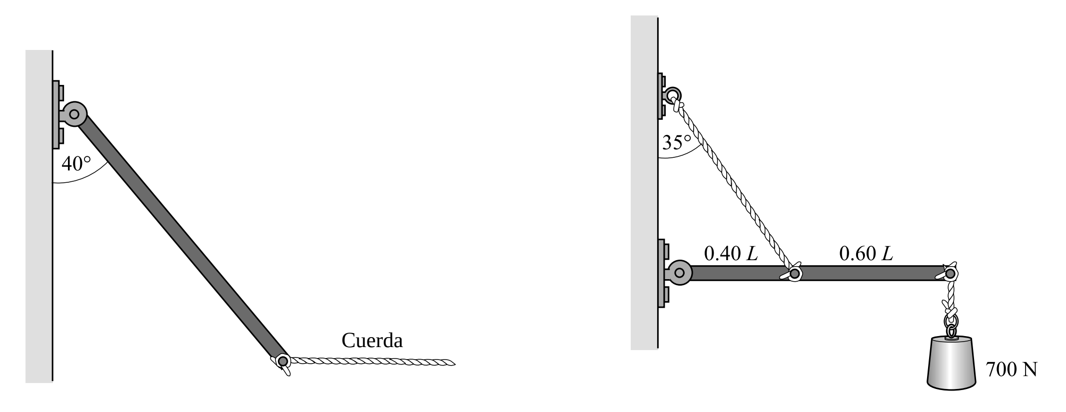


Figura 5-14 **Figura 5-15**

5.16 [II] La viga uniforme que se muestra en la figura 5-15 pesa 500 N y sostiene una carga de 700 N. Calcule la tensión en la cuerda y la fuerza que ejerce la bisagra sobre la viga. **Resp.** 2.9 kN, 2.0 kN, a 35° por debajo de la horizontal.

5.17 [II] El brazo que se muestra en la figura 5-16 sostiene una esfera de 4.0 kg. La masa de la mano y del antebrazo juntos es de 3.0 kg y su peso actúa en un punto a 15 cm del codo. Determine la fuerza ejercida por el músculo bíceps. **Resp.** 0.43 kN.

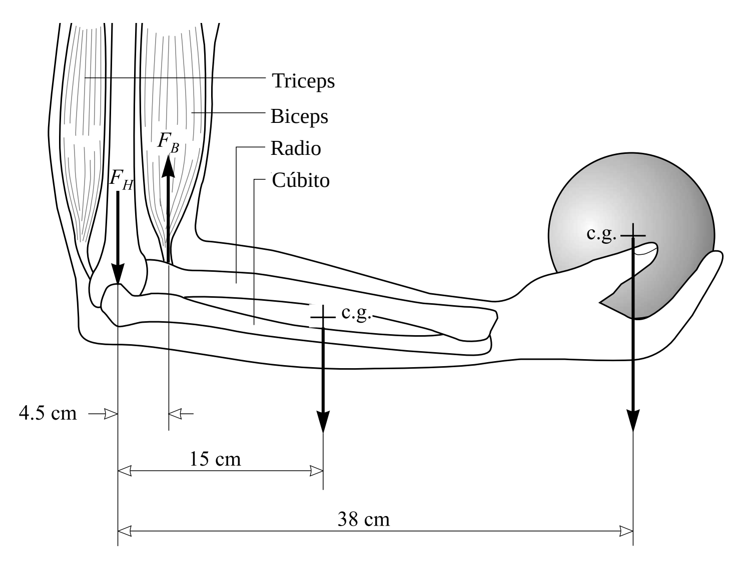


Figura 5-16

5.18[II] El móvil de la figura 5-17 cuelga en equilibrio. Consiste en objetos suspendidos por hilos verticales. El objeto 3 pesa 1.40 N y cada una de las barras horizontales uniformes idénticas pesa 0.50 N. Calcule *a*) el peso de los objetos 1 y 2, y *b*) la tensión en el hilo superior. **Resp.** *a*) 1.5 N, 1.4 N; *b*) 5.3 N.

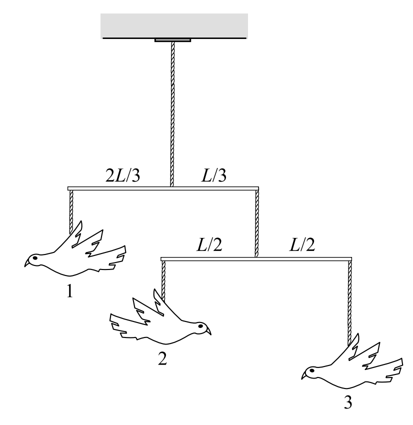


Figura 5-17

5.19[II] Las bisagras de una puerta uniforme que pesa 200 N están separadas 2.5 m. Una bisagra se encuentra a una distancia *d* de la parte superior de la puerta y la otra a una distancia *d* de la base. La puerta tiene un ancho de 1.0 m. La bisagra inferior sostiene todo el peso de la puerta. Determine la fuerza que cada bisagra aplica a la puerta. **Resp.** La fuerza horizontal en la bisagra superior es de 40 N. La fuerza en la bisagra inferior es de 0.20 kN a 79° desde la horizontal.

5.20 [III] La trabe uniforme de la figura 5-18 pesa 40 N y está sometida a las fuerzas que se indican. Encuentre la magnitud, ubicación y dirección de la fuerza necesaria para mantener a la trabe en equilibrio.
Resp. 0.11 kN, 0.68 *L* desde el extremo derecho, con un ángulo de 49°.

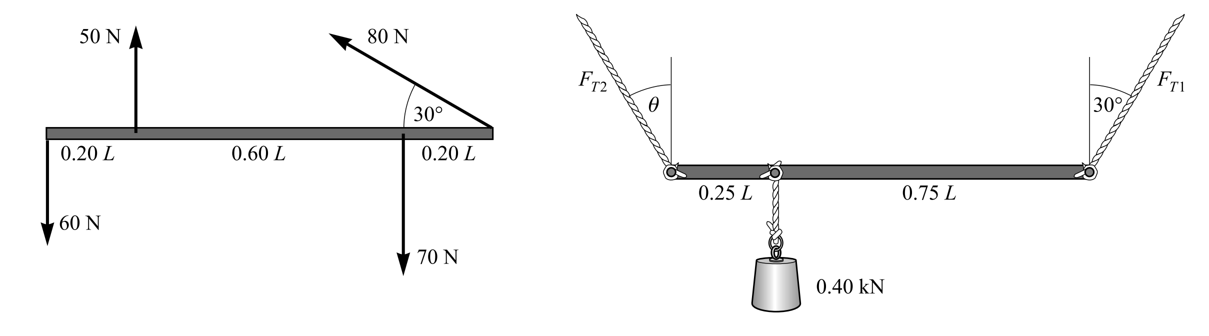


Figura 5-18 **Figura 5-19**

5.21 [III] El tablón uniforme de la figura 5-19, con 120 N de peso, está suspendido por dos cuerdas, como se muestra. A un cuarto de longitud, desde el extremo izquierdo, se suspende un objeto de 0.40 kN. Encuentre F_{T1}, F_{T2} y el ángulo θ que forma la cuerda izquierda con la vertical. **Resp.** 0.19 kN, 0.37 kN, 14°.

5.22 [III] El pie de una escalera descansa contra una pared y su parte superior está detenida por una cuerda, como se indica en la figura 5-20. La escalera pesa 100 N y el centro de gravedad se localiza a 0.40 de su longitud medido desde el pie de la escalera. Un niño de 150 N se cuelga de un cable que se encuentra a 0.20 de la longitud de la escalera medido desde el extremo superior. Calcule la tensión en la cuerda y las componentes de la fuerza en el pie de la escalera. **Resp.** $F_T = 0.12$ kN, $F_{RH} = 0.12$ kN, $F_{RV} = 0.25$ kN.

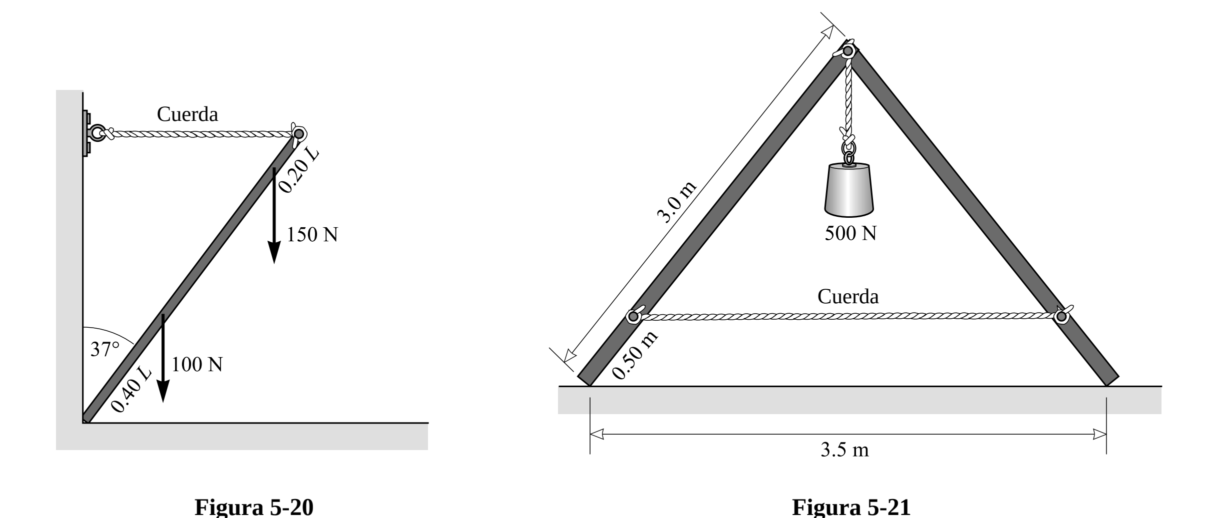


Figura 5-20 **Figura 5-21**

5.23 [III] El armazón de la figura 5-21 se construyó articulando con un gozne dos vigas uniformes de 150 N. Éstas se mantienen unidas mediante una cuerda tensada y los pies del armazón descansan sobre un piso sin fricción. En el vértice se cuelga de una cuerda una carga de 500 N. Encuentre la tensión en la cuerda. **Resp.** 0.28 kN.

5.24 [III] Una cortadora de pasto de 900 N se jala para que suba un escalón de 5.0 cm de altura, como se muestra en la figura 5-22. El radio del cilindro es de 25 cm. ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria para subir la cortadora si el ángulo θ que forma el mango con la horizontal es *a*) 0° y *b*) 30°? (*Sugerencia*: Encuentre la fuerza necesaria para que el cilindro se mantenga en equilibrio en el borde del escalón.) **Resp.** *a*) 0.68 kN; *b*) 0.55 kN.

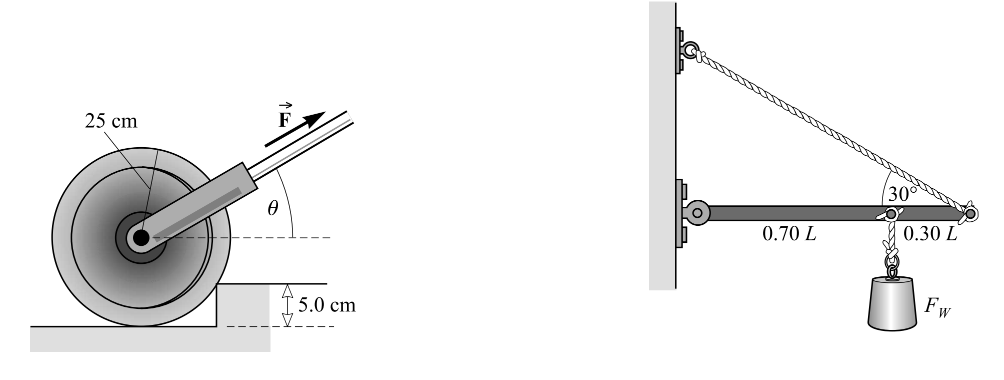


Figura 5-22 **Figura 5-23**

5.25 [II] En la figura 5-23, la viga uniforme pesa 500 N. Si la cuerda puede soportar una tensión de 1800 N, ¿cuál es el valor máximo que puede tener la carga F_W? **Resp.** 0.93 kN.

5.26 [III] La viga de la figura 5-24 tiene peso despreciable. Si el sistema se encuentra en equilibrio cuando $F_{W1} = 500$ N, ¿cuál es el valor de F_{W2}? **Resp.** 0.64 kN.

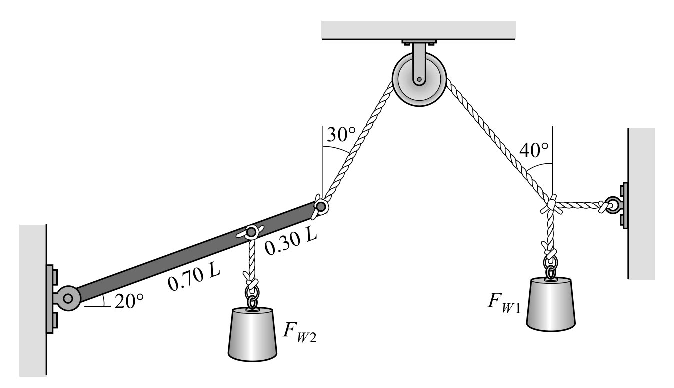


Figura 5-24

5.27 [III] Repita el problema 5.26, pero ahora calcule F_{W1}, si F_{W2} tiene un valor de 500 N. La viga es uniforme y pesa 300 N. **Resp.** 0.56 kN.

5.28 [III] Un cuerpo se encuentra bajo la acción de las fuerzas que se muestran en la figura 5-25. ¿Qué fuerza única, aplicada en un punto a lo largo del eje *x*, equilibrará estas fuerzas? (Encuentre primero las componentes y después calcule la fuerza.) ¿En qué punto del eje *x* se debe aplicar la fuerza?
Resp. $F_x = 232$ N, $F_y = -338$ N; $F = 410$ N a $-55.5°$; en $x = 2.14$ m.

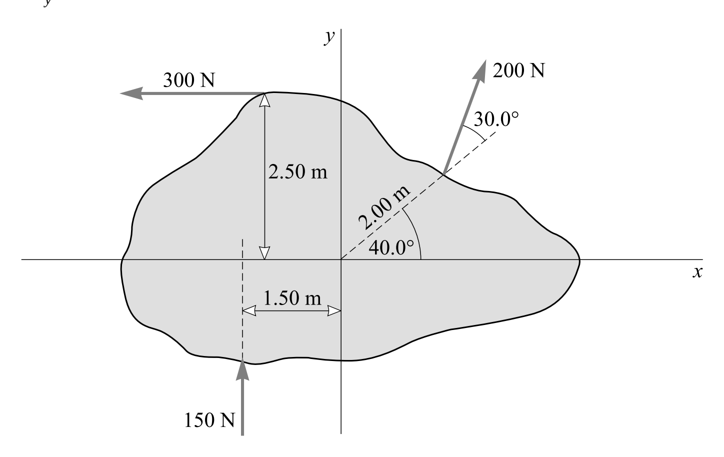


Figura 5-25

5.29 [III] El disco sólido uniforme de radio *b* que se muestra en la figura 5-26 puede girar libremente alrededor del eje que pasa por su centro. A través del disco se perfora un agujero de diámetro *D* cuyo centro está a una distancia *r* del eje. El peso del material extraído es F_{Wh}. Calcule el peso F_W de un objeto que cuelga de un hilo enrollado en el disco para que éste se mantenga en equilibrio en la posición que se muestra. **Resp.** $F_W = F_{Wh}(r/b)\cos\theta$.

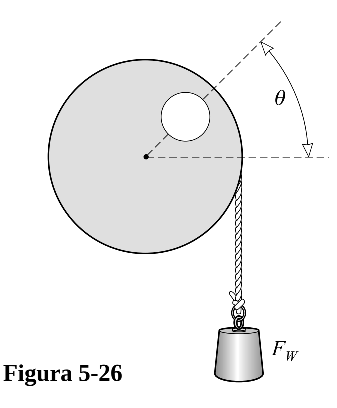


Figura 5-26

TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA

6

EL TRABAJO (*W*) efectuado por una fuerza se define como el producto de esa fuerza multiplicada por la distancia paralela sobre la cual actúa. Considere el caso más sencillo del movimiento rectilíneo que se muestra en la figura 6-1, donde una fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ actúa sobre un cuerpo y hace que éste experimente un desplazamiento vectorial $\vec{\mathbf{s}}$. La componente de $\vec{\mathbf{F}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{s}}$ es $F \cos \theta$. El trabajo W efectuado por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ se define como el producto de la componente de $\vec{\mathbf{F}}$ en la dirección del desplazamiento, multiplicada por el desplazamiento:

$$W = (F \cos \theta)(s) = Fs \cos \theta$$

Note que θ es el ángulo entre la fuerza y el vector de desplazamiento. El trabajo es una cantidad escalar.

Si $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ están en la misma dirección, $\cos \theta = \cos 0º = 1$ y $W = Fs$. Sin embargo, si $\vec{\mathbf{F}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ tienen la misma dirección pero sentidos opuestos, entonces $\cos \theta = \cos 180º = -1$ y $W = -Fs$, y el trabajo es negativo. Fuerzas como la fricción a menudo disminuyen el movimiento de los cuerpos y su sentido es opuesto al desplazamiento. En tales casos efectúan un trabajo negativo. A causa de que la fuerza de fricción se opone al movimiento de un objeto, el trabajo realizado en vencer la fricción (a lo largo de cualquier trayectoria, curva o recta) es igual al producto de F_f y la longitud de la trayectoria recorrida. De este modo, si se arrastra un objeto contra la fricción, de regreso al punto en donde se inició el recorrido, se realiza trabajo incluso si el desplazamiento neto es cero.

El trabajo es la transferencia de energía de una entidad hacia otra a través de la acción de una fuerza aplicada sobre una distancia. *Si va a realizarse trabajo, el punto de aplicación de la fuerza debe moverse.*

LA UNIDAD DE TRABAJO en el SI es el *newton-metro* llamado *joule* (J). Un joule es el trabajo realizado por una fuerza de 1 N cuando el objeto se desplaza 1 m en la dirección de la fuerza. Otras unidades frecuentemente utilizadas para el trabajo son el *erg*, donde $1 \text{ erg} = 10^{-7}$ J, y la *libra-pie* (lb · pie), donde 1 lb · pie = 1.355 J.

LA ENERGÍA (E) es una medida del cambio impartido a un sistema y que se puede transferir mecánicamente a un objeto cuando una fuerza trabaja sobre dicho objeto. La cantidad de energía dada a un objeto mediante la acción de una fuerza sobre una distancia es igual al trabajo realizado. Así, cuando un objeto realiza trabajo, proporciona una cantidad de energía igual al trabajo efectuado. Debido a que el cambio puede realizarse en distintas maneras, hay una variedad de formas de energía. Todas las formas de energía, incluido el trabajo, tienen las mismas unidades, joules. La energía es una cantidad escalar. Un objeto es capaz de realizar trabajo si posee energía.

LA ENERGÍA CINÉTICA (EC) es la energía que posee un objeto debido a su movimiento. Si un objeto de masa m tiene velocidad v, su energía cinética traslacional está dada por

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2} m v^2$$

Cuando m está en kg y v en m/s, las unidades de EC son joules.

LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL (EP_G) es la energía que posee un objeto debido a su posición en el campo gravitacional. Un cuerpo de masa m, al caer una distancia vertical h, puede realizar un trabajo de magnitud mgh. La EP_G de un objeto se define con respecto a un nivel arbitrario cero, el cual a menudo es la superficie de la Tierra. Si un objeto está a una altura h sobre el nivel cero (o de referencia), se tiene

$$\text{EP}_G = mgh$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Adviértase que mg es el peso del objeto. Las unidades de la EP_G son joules cuando m está en kg, g en m/s^2 y h en m.

TEOREMA DEL TRABAJO-ENERGÍA: Cuando se realiza trabajo sobre una masa puntual o sobre un cuerpo rígido y no hay cambio en la EP, la energía impartida sólo puede aparecer como EC. Sin embargo, debido a que un cuerpo no es por completo rígido, se puede transferir energía a sus partes y el trabajo realizado sobre él no será precisamente igual a su cambio en la EC.

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA: La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma de un tipo a otro. (La masa puede considerarse como una forma de energía. Por lo general, puede ignorarse la conversión de masa en energía y viceversa, prevista por la teoría especial de la relatividad. Este tema se tratará en el capítulo 41.)

POTENCIA (P) es la tasa de tiempo con que se realiza trabajo:

$$\text{Potencia promedio} = \frac{\text{trabajo realizado por la fuerza}}{\text{tiempo necesario para realizarlo}} = \text{fuerza} \times \text{rapidez}$$

donde la "rapidez" se mide en la dirección de la fuerza aplicada al objeto. En forma más general, la potencia es la tasa de transferencia de energía. En el SI, la unidad de potencia es el *watt* (W), donde 1 W = 1 J/s.

Otra unidad de potencia que se emplea con frecuencia es el *caballo de fuerza*: 1 hp = 746 W. En general, **la potencia es la razón a la que se transfiere la energía**.

EL KILOWATT-HORA es una unidad de energía. Si una fuerza realiza trabajo a una tasa de 1 kilowatt (que es 1 000 J/s), entonces en una hora realizará 1 kW·h de trabajo:

$$1 \text{ kW}\cdot\text{h} = 3.6 \times 10^6 \text{ J} = 3.6 \text{ MJ}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

6.1 [I] En la figura 6-1, suponga que el objeto se jala con una fuerza de 75 N en la dirección de 28º sobre la horizontal. ¿Cuánto trabajo desarrolla la fuerza al tirar del objeto 8.0 m?

El trabajo efectuado por la fuerza es igual al producto del desplazamiento, 8.0 m, por la componente de la fuerza que es paralela al desplazamiento, (75 N) (cos 28º). Entonces,

$$W = (75 \text{ N})(\cos 28^\circ)(8.0 \text{ m}) = 0.53 \text{ kJ}$$

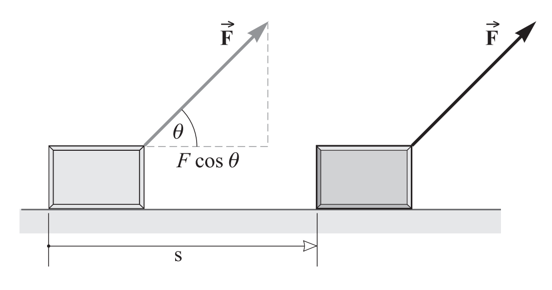


Figura 6-1

6.2 [I] Un bloque se mueve hacia arriba por un plano inclinado 30º bajo la acción de las tres fuerzas que se muestran en la figura 6-2. $\vec{\mathbf{F}}_1$ es horizontal y de 40 N de magnitud. $\vec{\mathbf{F}}_2$ es normal al plano y de 20 N de magnitud. $\vec{\mathbf{F}}_3$ es paralela al plano y de 30 N de magnitud. Determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas, cuando el bloque (y el punto de aplicación de cada fuerza) se mueve 80 cm hacia arriba del plano inclinado.

La componente de $\vec{\mathbf{F}}_1$ a lo largo de la dirección del desplazamiento es

$$F_1 \cos 30^\circ = (40 \text{ N})(0.866) = 34.6 \text{ N}$$

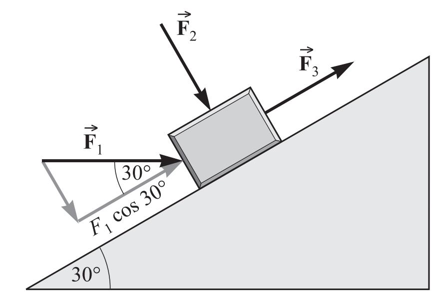


Figura 6-2

Por tanto, el trabajo realizado por $\vec{\mathbf{F}}_1$ es (34.6 N)(0.80 m) = 28 J. (Note que la distancia debe expresarse en metros.)

Obsérvese que $\vec{\mathbf{F}}_2$ no desarrolla trabajo, ya que no tiene componentes en la dirección del desplazamiento.

La componente de $\vec{\mathbf{F}}_3$ en dirección del desplazamiento es 30 N, por lo que el trabajo efectuado por $\vec{\mathbf{F}}_3$ es (30 N)(0.80 m) = 24 J.

6.3 [II] Un cuerpo de 300 g se desliza 80 cm a lo largo de una mesa horizontal. ¿Cuánto trabajo se realiza para superar la fricción entre el cuerpo y la mesa, si el coeficiente de fricción cinética es 0.20?

Primero se calcula la fuerza de fricción. Ya que la fuerza normal es igual al peso del cuerpo,

$$F_f = \mu_c F_N = (0.\ 20)(0.300 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0.588 \text{ N}$$

El trabajo realizado para superar la fricción es $F_f s \cos \theta$. Dado que la fricción tiene sentido contrario al desplazamiento, $\theta = 180°$. De donde

$$\text{Trabajo} = F_f s \cos 180° = (0.588 \text{ N})(0.80 \text{ m})(-1) = -0.47 \text{ J}$$

El trabajo es negativo porque la fricción frena al objeto; es decir, disminuye la energía cinética del objeto.

6.4 [I] ¿Cuánto trabajo se realiza contra la gravedad al levantar un objeto de 3.0 kg a través de una distancia vertical de 40 cm?

Es necesaria una fuerza externa para levantar el objeto. Si el objeto se eleva con rapidez constante, la fuerza de elevación debe ser igual al peso del objeto. El trabajo realizado por la fuerza de elevación es a lo que se refiere como *trabajo realizado en contra de la gravedad.* Ya que la fuerza de elevación es mg, donde m es la masa del objeto, se tiene

$$\text{Trabajo} = (mg)(h)(\cos \theta) = (3.0 \text{ kg} \times 9.81 \text{ N})(0.40 \text{ m})(1) = 12 \text{ J}$$

En general, el trabajo realizado en contra de la gravedad al elevar un objeto de masa m a través de una distancia vertical h es igual a mgh.

6.5 [I] ¿Cuánto trabajo se realiza sobre un objeto por la fuerza que lo soporta conforme éste se desplaza hacia abajo una distancia vertical h? ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza gravitacional sobre dicho objeto en el mismo proceso?

La fuerza de soporte es mg, donde m es la masa del objeto. Se encuentra dirigida hacia arriba mientras que el desplazamiento es hacia abajo. Entonces el trabajo realizado es

$$Fs \cos \theta = (mg)(h)(\cos 180°) = -mgh$$

La fuerza de gravedad que actúa sobre el objeto también es mg, pero está dirigida hacia abajo en el mismo sentido que el desplazamiento. El trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre el objeto es entonces

$$Fs \cos \theta = (mg)(h)(\cos 0°) = mgh$$

6.6 [II] Una escalera de 3.0 m de longitud que pesa 200 N tiene su centro de gravedad a 120 cm del nivel inferior. En su parte más alta tiene un peso de 50 N. Calcule el trabajo necesario para levantar la escalera de una posición horizontal, sobre el piso, a una vertical.

El trabajo que se realiza (contra la gravedad) consta de dos partes: una es el trabajo para elevar el centro de gravedad a una altura de l.20 m y otra el trabajo para elevar el peso que se encuentra en la parte más alta hasta los 3.0 m. Entonces

$$\text{Trabajo realizado} = (200 \text{ N})(1.20 \text{ m}) + (50 \text{ N})(3.0 \text{ m}) = 0.39 \text{ kJ}$$

6.7 [II] Calcule el trabajo realizado en contra de la gravedad por una bomba que descarga 600 litros de gasolina dentro de un tanque que se encuentra a 20 m por encima de la bomba. Un centímetro cúbico de gasolina tiene una masa de 0.82 gramos. Un litro es igual a 1000 cm^3.

Para determinar la masa que se levanta se tiene

$$(600 \text{ litros})\left(1\,000 \frac{\text{cm}^3}{\text{litro}}\right)\left(0.82 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) = 492\,000 \text{ g} = 492 \text{ kg}$$

Para determinar el trabajo de elevación, se tiene

$$\text{Trabajo} = (mg)(h) = (492 \text{ kg} \times 9.81 \text{ m/s}^2)(20 \text{ m}) = 96 \text{ kJ}$$

6.8 [I] Una masa de 2.0 kg cae 400 cm. *a*) ¿Cuánto trabajo realizó la fuerza de gravedad sobre la masa? *b*) ¿Cuánta EP_G perdió la masa?

La gravedad jala al objeto con una fuerza *mg* y el desplazamiento es de 4 m en dirección de la fuerza. Por tanto, el trabajo realizado por la gravedad es

$$(mg)(4.00 \text{ m}) = (2.0 \text{ kg} \times 9.81 \text{ N})(4.00 \text{ m}) = 78 \text{ J}$$

El cambio en EP_G de un objeto es $mgh_f - mgh_i$, donde h_i y h_f son las alturas inicial y final del objeto respecto a un nivel de referencia. Entonces se tiene

$$\text{Cambio en } EP_G = mgh_f - mgh_i = mg(h_f - h_i) = (2.0 \text{ kg} \times 9.81 \text{ N})(-4.0 \text{ m}) = -78 \text{ J}$$

La EP_G perdida es 78 J.

6.9 [II] Una fuerza de 1.50 N actúa sobre un deslizador de 0.20 kg de tal forma que lo acelera a lo largo de un riel de aire. La trayectoria y la fuerza están sobre una línea horizontal. ¿Cuál es la rapidez del deslizador después de acelerarlo desde el reposo, a lo largo de 30 cm, si la fricción es despreciable?

El trabajo realizado por la fuerza es igual al incremento en EC del deslizador. Entonces,

$$\text{Trabajo realizado} = (\text{EC})_{\text{final}} - (\text{EC})_{\text{inicial}} \qquad \text{o bien} \qquad Fs\cos 0^\circ = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

Sustituyendo da

$$(1.50 \text{ N})(0.30 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(0.20 \text{ kg})\, v_f^2$$

de donde $v_f = 2.1$ m/s.

6.10 [II] Un bloque de 0.50 kg se desliza sobre la superficie de una mesa con una velocidad inicial de 20 cm/s, se mueve una distancia de 70 cm y queda en reposo. Encuentre la fuerza de fricción promedio que retarda su movimiento.

La EC inicial del bloque se pierde debido a la acción retardadora de la fuerza de fricción. Es decir,

$$\text{Cambio de EC del bloque} = \text{trabajo realizado sobre el bloque por la fuerza de fricción}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = F_f s\cos\theta$$

Debido a que la fuerza de fricción sobre el bloque se encuentra en sentido opuesto a la dirección del desplazamiento, $\cos\theta = -1$. Utilizando $v_f = 0$, $v_i = 0.20$ m/s y $s = 0.70$ m, se obtiene

$$0 = -\tfrac{1}{2}(0.50 \text{ kg})(0.20 \text{ m/s})^2 = (F_f)(0.70 \text{ m})(-1)$$

de donde $F_f = 0.014$ N.

6.11 [II] Un automóvil que viaja a 15 m/s es llevado hasta el reposo en una distancia de 2.0 m al estrellarse contra un montículo de tierra. ¿Cuál es la fuerza promedio que ejerce el cinturón de seguridad sobre un pasajero de 90 kg en el automóvil cuando es detenido?

Suponga que el cinturón de seguridad detiene al pasajero en 2.0 m. La fuerza *F* que se aplica actúa a lo largo de una distancia de 2.0 m y disminuye la EC del pasajero hasta cero. Así

$$\text{Cambio de EC del pasajero} = \text{trabajo realizado por } F$$

$$0 - \tfrac{1}{2}(90 \text{ kg})(15 \text{ m/s}^2) = (F)(2.0 \text{ m})(-1)$$

donde $\cos\theta = -1$, debido a que la fuerza que retiene al pasajero está en sentido contrario al desplazamiento. Al resolver, se tiene $F = 5.1$ kN.

6.12 [II] Se dispara un proyectil hacia arriba desde la tierra con una rapidez de 20 m/s. Usando consideraciones de energía, ¿a qué altura estará el proyectil cuando su rapidez sea de 8.0 m/s? Ignore la fricción del aire.

Dado que la energía del proyectil se conserva, se tiene

$$\text{Cambio en EC} + \text{cambio en EP}_G = 0$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 + (mg)(h_f - h_i) = 0$$

Lo que se desea calcular es $h_f - h_i$. Después de un poco de álgebra, se obtiene

$$h_f - h_i = -\frac{v_f^2 - v_i^2}{2g} = -\frac{(8.0\ \text{m/s})^2 - (20\ \text{m/s})^2}{2(9.81\ \text{m/s}^2)} = 17\ \text{m}$$

6.13 [II] En una máquina de Atwood (vea el problema 3.30), las dos masas son de 800 g y 700 g. El sistema inicialmente está en reposo. ¿Cuál es la rapidez de la masa de 800 g después de que cae 120 cm?

La masa de 700 g sube 120 cm mientras que la de 800 g cae 120 cm. Por tanto, el cambio neto en EP_G es

$$\text{Cambio en EP}_G = (0.70\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)(1.20\ \text{m}) - (0.80\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)(1.20\ \text{m}) = -1.18\ \text{J}$$

lo cual es una pérdida de EP_G. Dado que la energía se conserva, la energía cinética de las masas aumenta en 1.18 J. En consecuencia,

$$\text{Cambio en EC} = 1.18\ \text{J} = \tfrac{1}{2}(0.70\ \text{kg})(v_f^2 - v_i^2) + \tfrac{1}{2}(0.80\ \text{kg})(v_f^2 - v_i^2)$$

Como el sistema inicialmente se encuentra en reposo, $v_i = 0$, se puede resolver la ecuación para calcular v_f, con lo cual $v_f = 1.25$ m/s.

6.14 [II] Como se muestra en la figura 6-3, una cuenta se desliza sobre un alambre. Si la fuerza de fricción es despreciable y en el punto *A* la cuenta tiene una rapidez de 200 cm/s, *a*) ¿cuál será su rapidez en el punto *B*?, *b*) ¿cuál en el punto *C*?

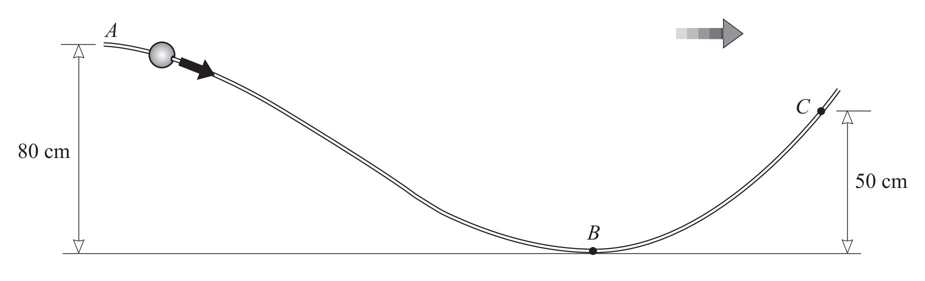


Figura 6-3

Se sabe que la energía de la cuenta se conserva, así que se puede escribir

$$\text{Cambio en EC} + \text{cambio en EP}_G = 0$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 + mg(h_f - h_i) = 0$$

a) Aquí, $v_i = 2.0$ m/s, $h_i = 0.80$ m y $h_f = 0$. Al usar estos valores, y notar que *m* se cancela, se obtiene $v_f = 4.4$ m/s.

b) Aquí, $v_i = 2.0$ m/s, $h_i = 0.80$ m y $h_f = 0.50$ m. Al usar estos valores, y notar que *m* se cancela, se tiene $v_f = 3.1$ m/s.

6.15 [II] Suponga que la cuenta de la figura 6-3 tiene una masa de l5 g y una rapidez de 2.0 m/s en el punto *A*, y se detiene al llegar al punto *C*. La longitud del alambre desde *A* hasta *C* es de 250 cm. ¿Cuál es la fuerza de fricción promedio que se opone al movimiento de la cuenta?

Cuando la cuenta se mueve de *A* a *C* experimenta un cambio en su energía total: pierde EC y EP_G. Este cambio de energía total es igual al trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre la cuenta. Entonces,

Cambio en EC + cambio en EP_G = trabajo realizado por la fuerza de fricción

$$mg(h_C - h_A) + \frac{1}{2}m(v_C^2 - v_A^2) = F_f s \cos\theta$$

Note que $\cos\theta = -1$, $v_C = 0$, $v_A = 2.0$ m/s, $h_C - h_A = -0.30$ m, $s = 2.50$ m y $m = 0.015$ kg. Usando estos valores, se encuentra que $F_f = 0.030$ N.

6.16 [II] Un automóvil de 1 200 kg va cuesta abajo por una colina con una inclinación de 30º, como se muestra en la figura 6-4. Cuando la rapidez del automóvil es de 12 m/s, el conductor aplica los frenos. ¿Cuál es el valor de la fuerza constante F (paralela al camino) que debe aplicarse si el carro se detiene después de viajar 100 m?

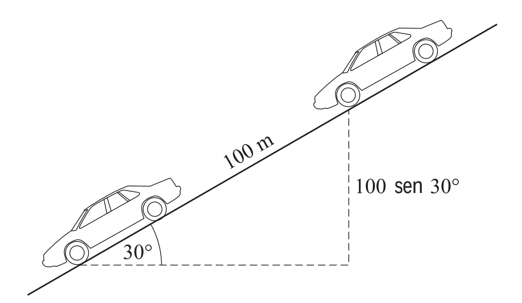


Figura 6-4

El cambio en la energía total del automóvil (EC + EP_G) es igual al trabajo realizado sobre éste por la fuerza de frenado F. Este trabajo es $Fs \cos 180º$, pues F retarda el movimiento del carro. Por tanto se tiene

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + mg(h_f - h_i) = Fs(-1)$$

donde $m = 1\,200$ kg, $v_f = 0$, $v_i = 12$ m/s, $h_f - h_i = (100 \text{ m}) \text{ sen } 30º$ y $s = 100$ m.

Con estos valores, de la ecuación se obtiene $F = 6.7$ kN.

6.17 [II] En la figura 6-5 se muestra un péndulo con una cuerda de 180 cm de longitud y una pelota suspendida en su extremo. La pelota tiene una rapidez de 400 cm/s cuando pasa por el punto bajo de su trayectoria. *a*) ¿Cuál es la altura h sobre este punto a la cual se elevará antes de detenerse? *b*) ¿Qué ángulo forma el péndulo con la vertical?

a) El tirón de la cuerda sobre la pelota siempre es perpendicular a la trayectoria de ésta, por tanto no realiza trabajo sobre la pelota. En virtud de que la energía total de la pelota permanece constante, la EC que pierde se transforma en EP_G. Esto es,

Cambio en EC + cambio en $EP_G = 0$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = 0$$

Ya que $v_f = 0$ y $v_i = 4.00$ m/s, se encuentra que $h = 0.816$ m es la altura a la que se eleva la pelota.

b) De la figura 6-5,

$$\cos\theta = \frac{L-h}{L} = 1 - \frac{0.816}{1.80}$$

con lo cual se obtiene $\theta = 56.9º$.

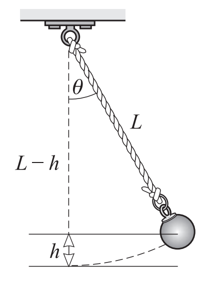


Figura 6-5

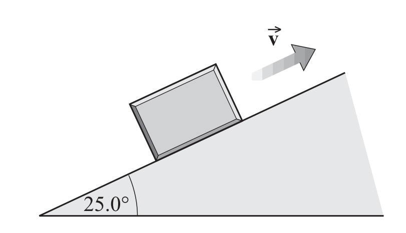


Figura 6-6

6.18 [II] Sobre el plano inclinado de la figura 6-6 se dispara hacia arriba un bloque de 500 g con una rapidez inicial de 200 cm/s. ¿Qué tan arriba sobre el plano inclinado llegará si el coeficiente de fricción entre éste y el plano es de 0.150?

Primero se determina la fuerza de fricción sobre el bloque con

$$F_f = \mu F_N = \mu(mg \cos 25.0°)$$
$$F_f = 0.667 \text{ N}$$

Como el bloque se desliza hacia arriba a una distancia D, éste se elevará a una distancia D sen 25.0º. Dado que el cambio en energía del bloque es igual al trabajo realizado sobre éste por la fuerza de fricción, se tiene

$$\text{Cambio en EC} + \text{cambio en EP}_G = F_f D \cos 180°$$

$$\tfrac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) + mg(D \text{ sen } 25.0°) = -F_f D$$

La fuerza de fricción se opone al movimiento (es hacia abajo), mientras que el desplazamiento es hacia arriba, por lo que el trabajo que realiza es negativo.

Se sabe que $v_i = 2.00$ m/s y $v_f = 0$. Note que la masa del bloque se podría cancelar en este caso (pero sólo porque F_f está dada en términos de la misma). La sustitución da $D = 0.365$ m.

6.19 [II] Un tren de 60 000 kg asciende por una pendiente con inclinación de 1.0% (esto es, se eleva 1.0 m por cada 100 m horizontales) por medio de una tracción que lo jala con una fuerza de 3.0 kN. La fuerza de fricción que se opone al movimiento del tren es de 4.0 kN. La rapidez inicial del tren es 12 m/s. ¿Qué distancia horizontal s recorrerá el tren antes de que su velocidad se reduzca a 9.0 m/s?

La altura que el tren sube al recorrer una distancia horizontal s es $0.010s$. El cambio en energía total del tren se debe al trabajo de la fuerza de fricción (que es negativa) y a la fuerza de tracción:

$$\text{Cambio en EC} + \text{cambio en EP}_G = W_{\text{tracción}} + W_{\text{fricción}}$$

$$\tfrac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) + mg(0.010s) = (3\,000 \text{ N})(s)(1) + (4\,000 \text{ N})(s)(-1)$$

de donde $s = 275$ m $= 0.28$ km.

6.20 [III] Un anuncio publicitario pregona que cierto automóvil de 1 200 kg puede acelerar desde el reposo hasta 25 m/s en un tiempo de 8.0 s. ¿Qué potencia promedio debe desarrollar el motor para originar esta aceleración? Dé su respuesta en watts y en caballos de fuerza. Ignore las pérdidas por fricción.

El trabajo realizado en acelerar el automóvil está dado por

$$\text{Trabajo realizado} = \text{cambio en EC} = \tfrac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) = \tfrac{1}{2} m v_f^2$$

El tiempo transcurrido en el desarrollo de este trabajo es de 8.0 s. Por tanto, con dos cifras significativas,

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{\frac{1}{2}(1\,200 \text{ kg})(25 \text{ m/s})^2}{8.0 \text{ s}} = 46\,875 \text{ W} = 47 \text{ kW}$$

Al convertir de watts a caballos de fuerza (hp), se tiene

$$\text{Potencia} = (46\,875 \text{ W})\left(\frac{1 \text{ hp}}{746 \text{ W}}\right) = 63 \text{ hp}$$

6.21 [III] Un motor de 0.25 hp se usa para levantar una carga con una rapidez de 5.0 cm/s. ¿Cuál es la máxima carga que puede levantar con esta rapidez constante?

Suponga que la potencia de *salida* del motor es de 0.25 hp = 186.5 W. En 1.0 s, una carga mg se levanta a una distancia de 0.050 m. Por consiguiente,

$$\text{Trabajo desarrollado en 1.0 s} = (\text{peso})(\text{cambio de altura en 1.0 s}) = (mg)(0.050 \text{ m})$$

Por definición, potencia = trabajo/tiempo, así que

$$186.5 \text{ W} = \frac{(mg)(0.050 \text{ m})}{1.0 \text{ s}}$$

Utilizando $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, se encuentra que $m = 381$ kg. El motor puede levantar una carga de aproximadamente 0.38×10^3 kg con esta rapidez.

6.22 [III] Repita el problema 6.20 si los datos se aplican a un automóvil que sube por un plano inclinado 20º.

Se debe realizar trabajo para elevar al automóvil, así como para acelerarlo:

$$\text{Trabajo realizado} = \text{cambio en EC} + \text{cambio en EP}_G$$

$$= \tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + mg(h_f - h_i)$$

donde $h_f - h_i = s$ sen 20º y s es la distancia total recorrida por el automóvil sobre el plano inclinado en los 8.0 s considerados. Como se sabe que $v_i = 0$, $v_f = 25$ m/s y $t = 8.0$ s, se tiene

$$s = v_{prom}t = \tfrac{1}{2}(v_i + v_f)t = 100 \text{ m.}$$

Entonces

$$\text{Trabajo realizado} = \tfrac{1}{2}(1\,200 \text{ kg})(625 \text{ m}^2/\text{s}^2) + (1200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(100 \text{ m})(\text{sen } 20º) = 777.6 \text{ kJ}$$

de donde

$$\text{Potencia} = \frac{778 \text{ kJ}}{8.0 \text{ s}} = 97 \text{ kW} = 0.13 \times 10^3 \text{ hp}$$

6.23 [III] Para descargar granos de la bodega de un barco se emplea un elevador que levanta el grano a una distancia de 12 m. La descarga del grano se realiza por la parte superior del elevador a razón de 2.0 kg cada segundo y la rapidez de descarga de cada partícula de grano es de 3.0 m/s. Encuentre la potencia mínima (en hp) del motor que puede elevar los granos de este modo.

La salida de potencia del motor es

$$\text{Potencia} = \frac{\text{cambio en EC} + \text{cambio en EP}_G}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{\tfrac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) + mgh}{t}$$

$$= \frac{m}{t}\left[\tfrac{1}{2}(9.0 \text{ m}^2/\text{s}^2) + (9.81 \text{ m/s}^2)(12 \text{ m})\right]$$

La masa transportada por segundo, m/t, es de 2.0 kg/s. Utilizando este valor se obtiene la potencia, que es 0.24 kW.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

6.24 [I] Una fuerza de 3.0 N actúa a lo largo de una distancia de 12 m en dirección de la fuerza. Encuentre el trabajo realizado. **Resp.** 36 J.

6.25 [I] Un objeto de 4.0 kg se eleva 1.5 m. *a*) ¿Cuánto trabajo se efectúa contra la gravedad de la Tierra? *b*) Repita el cálculo si el objeto se baja en vez de elevarse. **Resp.** *a*) 59 J; *b*) −59 J.

6.26 [I] Una losa de mármol uniforme rectangular tiene 3.4 m de largo, 2.0 m de ancho y una masa de 180 kg. Si originalmente está tendida en el suelo plano, ¿cuánto trabajo se necesita para ponerla vertical? **Resp.** 3.0 kJ.

6.27 [I] ¿Qué tan grande es la fuerza requerida para acelerar un automóvil de 1 300 kg desde el reposo hasta una rapidez de 20 m/s en una distancia horizontal de 80 m? **Resp.** 3.3 kN.

6.28 [I] Un automóvil de 1 200 kg que viaja a 30 m/s aplica los frenos y derrapa antes de detenerse. Si la fuerza de fricción entre el deslizamiento de las llantas y el pavimento es de 6 000 N, ¿qué distancia recorrerá el coche antes de alcanzar el reposo? **Resp.** 90 m.

6.29 [I] Un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) con una rapidez de 5.0×10^6 m/s pasa a través de una película metálica con un espesor de 0.010 mm y emerge con una rapidez de 2.0×10^6 m/s. ¿De qué magnitud es la fuerza promedio que se opone al movimiento a través de la película? **Resp.** 1.8×10^{-9} N.

6.30 [I] Se empuja lentamente un automóvil de 200 kg hacia arriba de una pendiente. ¿Cuánto trabajo desarrollará la fuerza que hace que el objeto ascienda la pendiente hasta una plataforma situada a 1.5 m arriba del punto de partida? Desprecie la fricción. **Resp.** 2.9 kJ.

6.31 [II] Repita el problema 6.30 si la distancia a lo largo de la pendiente hasta la plataforma es de 7.0 m y una fuerza de fricción de 150 N se opone al movimiento. **Resp.** 4.0 kJ.

6.32 [II] Un vagón de carga de 50 000 kg se empuja una distancia de 800 m hacia arriba sobre una inclinación de 1.20%, con rapidez constante. *a*) Encuentre el trabajo que realiza contra la gravedad el empuje de la barra de tracción. *b*) Si la fuerza de fricción que retarda el movimiento es de 1 500 N, determine el trabajo total efectuado. **Resp.** *a*) 4.70 MJ; *b*) 5.90 MJ.

6.33 [II] Una mujer de 60 kg sube un tramo de escalera que une dos niveles separados 3.0 m. *a*) ¿Cuánto trabajo de levantamiento realiza la mujer? *b*) ¿Cuánto cambia la EP_G de la mujer? **Resp.** *a*) 1.8 kJ; *b*) 1.8 kJ.

6.34 [II] Una bomba de agua sube el líquido desde un lago hasta un gran tanque colocado 20 m arriba del nivel del lago. ¿Cuánto trabajo contra la gravedad efectuará la bomba para transferir 5.0 m^3 de agua al tanque? Un metro cúbico de agua tiene una masa de 1 000 kg. **Resp.** 9.8×10^5 J.

6.35 [II] Justo antes de chocar con el piso, una masa de 2.00 kg tiene 400 J de EC. Si se desprecia la fricción, ¿de qué altura se dejó caer dicha masa? **Resp.** 20.0 m.

6.36 [II] Una pelota de 0.50 kg cae frente a una ventana que tiene 1.50 m de longitud vertical. *a*) ¿Cuánto aumenta la EC de la pelota cuando alcanza el borde inferior de la ventana? *b*) Si su rapidez era de 3.0 m/s en la parte superior de la ventana, ¿cuál será la rapidez al pasar por la parte inferior? **Resp.** *a*) 7.4 J; *b*) 6.2 m/s.

6.37 [II] Al nivel del mar las moléculas de nitrógeno en el aire tienen una EC traslacional promedio de 6.2×10^{-21} J. Su masa es de 4.7×10^{-26} kg. *a*) Si una molécula pudiera moverse verticalmente hacia arriba sin chocar contra otras moléculas de aire, ¿a qué altura podría llegar? *b*) ¿Cuál es la rapidez inicial de la molécula hacia arriba? **Resp.** *a*) 14 km; *b*) 0.51 km/s.

6.38 [II] El coeficiente de fricción de deslizamiento entre un coche de 900 kg y el pavimento es de 0.80. Si el automóvil se mueve a 25 m/s a lo largo del pavimento plano cuando comienza a derrapar para detenerse, ¿qué distancia recorrerá antes de detenerse? **Resp.** 40 m.

6.39 [II] Considere el péndulo simple que se muestra en la figura 6-7. *a*) Si se suelta desde el punto *A*, ¿cuál será la rapidez de la pelota cuando pase a través del punto *C*? *b*) ¿Cuál será su rapidez en el punto *B*?
Resp. *a*) 3.8 m/s; *b*) 3.4 m/s.

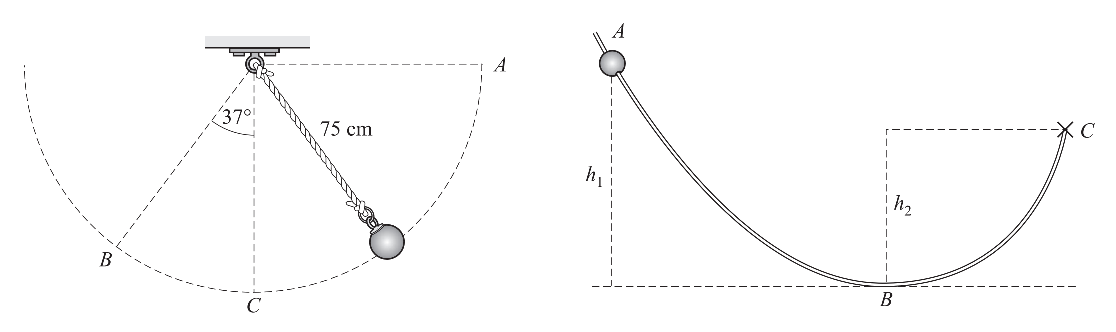


Figura 6-7 **Figura 6-8**

6.40 [II] Un automóvil de 1 200 kg se mueve por gravedad desde el reposo bajando por una carretera de 15 m de largo que está inclinada 20º con la horizontal. ¿Qué rapidez tiene el automóvil al final del camino si *a*) la fricción es despreciable y *b*) cuando se opone al movimiento una fuerza de fricción de 3 000 N?
Resp. *a*) 10 m/s; *b*) 5.1 m/s.

6.41 [II] El conductor de un automóvil de 1 200 kg observa que la rapidez de su automóvil disminuye de 20 m/s a 15 m/s mientras recorre una distancia de 130 m sobre suelo nivelado. ¿De qué magnitud es la fuerza que se opone al movimiento del automóvil? **Resp.** 0.81 kN.

6.42 [II] Un elevador de 2 000 kg sube, partiendo del reposo, desde el sótano hasta el cuarto piso, que se encuentra a una distancia de 25 m. Cuando pasa por el cuarto piso su rapidez es de 3.0 m/s. Hay una fuerza de fricción constante de 500 N. Calcule el trabajo que realiza el mecanismo de elevación. **Resp.** 0.51 MJ.

6.43 [II] La figura 6-8 muestra una cuenta que resbala por un alambre. ¿Cuál debe ser la altura h_1 si la cuenta, partiendo del reposo en *A*, tendrá una rapidez de 200 cm/s en el punto *B*? Ignore la fricción. **Resp.** 20.4 cm.

6.44 [II] En la figura 6-8, $h_1 = 50.0$ cm, $h_2 = 30.0$ cm y la longitud del alambre desde *A* hasta *C* es de 400 cm. Una cuenta de 3.00 g se suelta en el punto *A* y recorre el alambre hasta detenerse en el punto *C*. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción promedio que se opone al movimiento? **Resp.** 1.47 mN.

6.45 [III] En la figura 6-8, $h_1 = 200$ cm, $h_2 = 150$ cm y en el punto *A* la cuenta de 3.00 g tiene una rapidez descendente a lo largo del alambre de 800 cm/s. *a*) ¿Cuál es la rapidez de la cuenta al pasar por el punto *B* si la fricción es despreciable? *b*) ¿Cuánta energía perdió la cuenta debido al trabajo de la fricción si se eleva a una altura de 20.0 cm por encima del punto *C* después de salir del alambre? **Resp.** *a*) 10.2 m/s; *b*) 105 mJ.

6.46 [I] Calcule los caballos de fuerza promedio (potencia) requeridos para levantar un tambor de 150 kg a una altura de 20 m en un tiempo de 1.0 minuto. **Resp.** 0.66 hp.

6.47 [I] Calcule la potencia generada por una máquina que levanta una caja de 500 kg a una altura de 20.0 m en un tiempo de 60.0 s. **Resp.** 1.63 kW.

6.48 [I] Un motor consume 40.0 hp para impulsar un automóvil a lo largo de una pista nivelada a 15.0 m/s. ¿De qué magnitud es la fuerza retardadora total que actúa sobre el coche? **Resp.** 1.99 kN.

6.49 [II] Un automóvil de 1 000 kg viaja en ascenso por una pendiente de 3.0% con una rapidez de 20 m/s. Encuentre la potencia requerida (en hp), despreciando la fricción. **Resp.** 7.9 hp.

6.50 [II] Un automóvil de 900 kg, cuyo motor puede entregar una potencia máxima de 40.0 hp a sus llantas, puede mantener una rapidez constante de 130 km/h en un camino horizontal. ¿De qué magnitud es la fuerza de fricción que impide su movimiento a esa rapidez? **Resp.** 826 N.

6.51 [II] El agua fluye desde un depósito a razón de 3 000 kg/min, hasta una turbina, situada a 120 m hacia abajo. Si la eficiencia de la turbina es de 80%, calcule la salida de la turbina en caballos de fuerza. Desprecie la fricción en la tubería y la pequeña EC del agua que sale de la turbina. **Resp.** 63 hp.

6.52 [II] Calcule la masa de la caja más grande que una máquina de 40 hp puede jalar sobre un camino a nivel con una rapidez de 15 m/s, si el coeficiente de fricción entre el camino y la caja es de 0.15. **Resp.** 1.4×10^3 kg.

6.53 [II] Un automóvil de 1 300 kg debe acelerar desde el reposo hasta una rapidez de 30.0 m/s en un tiempo de 12.0 s mientras sube por una colina de 15.0º. Si supone que la aceleración es uniforme, ¿cuál es la potencia mínima necesaria para acelerar el automóvil de esa forma? **Resp.** 132 hp.

MÁQUINAS SIMPLES 7

UNA MÁQUINA es cualquier dispositivo con el cual se puede cambiar la magnitud, la dirección o el método de aplicación de una fuerza para obtener algún provecho. Ejemplos de máquinas simples son la palanca, el plano inclinado, la polea, la biela (manivela) y el árbol (eje) y el gato.

EL PRINCIPIO DE TRABAJO de una máquina en operación continua es el siguiente:

$$\text{Trabajo de entrada} = \text{trabajo útil de salida} + \text{trabajo para vencer la fricción}$$

En las máquinas con tiempos de operación cortos, parte del trabajo de entrada se puede utilizar para almacenar energía dentro de la máquina. Por ejemplo, estirar un resorte interno o elevar una polea móvil.

VENTAJA MECÁNICA: La **ventaja mecánica real** (VMR) de una máquina se define como:

$$\text{VMR} = \text{razón de fuerzas} = \frac{\text{fuerza ejercida por la máquina sobre la carga}}{\text{fuerza utilizada para operar la máquina}}$$

La **ventaja mecánica ideal** (VMI) de una máquina es

$$\text{VMI} = \text{razón de distancias} = \frac{\text{desplazamiento de la fuerza de entrada}}{\text{desplazamiento de la carga}}$$

Como siempre hay fricción, la VMR siempre es menor que la VMI. En general, tanto la VMR como la VMI son mayores que uno.

LA EFICIENCIA de una máquina se define como

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}}$$

La eficiencia también es igual a la razón VMR/VMI.

PROBLEMAS RESUELTOS

7.1 [I] En una cabria (aparejo, pescante), se levanta una carga 10 cm por cada 70 cm de desplazamiento de la cuerda utilizada para operar el dispositivo. ¿Cuál es la mínima fuerza de entrada necesaria para levantar una carga de 5.0 kN?

La situación más ventajosa posible es aquella en la cual todo el trabajo de entrada se utiliza para levantar la carga, esto es, donde la fricción u otros mecanismos de pérdida son despreciables. En tales casos,

$$\text{Trabajo de entrada} = \text{trabajo de levantamiento}$$

Si la carga se levanta una distancia s, el trabajo de levantamiento es de (5.0 kN)(s). Sin embargo, la fuerza de entrada F debe realizar trabajo en una distancia de 7.0s. La ecuación anterior se convierte en

$$(F)(7.0s) = (5.0\text{ kN})(s)$$

que da $F = 0.71$ kN como la fuerza mínima requerida.

7.2 [III] Una máquina de aparejos levanta una carga de 3 000 kg a una altura de 8.00 m en un tiempo de 20.0 s. Al mecanismo se le suministra una potencia de 18.0 hp. Calcule *a*) el trabajo de salida, *b*) la potencia de salida y la potencia de entrada y *c*) la eficiencia del mecanismo y del sistema de aparejos.

a) $\text{Trabajo de salida} = (\text{fuerza de levantamiento})(\text{altura}) = (3\,000 \times 9.81\text{ N})(8.00\text{ m}) = 235\text{ kJ}$

b) $$\text{Potencia de salida} = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{tiempo consumido}} = \frac{235\ \text{kJ}}{20.0\ \text{s}} = 11.8\ \text{kW}$$

$$\text{Potencia de entrada} = (18.0\ \text{hp})\left(\frac{0.746\ \text{kW}}{1\ \text{hp}}\right) = 13.4\ \text{kW}$$

c) $$\text{Eficiencia} = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{potencia de entrada}} = \frac{11.8\ \text{kW}}{13.4\ \text{kW}} = 0.881 = 88.1\%$$

o bien $$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{235\ \text{kJ}}{(13.4\ \text{kJ/s})(20.0\ \text{s})} = 0.877 = 87.7\%$$

La eficiencia es de 88%; las diferencias se originan del proceso de redondeo.

7.3 [II] ¿Qué potencia en kW se suministra a un motor de 12.0 hp que tiene una eficiencia de 90.0% cuando desarrolla toda su potencia nominal?

De la definición de eficiencia,

$$\text{Potencia de entrada} = \frac{\text{potencia de salida}}{\text{eficiencia}} = \frac{(12.0\ \text{hp})(0.746\ \text{kW/hp})}{0.900} = 9.95\ \text{kW}$$

7.4 [II] Para las tres palancas que se muestran en la figura 7-1, determine las fuerzas verticales F_1, F_2 y F_3 que se requieren para sostener la carga $F_W = 90$ N. Desprecie los pesos de las palancas. Calcule también la VMR, la VMI y la eficiencia para cada sistema.

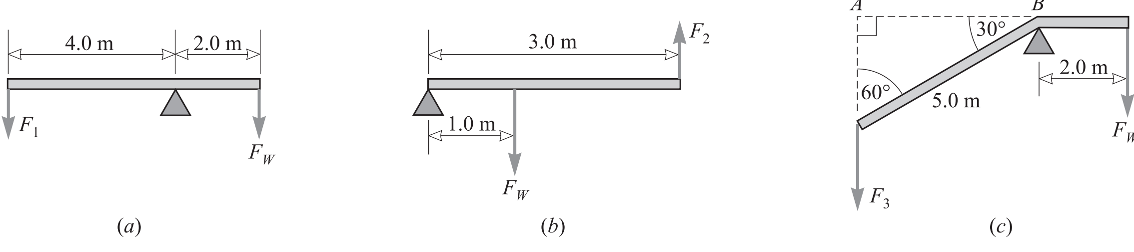


Figura 7-1

En cada caso, se considera el momento de torsión alrededor del punto del fulcro de apoyo como eje. Si se supone que el levantamiento se hace lentamente y con rapidez constante, entonces los sistemas estarán en equilibrio; los momentos de torsión en el sentido de las manecillas del reloj balancean a los momentos de torsión en sentido opuesto a las manecillas del reloj (recuerde que el momento de torsión = rF sen θ).

Momentos de torsión en el sentido del reloj = momentos de torsión en sentido opuesto al reloj

a) (2.0 m)(90 N)(1) = (4.0 m)(F_1)(1) de donde $F_1 = 45$ N

b) (1.0 m)(90 N)(1) = (3.0 m)(F_2)(1) de donde $F_2 = 30$ N

c) (2.0 m)(90 N)(1) = (5.0 m)(F_3) sen 60º de donde $F_3 = 42$ N

Para encontrar la VMI del sistema en la figura 7-1*a*, observe que la carga se desplaza sólo la mitad de la distancia de la fuerza aplicada, entonces

$$\text{VMI} = \text{razón de las distancias} = 2.0$$

De la misma manera, en la figura 7-1*b*, VMI = 3/1 = 3. Sin embargo, en la figura 7-1*c*, el brazo de palanca es (5.0 m) sen 60º = 4.33 m y la razón de distancias es 4.33/2 = 2.16. En resumen,

	Palanca (*a*)	Palanca (*b*)	Palanca (*c*)
VMI	2.0	3.0	2.2
VMR	$\frac{90\ \text{N}}{45\ \text{N}} = 2.0$	$\frac{90\ \text{N}}{30\ \text{N}} = 3.0$	$\frac{90\ \text{N}}{41.6\ \text{N}} = 2.2$
Eficiencia	1.0	1.0	1.0

La eficiencia es 1.0 porque se despreció la fricción en el fulcro.

7.5 [II] Determine la fuerza F que se requiere para levantar una carga $F_W = 100$ N con cada uno de los sistemas de poleas que se muestran en la figura 7-2. Desprecie la fricción y los pesos de las poleas.

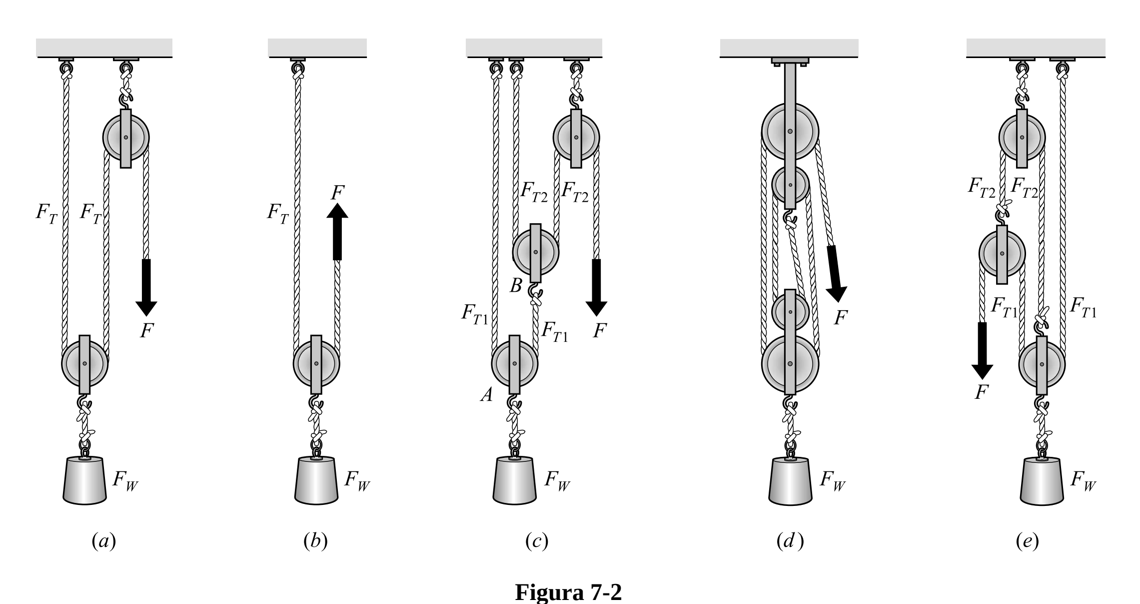


Figura 7-2

a) La carga F_W está sostenida por dos cuerdas; cada cuerda tira hacia arriba con una tensión de $F_T = \frac{1}{2}F_W$. Puesto que la cuerda es continua y no hay fricción en las poleas, $F_T = F$. Entonces

$$F = F_T = \tfrac{1}{2}F_W = \tfrac{1}{2}(100 \text{ N}) = 50 \text{ N}$$

b) Aquí, también, la carga está sostenida por la tensión de las dos cuerdas, F_T y F, donde $F_T = F$. Entonces

$$F_T + F = F_W \qquad \text{o bien} \qquad F = \tfrac{1}{2}F_W = 50 \text{ N}$$

c) Sean F_{T1} y F_{T2} las tensiones en las poleas A y B, respectivamente. La polea A está en equilibrio, entonces

$$F_{T1} + F_{T1} - F_w = 0 \qquad \text{o bien} \qquad F_{T1} = \tfrac{1}{2}F_W$$

La polea también está en equilibrio, así que

$$F_{T2} + F_{T2} - F_{T1} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad F_{T2} = \tfrac{1}{2}F_{T1} = \tfrac{1}{4}F_W$$

Como $F = F_{T2}$ entonces $F = \frac{1}{4}F_W = 25$ N.

d) Cuatro cuerdas, cada una con la misma tensión F_T, sostienen a la carga F_W. Por esto,

$$4F_{T1} = F_W \qquad \text{de donde} \qquad F = F_{T1} = \tfrac{1}{2}F_W = 25 \text{ N}$$

e) A primera vista se observa que $F = F_{T1}$. Como la polea en la izquierda está en equilibrio, se tiene

$$F_{T2} - F_{T1} - F = 0$$

Como $F_{T1} = F$, entonces $F_{T2} = 2F$. La polea de la derecha también está en equilibrio, por tanto

$$F_{T1} + F_{T2} + F_{T1} - F_W = 0$$

Al recordar que $F_{T1} = F$ y que $F_{T2} = 2F$ se obtiene $4F = F_W$, de donde $F = 25$ N.

7.6 [II] La cabria de la figura 7-3 se utiliza para levantar una carga de 400 N aplicando una fuerza de 50 N en el borde de la rueda. Los radios de la rueda (*R*) y del eje (*r*) son 85 cm y 6.0 cm, respectivamente. Determine la VMI, la VMR y la eficiencia de la máquina.

Se sabe que en una vuelta de la cabria, la longitud de la cuerda enredada o desenredada será igual a la circunferencia del árbol (eje) de la cabria.

$$\text{VMI} = \frac{\text{distancia que se desplaza por } F}{\text{distancia que se desplaza por } F_W} = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{85 \text{ cm}}{6.0 \text{ cm}} = 14.2 = 14$$

$$\text{VMR} = \text{razón de fuerzas} = \frac{400 \text{ N}}{50 \text{ N}} = 8.0$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{VMR}}{\text{VMI}} = \frac{8.0}{14.2} = 0.56 = 56\%$$

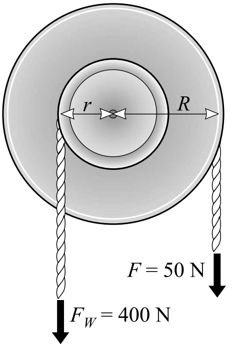


Figura 7-3

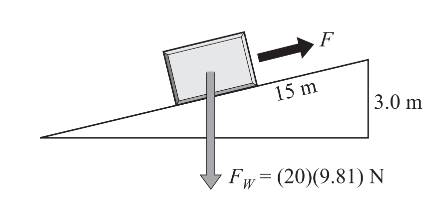


Figura 7-4

7.7 [II] El plano inclinado que se muestra en la figura 7-4 tiene 15 m de longitud y 3.0 m de altura. *a*) ¿Qué fuerza mínima *F* paralela al plano inclinado se requiere para deslizar hacia arriba una caja de 20 kg, si la fricción es despreciable? *b*) ¿Cuál es la VMI del plano? *c*) Calcule la VMR y la eficiencia si se requiere una fuerza de 64 N.

a) Existen varias formas de resolver el problema. Considere el método de energías. Como no hay fricción, el trabajo hecho por la fuerza, (*F*)(15 m), debe ser igual al trabajo de levantamiento realizado (20 kg)(9.81 m/s^2)(3.0 m). Al igualar las dos ecuaciones y resolver para *F* se obtiene $F = 39$ N.

b)
$$\text{VMI} = \frac{\text{distancia que se desplaza por } F}{\text{distancia que se eleva por } F_W} = \frac{15 \text{ m}}{3.0 \text{ m}} = 5.0$$

c)
$$\text{VMR} = \text{razón de fuerzas} = \frac{F_W}{F} = \frac{196 \text{ N}}{64 \text{ N}} = 3.06 = 3.1$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{VMR}}{\text{VMI}} = \frac{3.06}{5.0} = 0.61 = 61\%$$

Como comprobación

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{(F_W)(3.0 \text{ m})}{(F)(15 \text{ m})} = 0.61 = 61\%$$

7.8 [III] Como se muestra en la figura 7-5, un gato tiene un brazo de palanca de 40 cm y un paso de 5.0 mm. Si la eficiencia es de 30%, ¿qué fuerza horizontal *F* aplicada perpendicularmente en el extremo del brazo de palanca se requiere para levantar una carga F_W de 270 kg?

Cuando la palanca del gato completa una vuelta, la fuerza suministrada se mueve una distancia

$$2\pi r = 2\pi(0.40 \text{ m})$$

mientras que la carga sube una distancia de 0.0050 m. Entonces el valor de VMI es

$$\text{VMI} = \text{razón de distancia} = \frac{2\pi(0.40\ \text{m})}{0.0050\ \text{m}} = 0.50 \times 10^3$$

Como la eficiencia = VMR/VMI, se tiene

$$\text{VMR} = (\text{eficiencia})(\text{VMI}) = (0.30)(502) = 0.15 \times 10^3$$

Pero VMR = (carga levantada)/(fuerza suministrada), por tanto

$$F = \frac{\text{carga levantada}}{\text{VMR}} = \frac{(270\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{151} = 18\ \text{N}$$

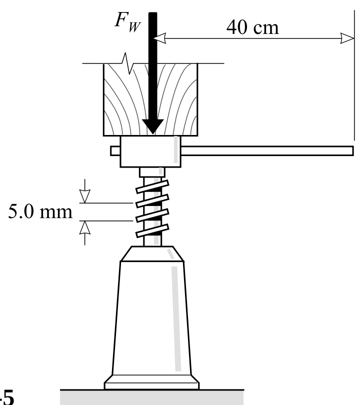


Figura 7-5

7.9 [III] Una polea diferencial (aparejo diferencial) se muestra en la figura 7-6. Dos poleas dentadas de radios r = 10 cm y R = 11 cm están unidas entre sí y giran sobre el mismo eje. Una cadena sinfín pasa sobre la polea pequeña (10 cm), después alrededor de la polea móvil colocada en la parte más baja y finalmente alrededor de la polea de 11 cm. El operador ejerce una fuerza descendente F sobre la cadena para levantar una carga F_W. *a*) Determine la VMI. *b*) ¿Cuál es la eficiencia de la máquina si se requiere aplicar una fuerza de 50 N para levantar una carga de 700 N?

a) Suponga que la fuerza F se mueve hacia abajo una distancia suficiente para que el sistema rígido superior de poleas gire una revolución. Entonces la polea superior más pequeña desenreda una longitud de cadena igual a su circunferencia, $2\pi r$, mientras que la polea superior grande enreda una de $2\pi R$. Como resultado, la cadena que sostiene a la polea inferior se reduce en una longitud de $2\pi R - 2\pi r$. La carga F_W sube la mitad de esta distancia, o sea

$$\tfrac{1}{2}(2\pi R - 2\pi r) = \pi(R - r)$$

cuando la fuerza suministrada se mueve una distancia $2\pi R$. En consecuencia,

$$\text{VMI} = \frac{\text{distancia que se desplaza por } F}{\text{distancia que se desplaza por } F_W} = \frac{2\pi R}{\pi(R - r)} = \frac{2R}{R - r} = \frac{22\ \text{cm}}{1.0\ \text{cm}} = 22$$



Figura 7-6

b) De los datos

$$\text{VMR} = \frac{\text{carga levantada}}{\text{fuerza suministrada}} = \frac{700\ \text{N}}{50\ \text{N}} = 14$$

y

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{VMR}}{\text{VMI}} = \frac{14}{22} = 0.64 = 64\%$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

7.10 [I] Un motor proporciona 120 hp a un dispositivo que levanta una carga de 5 000 kg a una altura de 13.0 m en un tiempo de 20 s. Encuentre la eficiencia de la máquina. **Resp.** 36%.

7.11 [I] Vea la figura 7-2*d*. Si se requiere una fuerza de 200 N para levantar una carga de 50 kg, encuentre la VMI, la VMR y la eficiencia del sistema. **Resp.** 4, 2.5, 61%.

7.12 [II] En la figura 7-7, la carga de 300 N está en equilibrio con una fuerza F en ambos sistemas. Si supone eficiencias de 100%, ¿cuál es la magnitud de la fuerza en cada sistema? Suponga que todas las cuerdas están verticales. **Resp.** *a*) 100 N; *b*) 75.0 N.

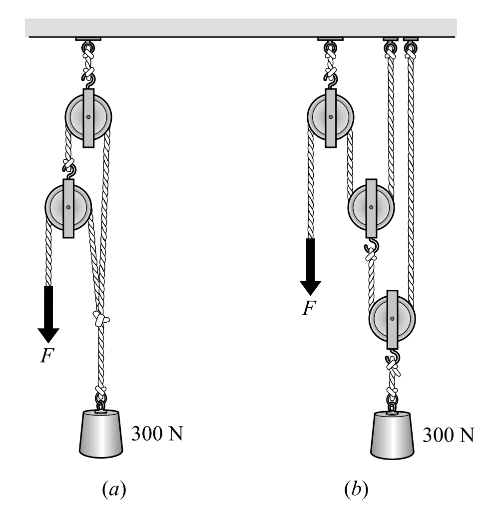


Figura 7-7

7.13 [II] Con cierta máquina, la fuerza aplicada se mueve 3.3 m para levantar una carga 8.0 cm. Encuentre *a*) la VMI y *b*) la VMR si la eficiencia es de 60%. ¿Qué carga se puede levantar con una fuerza de 50 N si la eficiencia es *c*) 100% y *d*) 60%? **Resp.** *a*) 41; *b*) 25; *c*) 2.1 kN; *d*) 1.2 kN.

7.14 [II] Con una cabria, una fuerza de 80 N aplicada al borde de la rueda puede levantar una carga de 640 N. Los diámetros de la rueda y del árbol son 36 cm y 4.0 cm, respectivamente. Determine la VMR, la VMI y la eficiencia de la máquina. **Resp.** 8.0, 9.0, 89%.

7.15 [II] En una gasolinera, un gato hidráulico levanta un auto de 900 kg a una altura de 0.25 cm cuando una fuerza de 150 N empuja un pistón desplazándolo 20 cm. Encuentre la VMI, la VMR y la eficiencia.
Resp. 80, 59, 74%.

7.16 [II] El tornillo de una prensa tiene un paso de 0.20 cm. El diámetro de la rueda a la cual se aplica una fuerza tangencial F para girarla es de 55 cm. Si la eficiencia es de 40%, ¿qué tan grande debe ser F para producir en la prensa una fuerza de 12 kN? **Resp.** 35 N.

7.17 [II] Los diámetros de las dos poleas superiores de un aparejo diferencial (montacarga de cadena) (figura 7-6) son 18 cm y 16 cm. Si la eficiencia del aparejo es de 45%, ¿qué fuerza se requiere para levantar un cesto de 400 kg? **Resp.** 0.48 kN.

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

8

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL ($\vec{\mathbf{p}}$) de un cuerpo se define como el producto de su masa (m) por su velocidad ($\vec{\mathbf{x}}$):

Cantidad de movimiento lineal = (masa del cuerpo) (velocidad del cuerpo)

$$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{x}}$$

La cantidad de movimiento es una cantidad vectorial cuya dirección es la del vector velocidad. Las unidades en el SI de la cantidad de movimiento son kg · m/s.

EL IMPULSO se define como el producto de la fuerza ($\vec{\mathbf{F}}$) por el intervalo de tiempo (Δt) en el que actúa la fuerza:

Impulso = (fuerza) (tiempo en el que actúa la fuerza)

El impulso es una cantidad vectorial cuya dirección es la misma que la de la fuerza. Sus unidades son N·s en el SI.

UN IMPULSO CAUSA UN CAMBIO EN LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO: El cambio en la cantidad de movimiento producido por un impulso es igual al impulso en magnitud y dirección. De esta manera, si una fuerza constante $\vec{\mathbf{F}}$ actúa durante un tiempo Δt sobre un cuerpo de masa m, su velocidad cambia desde un valor inicial $\vec{\mathbf{x}}_i$ hasta un valor final $\vec{\mathbf{x}}_f$, o sea

Impulso = cambio en la cantidad de movimiento

$$\vec{\mathbf{F}}\ \Delta t = m(\vec{\mathbf{x}}_f - \vec{\mathbf{x}}_i)$$

La segunda ley de Newton, como él la postuló, es $\vec{\mathbf{F}} = \Delta\vec{\mathbf{p}}/\Delta t$, de lo cual se deduce que $\vec{\mathbf{F}}\ \Delta t = \Delta\vec{\mathbf{p}}$. Es más, $\vec{\mathbf{F}}\Delta t = \Delta(m\vec{\mathbf{x}})$ y, si m es constante, $\vec{\mathbf{F}}\Delta t = m(\vec{\mathbf{x}}_f - \vec{\mathbf{x}}_i)$.

CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL: Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema de objetos es cero, entonces la suma vectorial de las cantidades de movimiento de los objetos permanece constante.

EN COLISIONES (CHOQUES) Y EXPLOSIONES la suma vectorial de las cantidades de movimiento justo antes del evento es igual a la suma vectorial de las cantidades de movimiento inmediatamente después del evento. La suma vectorial de las cantidades de movimiento de los objetos involucrados no cambia durante el choque o explosión.

Por ende, cuando dos cuerpos de masas m_1 y m_2 chocan,

Cantidad de movimiento total antes del impacto = cantidad de movimiento total después del impacto

$$m_1\vec{\mathbf{u}}_1 + m_2\vec{\mathbf{u}}_2 = m_1\vec{\mathbf{x}}_1 + m_2\vec{\mathbf{x}}_2$$

donde $\vec{\mathbf{u}}_1$ y $\vec{\mathbf{u}}_2$ son las velocidades antes del impacto, y $\vec{\mathbf{x}}_1$ y $\vec{\mathbf{x}}_2$ son las velocidades después del choque. En una dimensión, en forma de componentes,

$$m_1u_{1x} + m_2u_{2x} = m_1\upsilon_{1x} + m_2\upsilon_{2x}$$

y similarmente para las componentes y y z. Recuerde que las cantidades vectoriales siempre se imprimen en negritas y que la velocidad es un vector. Por otra parte, u_{1x}, u_{2x}, υ_{1x} y υ_{2x} son los valores escalares de las velocidades (pueden ser positivos o negativos). Inicialmente, se selecciona una dirección positiva y los vectores que apuntan en dirección opuesta a ésta tienen valores escalares numéricos negativos.

UNA COLISIÓN PERFECTAMENTE ELÁSTICA es aquella en la cual la suma de la EC traslacional de los objetos no cambia durante la colisión. En el caso de dos cuerpos

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2\upsilon_2^2$$

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN: Para cualquier colisión entre dos cuerpos en la que los cuerpos se mueven sólo a lo largo de una línea recta (por ejemplo, el eje x), el **coeficiente de restitución** e está definido. Es un simple número dado por

$$e = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{u_{1x} - u_{2x}}$$

donde u_{1x} y u_{2x} son valores antes del impacto y v_{1x} y v_{2x} son valores después del impacto. Observe que $|u_{1x} - u_{2x}|$ es la rapidez relativa de aproximación y $|v_{2x} - v_{1x}|$ es la rapidez relativa de retroceso.

Para una colisión perfectamente elástica, $e = 1$. Para una colisión inelástica, $e < 1$. Si los cuerpos permanecen unidos después de la colisión, $e = 0$.

EL CENTRO DE MASA de un objeto (de masa m) es el único punto que se desplaza de la misma manera que se movería una masa puntual (de masa m) cuando se somete a la misma fuerza externa que actúa sobre el objeto. Esto es, si la fuerza resultante que actúa sobre un objeto (o sistema de objetos) de masa m es $\vec{\mathbf{F}}$, la aceleración del centro de masa del objeto (o sistema) está dada por $\vec{\mathbf{a}}_{cm} = \vec{\mathbf{F}}/m$.

Si el objeto se considera formado por pequeñas masas m_1, m_2, m_3, y así sucesivamente, con coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), etcétera, entonces las coordenadas del centro de masa están dadas por

$$x_{cm} = \frac{\Sigma\, x_i m_i}{\Sigma\, m_i} \qquad y_{cm} = \frac{\Sigma\, y_i m_i}{\Sigma\, m_i} \qquad z_{cm} = \frac{\Sigma\, z_i m_i}{\Sigma\, m_i}$$

donde las sumas se extienden sobre todas las masas que componen el objeto. En un campo gravitacional uniforme el centro de masa y el centro de gravedad coinciden.

PROBLEMAS RESUELTOS

8.1 [II] Una bala de 8.0 g se dispara horizontalmente hacia el interior de un cubo de madera de 9.00 kg, que está en reposo, y se clava en él. El cubo, que puede moverse libremente, adquiere una velocidad de 40 cm/s después del impacto. Encuentre la velocidad inicial de la bala.

Considere el sistema (cubo + bala). La velocidad, y por consiguiente la cantidad de movimiento del cubo es cero antes del impacto. Considere que el movimiento inicial de la bala es positivo en la dirección positiva x. La ley de conservación de la cantidad de movimiento establece que

Cantidad de movimiento del sistema antes del impacto =
cantidad de movimiento del sistema después del impacto
(cantidad de movimiento de la bala) + (cantidad de movimiento del cubo) =
(cantidad de movimiento de la bala + el cubo)

$$m_B v_{Bx} + m_C v_{Cx} = (m_B + m_C) v_x$$

$$(0.0080 \text{ kg}) v_{Bx} + 0 = (9.008 \text{ kg})(0.40 \text{ m/s})$$

Al resolver se obtiene $v_{Bx} = 0.45$ km/s, por tanto, $\vec{\mathbf{v}}_B = 0.45$ km/s — DIRECCIÓN x POSITIVA.

8.2 [II] Una masa de 16 g se mueve en la dirección $+x$ a 30 cm/s, mientras una masa de 4.0 g se mueve en la dirección $-x$ a 50 cm/s. Chocan de frente y quedan unidas. Encuentre la velocidad del sistema después de la colisión.

Sea m_1 la masa de 16 g y m_2 la de 4.0 g. Tome la dirección $+x$ como positiva. Esto significa que la velocidad de la masa de 4.0 g tiene un valor escalar de $v_{2x} = -50$ cm/s. Se aplica la ley de conservación de la cantidad de movimiento al sistema formado por las dos masas:

Cantidad de movimiento antes del impacto = cantidad de movimiento después del impacto

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) v_x$$

$$(0.016 \text{ kg})(0.30 \text{ m/s}) + (0.0040 \text{ kg})(-0.50 \text{ m/s}) = (0.020 \text{ kg}) v_x$$

$$v_x = +0.14 \text{ m/s}$$

(Note que la masa de 4.0 g tiene una cantidad de movimiento negativa.) Por tanto, $\vec{\mathbf{v}} = 0.14$ m/s — DIRECCIÓN x POSITIVA.

8.3 [I] Un ladrillo de 2.0 kg se mueve con una rapidez de 6.0 m/s. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza F que se necesita para detener al ladrillo en un tiempo de 7.0×10^{-4} s?

El problema puede resolverse aplicando la ecuación de impulso:

Impulso sobre el ladrillo = cambio en la cantidad de movimiento del ladrillo

$$F\,\Delta t = m\upsilon_f - m\upsilon_i$$
$$F(7.0 \times 10^{-4}\ \text{s}) = 0 - (2.0\ \text{kg})(6.0\ \text{m/s})$$

de donde $F = -1.7 \times 10^4$ N. El signo negativo indica que la fuerza se opone al movimiento.

8.4 [II] Una bala de 15 g que se mueve a 300 m/s pasa a través de una placa de plástico de 2.0 cm de espesor y sale con una rapidez de 90 m/s. Si supone que el cambio de rapidez tiene lugar de manera uniforme, ¿cuál es la fuerza promedio que impide el movimiento de la bala al pasar a través de la placa de plástico?

Se aplica la ecuación de impulso para calcular la F sobre la bala considerando el tiempo Δt como el necesario para pasar a través del plástico. Se toma como positiva la dirección inicial del movimiento,

$$F\,\Delta t = m\upsilon_f - m\upsilon_i$$

Para calcular el tiempo Δt considere una desaceleración uniforme y use $x = \upsilon_{prom}t$, donde $x = 0.020$ m y $\upsilon_{prom} = \frac{1}{2}(\upsilon_i + \upsilon_f) = 195$ m/s. De donde $\Delta t = 1.026 \times 10^{-4}$ s. Entonces

$$(F)(1.026 \times 10^{-4}\ \text{s}) = (0.015\ \text{kg})(90\ \text{m/s}) - (0.015\ \text{kg})(300\ \text{m/s})$$

con lo que se obtiene $F = -3.1 \times 10^4$ N como fuerza promedio retardadora. (¿Podría resolverse este problema utilizando $F = ma$ en lugar de la ecuación de impulso? ¿Empleando métodos que involucren energía?)

8.5 [II] El núcleo de un átomo tiene una masa de 3.80×10^{-25} kg y se encuentra en reposo. El núcleo es radiactivo y repentinamente emite una partícula de 6.6×10^{-27} kg de masa y 1.5×10^7 m/s de rapidez. Calcule la rapidez de retroceso del núcleo que queda detrás.

Se toma la dirección de la partícula emitida como positiva. Se da $m_{ni} = 3.80 \times 10^{-25}$ kg, $m_p = 6.6 \times 10^{-27}$ kg, $m_{nf} = m_{ni} - m_p = 3.73 \times 10^{-25}$ kg y $\upsilon_{pf} = 1.5 \times 10^7$ m/s; encuentre la rapidez final del núcleo, υ_{nf}. La cantidad de movimiento del sistema se conserva durante la explosión.

Cantidad de movimiento antes = cantidad de movimiento después

$$0 = m_{nf}\upsilon_{nf} + m_p\upsilon_{pf}$$
$$0 = (3.73 \times 10^{-25}\ \text{kg})(\upsilon_{nf}) + (6.6 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.5 \times 10^7\ \text{m/s})$$

Al resolver da

$$-\upsilon_{nf} = \frac{(6.6 \times 10^{-27}\ \text{kg})(1.5 \times 10^7\ \text{m/s})}{3.73 \times 10^{-25}\ \text{kg}} = \frac{10.0 \times 10^{-20}}{3.73 \times 10^{-25}} = 2.7 \times 10^5\ \text{m/s}$$

El hecho de que ésta sea negativa indica que el vector velocidad del núcleo apunta en la dirección negativa, opuesto a la velocidad de la partícula.

8.6 [II] Una pelota de 0.25 kg se mueve a 13 m/s en la dirección $+x$ cuando es golpeada por un bat. Su velocidad final es de 19 m/s en la dirección $-x$. El bat actúa sobre la pelota durante 0.010 s. Calcule la fuerza promedio F que ejerce el bat sobre la pelota.

Se tiene $\upsilon_i = 13$ m/s y $\upsilon_f = -19$ m/s. Tomando la dirección inicial del movimiento como positiva, de la ecuación de impulso se tiene

$$F\,\Delta t = m\upsilon_f - m\upsilon_i$$
$$F(0.010\ \text{s}) = (0.25\ \text{kg})(-19\ \text{m/s}) - (0.25\ \text{kg})(13\ \text{m/s})$$

de donde $F = -0.80$ kN.

8.7 [II] Dos muchachas, cuyas masas son m_1 y m_2, se encuentran en reposo sobre patines de ruedas, una cerca de la otra y frente a frente. La muchacha 1 empuja repentinamente a la muchacha 2 y la pone en movimiento

hacia atrás. Si supone que las muchachas se deslizan libremente sobre sus patines, escriba una expresión para la rapidez con la que se mueve la muchacha 1.

Se considera a las dos muchachas como el sistema a estudiar. El problema establece que la muchacha 2 se mueve "hacia atrás"; sea ésta la dirección negativa. Por tanto, la dirección "hacia adelante" es positiva. Dado que no existe fuerza externa resultante sobre el sistema (el empujón de una muchacha sobre la otra es una fuerza interna), la cantidad de movimiento del sistema se conserva:

$$\text{Cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

de donde

$$v_1 = -\frac{m_2}{m_1} v_2$$

La muchacha 1 retrocede con esta rapidez. Note que, si m_2/m_1 es muy grande, entonces v_1 es mucho más grande que v_2. La velocidad de la muchacha 1, $\vec{\mathbf{v}}_1$, apunta en la dirección positiva (hacia adelante). La velocidad de la muchacha 2, $\vec{\mathbf{v}}_2$, apunta hacia la dirección negativa (hacia atrás). Si se pusiesen números en la ecuación, v_2 tendría que ser negativo y v_1 resultaría positivo.

8.8 [II] Como se muestra en la figura 8-1, una bala de 15 g se dispara horizontalmente hacia un bloque de madera de 3.000 kg que está suspendido de un cordel largo. La bala se incrusta en el bloque. Calcule la rapidez de la bala si, debido al impacto, el bloque se balancea y sube 10 cm por arriba de su nivel inicial.

Primero se considera la colisión del bloque y la bala. Durante la colisión, la cantidad de movimiento se conserva, de modo que

$$\text{Cantidad de movimiento justo antes} = \text{cantidad de movimiento justo después}$$

$$(0.015 \text{ kg})v + 0 = (3.015 \text{ kg})V$$

donde v es la rapidez inicial de la bala y V es la rapidez del bloque y la bala justo después de la colisión.

Se tienen dos incógnitas en esta ecuación. Para encontrar otra ecuación, se puede utilizar el hecho de que el bloque, al balancearse, sube 10 cm. Si se toma $EP_G = 0$ para el nivel inicial del bloque, por conservación de energía

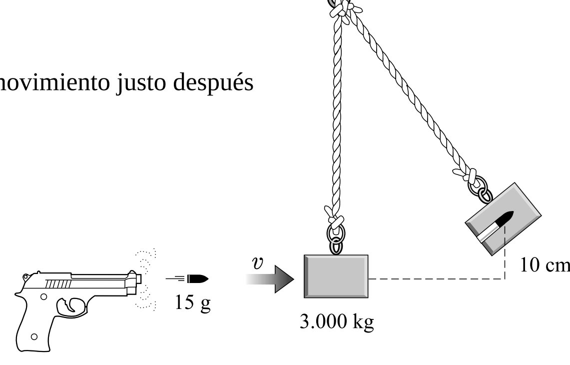


Figura 8-1

$$\text{EC justo después de la colisión} = EP_G \text{ final}$$

$$\tfrac{1}{2}(3.015 \text{ kg})V^2 = (3.015 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(0.10 \text{ m})$$

De donde se determina que $V = 1.40$ m/s. Al sustituir esto en la ecuación anterior se obtiene $v = 0.28$ km/s para la rapidez de la bala.

Observe que no se puede escribir la ecuación de conservación de la energía $\frac{1}{2}mv^2 = (m + M)gh$, donde $m = 0.015$ kg y $M = 3.000$ kg, pues en el proceso de la colisión se pierde energía (a través de la fricción).

8.9 [I] Tres masas se colocan sobre el eje x: 200 g en $x = 0$, 500 g en $x = 30$ cm y 400 g en $x = 70$ cm. Encuentre su centro de masa.

$$x_{\text{cm}} = \frac{\Sigma\, x_i m_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{(0)(0.20 \text{ kg}) + (0.30 \text{ m})(0.50 \text{ kg}) + (0.70 \text{ m})(0.40 \text{ kg})}{(0.20 + 0.50 + 0.40) \text{ kg}} = 0.39 \text{ m}$$

Las coordenadas y y z del centro de masa son cero.

8.10 [II] Un sistema en el plano xy lo constituyen las siguientes masas: 4.0 kg en las coordenadas ($x = 0$, $y = 5.0$ m), 7.0 kg en (3.0 m, 8.0 m) y 5.0 kg en (−3.0 m, −6.0 m). Determine la posición de su centro de masa.

$$x_{cm} = \frac{\Sigma\, x_i m_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{(0)(4.0\text{ kg}) + (3.0\text{ m})(7.0\text{ kg}) + (-3.0\text{ m})(5.0\text{ kg})}{(4.0 + 7.0 + 5.0)\text{ kg}} = 0.38\text{ m}$$

$$y_{cm} = \frac{\Sigma\, y_i m_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{(5.0\text{ m})(4.0\text{ kg}) + (8.0\text{ m})(7.0\text{ kg}) + (-6.0\text{ m})(5.0\text{ kg})}{16\text{ kg}} = 2.9\text{ m}$$

y $z_{cm} = 0$.

8.11 [II] Dos carros de ferrocarril idénticos están sobre un riel horizontal, con una distancia *D* entre sus centros. Por medio de un cable entre los dos, se usa un malacate en uno de ellos para juntarlos. *a*) Describa su movimiento relativo. *b*) Repita el análisis si la masa de uno de los carros es tres veces la masa del otro.

Las fuerzas debidas al cable sobre los dos carros son fuerzas internas para el sistema de ambos carros. La fuerza externa neta sobre el sistema es cero, por lo que su centro de masa no se mueve, aun cuando cada carro se mueva hacia el otro. Tomando el origen del sistema de coordenadas en el centro de masa, se tiene

$$x_{cm} = 0 = \frac{\Sigma\, m_i x_i}{\Sigma\, m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

donde x_1 y x_2 son las posiciones de los centros de los dos carros.

a) Si $m_1 = m_2$, esta ecuación se reduce a

$$0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{o bien} \qquad x_1 = -x_2$$

Ambos carros se aproximan al centro de masa, el cual está originalmente a la mitad del camino entre los dos carros (esto es, a $D/2$ de cada uno), en tal forma que sus centros siempre están equidistantes de él.

b) Si $m_1 = 3m_2$, entonces se tiene

$$0 = \frac{3m_2 x_1 + m_2 x_2}{3m_2 + m_2} = \frac{3x_1 + x_2}{4}$$

de donde $x_1 = -x_2/3$. Los dos carros se aproximan uno al otro de tal forma que el centro de masa permanece sin movimiento y el carro más pesado siempre se encuentra un tercio más alejado de lo que está el carro ligero.

Primero, dado que $|x_1| + |x_2| = D$, se tiene que $x_2/3 + x_2 = D$. Por lo que inicialmente m_2 se encuentra a una distancia $x_2 = 3D/4$ del centro de masa, y m_1 estaba a una distancia $D/4$ de éste.

8.12 [III] Un péndulo que consiste en una pelota de masa *m* se libera desde la posición que se muestra en la figura 8-2 y golpea un bloque de masa *M*. El bloque se desliza una distancia *D* antes de detenerse bajo la acción de una fuerza de fricción continua de 0.20 *Mg*. Calcule la distancia *D* si la pelota rebota a un ángulo de 20°.

La pelota del péndulo cae una altura $(L - L\cos 37°) = 0.201L$ y en el rebote llega a una altura de $(L - L\cos 20°) = 0.0603L$. Dado que para la pelota $(mgh)_{\text{arriba}} = (\frac{1}{2}mv^2)_{\text{abajo}}$, su rapidez en la parte más baja es $v = \sqrt{2gh}$. Así, justo antes de que golpee al bloque la pelota tiene una rapidez igual a $\sqrt{2g(0.201L)}$. Después de que la pelota se eleva a una altura de 0.060 3*L* luego de la colisión debe rebotar con una rapidez inicial de $\sqrt{2g(0.060\,3L)}$.

La EC no se conserva en la colisión, pero la cantidad de movimiento sí. Por tanto, para la colisión,

Cantidad de movimiento justo antes = cantidad de movimiento justo después

$$m\sqrt{2g(0.201L)} + 0 = -m\sqrt{2g(0.060\,3L)} + MV$$

donde *V* es la velocidad del bloque justo después de la colisión. (Observe el signo menos en la cantidad de movimiento de la pelota al rebotar.) Al resolver la ecuación, se encuentra

$$V = \frac{m}{M}0.981\sqrt{gL}$$

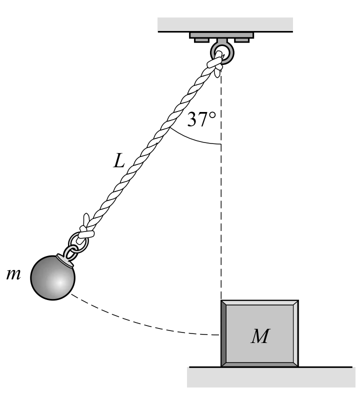


Figura 8-2

El bloque utiliza su EC traslacional al realizar trabajo contra la fricción cuando se desliza una distancia D. Por tanto,

$$\tfrac{1}{2}MV^2 = F_f D \qquad \text{o bien} \qquad \tfrac{1}{2}M(0.963gL)\left(\frac{m}{M}\right)^2 = (0.2Mg)(D)$$

de donde $D = 2.4(m/M)^2 L$.

8.13 [II] Dos pelotas de igual masa se aproximan al origen del sistema de coordenadas: una moviéndose hacia abajo a lo largo del eje $+y$ a 2.00 m/s y la otra hacia la derecha a lo largo del eje $-x$ a 3.00 m/s. Después de chocar, una de las pelotas se mueve hacia la derecha a 1.20 m/s a lo largo del eje $+x$. Calcule las componentes escalares de la velocidad de la otra pelota.

Se toman como positivas las direcciones *arriba* y *derecha*. Como la cantidad de movimiento se conserva en la colisión, se puede escribir

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_x = (\text{cantidad de movimiento después})_x$$

o

$$m(3.0 \text{ m/s}) + 0 = m(1.20 \text{ m/s}) + mv_x$$

y

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_y = (\text{cantidad de movimiento después})_y$$

o

$$0 + m(-2.00 \text{ m/s}) = 0 + mv_y$$

(¿Por qué el signo menos?) Al resolver, se encuentra que $v_x = 1.80$ m/s y que $v_y = -2.00$ m/s.

8.14 [III] Un camión de 7 500 kg que viaja a 5.0 m/s hacia el este choca con un automóvil de 1 500 kg que se mueve a 20 m/s en dirección 30° suroeste. Después de la colisión, los dos vehículos quedan unidos. ¿Con qué rapidez y en qué dirección se mueven los vehículos después del impacto?

Las cantidades de movimiento originales se muestran en la figura 8-3*a*, mientras que la cantidad de movimiento final $M\vec{\mathbf{v}}$ se muestra en la figura 8-3*b*. La cantidad de movimiento se conserva en ambas direcciones, norte y este. Por tanto,

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_{\text{este}} = (\text{cantidad de movimiento después})_{\text{este}}$$
$$(7\,500 \text{ kg})(5.0 \text{ m/s}) - (1\,500 \text{ kg})[(20 \text{ m/s}) \cos 30°] = Mv_E$$

donde $M = 7\,500$ kg $+ 1\,500$ kg $= 9\,000$ kg, y v_E es la componente escalar hacia el este de la velocidad de los vehículos (vea la figura 8-3*b*).

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_{\text{norte}} = (\text{cantidad de movimiento después})_{\text{norte}}$$
$$(7\,500 \text{ kg})(0) - (1\,500 \text{ kg})[(20 \text{ m/s}) \text{ sen } 30°] = Mv_N$$

De la primera ecuación se tiene que $v_E = 1.28$ m/s, y de la segunda se obtiene $v_N = -1.67$ m/s. La velocidad resultante es

$$v = \sqrt{(1.67 \text{ m/s})^2 + (1.28 \text{ m/s})^2} = 2.1 \text{ m/s}$$

El ángulo θ que se muestra en la figura 8-3*b* es

$$\theta = \arctan\left(\frac{1.67}{1.28}\right) = 53°$$

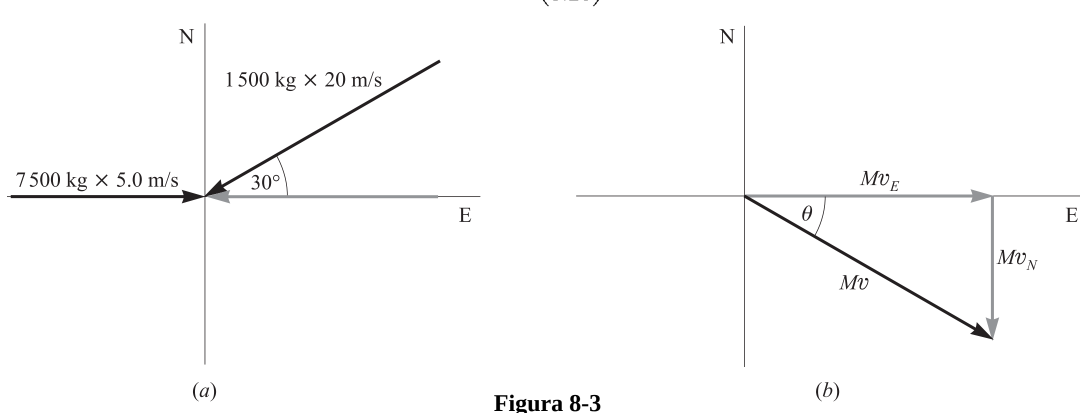


Figura 8-3

8.15 [III] Dos pelotas idénticas chocan de frente. La velocidad inicial de una es 0.75 m/s — HACIA EL ESTE, mientras que la de la otra es 0.43 m/s — HACIA EL OESTE. Si el choque es perfectamente elástico, ¿cuál es la velocidad final de cada pelota?

Debido a que el choque es frontal, todo el movimiento se lleva a cabo en una línea recta. Tome el este como la dirección positiva y sea m la masa de cada pelota. En un choque se conserva la cantidad de movimiento, así que puede escribirse

$$\text{Cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$
$$m(0.75\text{ m/s}) + m(-0.43\text{ m/s}) = mv_1 + mv_2$$

donde v_1 y v_2 son los valores finales. Esta ecuación se simplifica a

$$0.32\text{ m/s} = v_1 + v_2 \tag{1}$$

Ya que la colisión es perfectamente elástica, la EC también se conserva. Así que,

$$\text{EC antes} = \text{EC después}$$

$$\tfrac{1}{2}m(0.75\text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}m(0.43\text{ m/s})^2 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

Esta ecuación se simplifica a

$$0.747 = v_1^2 + v_2^2 \tag{2}$$

Al despejar v_2 en (1) se tiene $v_2 = 0.32 - v_1$, y esto se sustituye en (2). Esto produce

$$0.747 = (0.32 - v_1)^2 + v_1^2$$

con lo cual

$$2v_1^2 - 0.64v_1 - 0.645 = 0$$

Utilizando la fórmula cuadrática, se obtiene

$$v_1 = \frac{0.64 \pm \sqrt{(0.64)^2 + 5.16}}{4} = 0.16 \pm 0.59\text{ m/s}$$

de donde $v_1 = 0.75$ m/s o bien -0.43 m/s. Sustituyendo en la ecuación (1) se obtiene $v_2 = -0.43$ m/s o 0.75 m/s.

Existen dos soluciones posibles:

$$(v_1 = 0.75\text{ m/s}, v_2 = -0.43\text{ m/s}) \qquad \text{y} \qquad (v_1 = -0.43\text{ m/s}, v_2 = 0.75\text{ m/s})$$

La primera posibilidad debe descartarse porque implica que las pelotas continúan su movimiento sin interactuar; esto significa que no ocurre choque. Por ende, la respuesta correcta es $v_1 = -0.43$ m/s y $v_2 = 0.75$ m/s, lo cual significa que, en un choque frontal perfectamente elástico entre masas iguales, los dos cuerpos intercambian sus velocidades. En consecuencia, $\vec{\mathbf{v}}_1 = 0.43$ m/s — HACIA EL OESTE y $\vec{\mathbf{v}}_2 = 0.75$ m/s — HACIA EL ESTE.

Método alternativo

Si recuerda que $e = 1$ para un choque frontal perfectamente elástico, entonces

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \qquad \text{se convierte en} \qquad 1 = \frac{v_2 - v_1}{(0.75\text{ m/s}) - (-0.43\text{ m/s})}$$

lo cual da

$$v_2 - v_1 = 1.18\text{ m/s} \tag{3}$$

Las ecuaciones (1) y (3) determinan v_1 y v_2 en forma única.

8.16 [III] Una pelota de 1.0 kg que se mueve a 12 m/s choca frontalmente con una pelota de 2.0 kg que se desplaza a 24 m/s en la misma dirección pero en sentido contrario. Encuentre la velocidad de cada una de las pelotas después del impacto si *a*) $e = 2/3$, *b*) las pelotas quedan unidas y *c*) el choque es perfectamente elástico.

Para los tres casos, la cantidad de movimiento se conserva y así se puede escribir

$$\text{Cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$
$$(1.0\text{ kg})(12\text{ m/s}) + (2.0\text{ kg})(-24\text{ m/s}) = (1.0\text{ kg})v_1 + (2.0\text{ kg})v_2$$

La cual se convierte en

$$-36\text{ m/s} = v_1 + 2v_2$$

a) Cuando $e = 2/3$,

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \qquad \text{se convierte en} \qquad \frac{2}{3} = \frac{v_2 - v_1}{(12\text{ m/s}) - (-24\text{ m/s})}$$

de donde $24\text{ m/s} = v_2 - v_1$. Al combinar ésta con la ecuación de cantidad de movimiento encontrada anteriormente se obtiene $v_2 = -4.0\text{ m/s}$ y $v_1 = -28\text{ m/s}$.

b) En este caso $v_1 = v_2 = v$, y así la ecuación de cantidad de movimiento se transforma en

$$3v = -36\text{ m/s} \qquad \text{o} \qquad v = -12\text{ m/s}$$

c) Aquí $e = 1$, y por tanto

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} \qquad \text{se convierte en} \qquad 1 = \frac{v_2 - v_1}{(12\text{ m/s}) - (-24\text{ m/s})}$$

de donde $v_2 - v_1 = 36\text{ m/s}$. Al sumar esto a la de cantidad de movimiento se obtiene $v_2 = 0$. Utilizando este valor para v_2, se produce $v_1 = -36\text{ m/s}$.

8.17 [III] Se deja caer una pelota desde una altura *h* sobre un piso de loseta y rebota a una altura de $0.65h$. Encuentre el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso.

Las velocidades inicial y final del piso, u_1 y v_1, son cero. Por tanto,

$$e = \frac{v_2 - v_1}{u_1 - u_2} = -\frac{v_2}{u_2}$$

Pero se pueden escribir ecuaciones para el intercambio de EP_G y EC tanto antes como después del rebote:

$$mgh = \tfrac{1}{2}mu_2^2 \qquad \text{y} \qquad mg(0.65h) = \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

En consecuencia, si se considera *hacia abajo* como positivo, $u_2 = \sqrt{2gh}$ y $v_2 = -\sqrt{1.30gh}$. La sustitución produce

$$e = \frac{\sqrt{1.30gh}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{0.65} = 0.81$$

8.18 [III] Las dos bolas que se muestran en la figura 8-4 chocan fuera de sus centros y rebotan como se muestra. *a*) ¿Cuál es la velocidad final de la bola de 500 g si la bola de 800 g tiene una rapidez de 15 cm/s después del choque? *b*) ¿La colisión es perfectamente elástica?

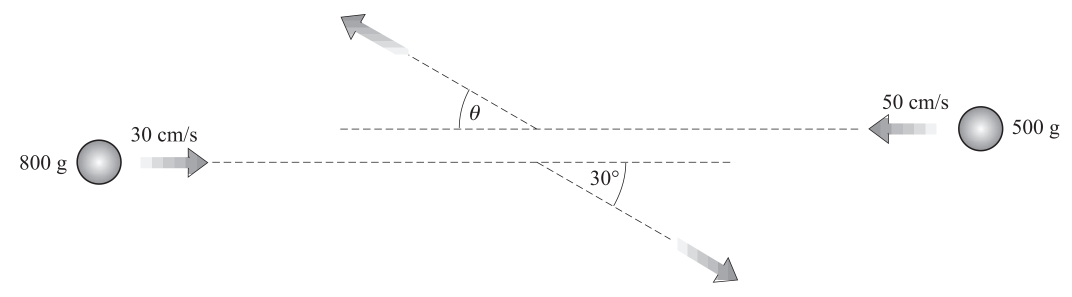


Figura 8-4

a) Se toma como positivo el movimiento a la derecha. A partir de la ley de conservación de la cantidad de movimiento,

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_x = (\text{cantidad de movimiento después})_x$$
$$(0.80\text{ kg})(0.30\text{ m/s}) + (0.50\text{ kg})(-0.5\text{ m/s}) = (0.80\text{ kg})[(0.15\text{ m/s})\cos 30°] + (0.50\text{ kg})v_x$$

de donde $v_x = -0.228$ m/s. Tomando la dirección hacia arriba como positiva

$$(\text{cantidad de movimiento antes})_y = (\text{cantidad de movimiento después})_y$$
$$0 = (0.80 \text{ kg})[-(0.15 \text{ m/s}) \text{ sen } 30°] + (0.50 \text{ kg})v_y$$

de donde $v_y = 0.120$ m/s. Entonces

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-0.228 \text{ m/s})^2 + (0.120 \text{ m/s})^2} = 0.26 \text{ m/s}$$

y v = 0.26 m/s — HACIA LA DERECHA.

Además, para el ángulo θ que se muestra en la figura 8-4,

$$\theta = \arctan\left(\frac{0.120}{0.228}\right) = 28°$$

b) EC total antes $= \frac{1}{2}(0.80 \text{ kg})(0.30 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.50 \text{ kg})(0.50 \text{ m/s})^2 = 0.099$ J

EC total después $= \frac{1}{2}(0.80 \text{ kg})(0.15 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.50 \text{ kg})(0.26 \text{ m/s})^2 = 0.026$ J

Puesto que en la colisión se pierde EC, ésta no es perfectamente elástica.

8.19 [II] ¿Qué fuerza se ejerce sobre una placa plana estacionaria sostenida perpendicularmente a la salida de un chorro de agua, como se muestra en la figura 8-5? La rapidez horizontal del agua es de 80 cm/s y 30 mL de agua golpean la placa cada segundo. Suponga que el agua se mueve paralela a la placa después de que choca con ella. Un mililitro (mL) de agua tiene una masa de 1.00 g.

La placa ejerce un impulso sobre el agua y cambia su cantidad de movimiento horizontal. Tomando la dirección a la derecha como positiva,

$$(\text{impulso})_x = \text{cambio en la cantidad de movimiento en la dirección } x$$
$$F_x \Delta t = (mv_x)_{\text{final}} - (mv_x)_{\text{inicial}}$$

Sea $t = 1.00$ s y sea m la masa que choca con la placa en 1.00 s, a saber, 30 g. Entonces la ecuación anterior se convierte en

$$F_x (1.00 \text{ s}) = (0.030 \text{ kg})(0 \text{ m/s}) - (0.030 \text{ kg})(0.80 \text{ m/s})$$

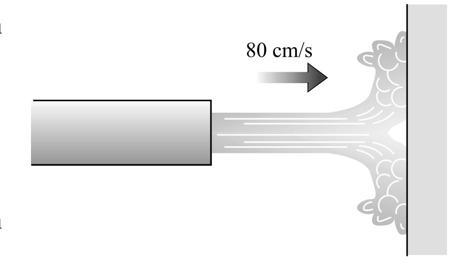


Figura 8-5

de la cual $F_x = -0.024$ N. Ésta es la fuerza que ejerce la placa sobre el agua. La ley de acción y reacción establece que el chorro ejerce una fuerza igual en magnitud, pero de sentido contrario, sobre la placa.

8.20 [III] Un cohete erguido en su plataforma de lanzamiento apunta en línea recta hacia arriba. Sus motores se encienden y expulsan gas a una tasa de 1 500 kg/s. Las moléculas son expulsadas con una rapidez de 50 km/s. ¿Cuánta masa puede tener el cohete al inicio, si se va a elevar lentamente, debido al empuje de sus motores?

Ya que el movimiento del cohete en sí es despreciable en comparación con la rapidez de los gases expulsados, se puede suponer que el gas se acelera desde el reposo hasta una rapidez de 50 km/s. El impulso que se requiere para provocar esta aceleración a la masa m del gas es

$$F\Delta t = mv_f - mv_i = m(50\,000 \text{ m/s}) - 0$$

de donde

$$F = (50\,000 \text{ m/s})\frac{m}{\Delta t}$$

Pero, además, se sabe que la masa expulsada por segundo ($m/\Delta t$) es 1 500 kg/s y por tanto la fuerza ejercida sobre el gas expulsado es

$$F = (50\,000 \text{ m/s})(1\,500 \text{ kg/s}) = 75 \text{ MN}$$

Una fuerza de reacción igual y opuesta actúa sobre el cohete y este es el empuje ascendente que experimenta. En consecuencia, los motores pueden soportar un peso de 75 MN y así la masa máxima que tendrá el cohete será

$$M_{\text{cohete}} = \frac{\text{peso}}{g} = \frac{75 \times 10^6 \text{ N}}{9.81 \text{ m/s}^2} = 7.6 \times 10^6 \text{ kg}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

8.21 [I] Por lo general, una pelota de tenis golpeada durante un servicio viaja a alrededor de 51 m/s. Si la pelota se encuentra en reposo en medio del aire al ser golpeada y tiene una masa de 0.058 kg, ¿cuál es el cambio en su cantidad de movimiento al salir de la raqueta? **Resp.** 3.0 kg · m/s.

8.22 [I] Durante un juego de fútbol soccer, una pelota (cuya masa es de 0.425 kg), que inicialmente está en reposo, es pateada por uno de los jugadores. La pelota sale disparada a 26 m/s. Dado que el impacto duró 8.0 ms, ¿cuál fue la fuerza promedio ejercida sobre la pelota? **Resp.** 1.4 kN.

8.23 [II] Un camión de carga de 40 000 kg viaja con una rapidez de 5.0 m/s a lo largo de una pista recta y choca con un camión de carga estacionado de 30 000 kg, y queda enganchado. ¿Cuál será la rapidez combinada después del impacto? **Resp.** 2.9 m/s.

8.24 [I] Un camión de carga vacío de 15 000 kg viaja por una pista plana a 5.00 m/s. Súbitamente se dejan caer dentro del camión, directamente desde arriba, 5 000 kg de carbón. Inicialmente, la velocidad del carbón en la dirección horizontal es cero con respecto al suelo. Encuentre la rapidez final del camión. **Resp.** 3.75 m/s.

8.25 [II] Se deja caer arena a una tasa de 2 000 kg/min desde la parte final de una tolva estacionaria sobre una banda transportadora que se mueve horizontalmente a 250 m/min. Determine la fuerza necesaria para impulsar la banda transportadora, despreciando la fricción. **Resp.** 139 N.

8.26 [II] Dos cuerpos cuyas masas son 8 kg y 4 kg se mueven a lo largo del eje *x* en sentidos opuestos con velocidades de 11 m/s — DIRECCIÓN *x* POSITIVA y 7 m/s —DIRECCIÓN *x* NEGATIVA, respectivamente. Después de chocar, los cuerpos quedan unidos. Encuentre su velocidad después del choque. **Resp.** 5 m/s —DIRECCIÓN *x* POSITIVA.

8.27 [II] Un cañón de 1 200 kg montado sobre ruedas dispara un proyectil de 8.00 kg con una velocidad en la boca del cañón de 600 m/s, formando un ángulo de 30.0° por arriba de la horizontal. Determine la rapidez horizontal de retroceso del cañón. **Resp.** 3.46 m/s.

8.28 [I] Tres masas se sitúan en el eje *y*: una de 2 kg en $y = 300$ cm, otra de 6 kg en $y = 150$ cm y la tercera de 4 kg en $y = -75$ cm. Encuentre la posición de su centro de masa. **Resp.** $y = 1$ m.

8.29 [II] Cuatro masas están ubicadas en el plano *xy* como se describe a continuación: 300 g en ($x = 0$, $y = 2.0$ m), 500 g en (-2.0 m, -3.0 m), 700 g en (50 cm, 30 cm) y 900 g en (-80 cm, 150 cm). Determine la posición del centro de masa. **Resp.** $x = -0.57$ m, $y = 0.28$ m.

8.30 [II] Una bola de masa *m* situada en el origen de un sistema de referencia explota y se divide en dos piezas que salen disparadas a lo largo del eje *x* en sentidos opuestos. Cuando una de las piezas (que tiene una masa de 0.270 *m*) se encuentra en $x = 70$ cm, ¿dónde se encuentra la otra pieza? (*Sugerencia*: ¿Qué sucede con el centro de masa?) **Resp.** En $x = -26$ cm.

8.31 [II] Una bola de masa *m* en reposo se localiza en el origen del sistema de referencia cuando explota y se divide en tres piezas idénticas. En cierto momento, una pieza está sobre el eje *x* en $x = 40$ cm y otra se encuentra en $x = 20$ cm, $y = -60$ cm. ¿Dónde se halla la tercera pieza en ese instante? **Resp.** En $x = -60$ cm, $y = 60$ cm.

8.32 [II] Un bloque de madera de 2.0 kg descansa sobre una larga mesa. Una bala de 5.0 g que se mueve horizontalmente con una rapidez de 150 m/s se dispara hacia el bloque y se incrusta en él. Entonces el bloque se desliza 270 cm a lo largo de la mesa y se detiene. *a*) ¿Cuál es la rapidez del bloque justo después del impacto? *b*) Determine la fuerza de fricción entre el bloque y la mesa. **Resp.** *a*) 0.37 m/s; *b*) 0.052 N.

8.33 [II] Un bloque de madera de 2.0 kg está sobre una mesa. Se dispara una bala de 7.0 g directo a través de un orificio en la mesa, debajo del bloque. La bala se incrusta en el bloque y éste se levanta 25 cm por encima de la mesa. ¿Cuál es la velocidad inicial de la bala? **Resp.** 0.64 km/s.

8.34 [III] Un camión de carga de 6 000 kg viaja hacia el norte a 5.0 m/s y choca con otro camión de 4 000 kg que se dirige hacia el oeste a 15 m/s. Si los dos camiones permanecen unidos después del impacto, ¿con qué rapidez y en qué dirección se moverán inmediatamente después del impacto? **Resp.** 6.7 m/s a 27° al noroeste.

8.35 [I] ¿Cuál es la fuerza de resistencia promedio que debe actuar sobre una masa de 3.0 kg para reducir su rapidez de 65 cm/s a 15 cm/s en 0.20 s? **Resp.** 7.5 N.

8.36 [II] Una bala de 7.00 g que se mueve horizontalmente a 200 m/s golpea y pasa a través de una lata de aluminio de 150 g colocada sobre un poste. Justo después de la colisión, la lata tiene una rapidez horizontal de 180 cm/s. ¿Cuál fue la rapidez de la bala después de salir de la lata? **Resp.** 161 m/s.

8.37 [III] Dos bolas de igual masa, que se mueven con rapidez de 3 m/s, chocan de frente. Encuentre la rapidez de cada una después del impacto si *a*) quedan unidas, *b*) el choque es perfectamente elástico, *c*) el coeficiente de restitución es de 1/3. **Resp.** *a*) 0 m/s; *b*) cada una rebota a 3 m/s; *c*) cada una rebota a 1 m/s.

8.38 [III] Una pelota de 90 g que se mueve a 100 cm/s choca de frente con otra pelota de 10 g que se encuentra en reposo. Determine la rapidez de cada una después del impacto, si *a*) quedan unidas, *b*) la colisión es perfectamente elástica, *c*) el coeficiente de restitución es de 0.90. **Resp.** *a*) 90 cm/s; *b*) 80 cm/s, 1.8 m/s; *c*) 81 cm/s, 1.7 m/s.

8.39 [II] Se deja caer una pelota sobre un piso horizontal y alcanza una altura de 144 cm en el primer rebote y 81 cm en el segundo. Encuentre *a*) el coeficiente de restitución entre la pelota y el piso, *b*) la altura que alcanza en el tercer rebote. **Resp.** *a*) 0.75; *b*) 46 cm.

8.40 [II] Dos pelotas idénticas sufren una colisión en el origen de los ejes coordenados. Antes del choque, las componentes de sus velocidades eran ($u_x = 40$ cm/s, $u_y = 0$) y ($u_x = -30$ cm/s, $u_y = 20$ cm/s). Después de la colisión, la primera pelota queda en reposo. Determine las componentes de la velocidad de la segunda pelota.
Resp. $v_x = 10$ cm/s, $v_y = 20$ cm/s.

8.41 [II] Dos pelotas idénticas que viajan paralelas al eje *x* tienen rapideces de 30 cm/s, en sentidos opuestos. Sufren una colisión perfectamente elástica fuera de sus centros. Después del choque, una de las pelotas se mueve en un ángulo de 30° sobre el eje $+x$. Encuentre su rapidez y la velocidad de la otra pelota.
Resp. 30 cm/s, 30 cm/s a 30° debajo del eje $-x$ (opuesto a la primera pelota).

8.42 [II] *a*) ¿Cuál es el mínimo empuje que deben tener los motores de un cohete de 2.0×10^5 kg si éste debe ser capaz de elevarse verticalmente desde el suelo? *b*) Si los motores expulsan gas a una tasa de 20 kg/s, ¿con qué rapidez deben moverse los gases a la salida de los motores? Desprecie el pequeño cambio en la masa del cohete debido al combustible que expulsa. **Resp.** *a*) 20×10^5 N; *b*) 98 km/s.

MOVIMIENTO ANGULAR EN UN PLANO

9

EL DESPLAZAMIENTO ANGULAR (θ) generalmente se expresa en radianes, grados o revoluciones:

$$1 \text{ rev} = 360° = 2\pi \text{ rad} \qquad \text{o bien} \qquad 1 \text{ rad} = 57.3°$$

Un radián es el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco de igual longitud que el radio del círculo. Así, un ángulo θ en radianes está dado en términos de la longitud del arco l que éste subtiende sobre un círculo de radio r por

$$\theta = \frac{l}{r}$$

La medida en radianes de un ángulo es un número adimensional. Los radianes, como los grados, no son una unidad física; el radián no se puede expresar en términos de metros, kilogramos o segundos. No obstante, se usará la abreviatura rad para recordar que se trabaja con radianes. Como se verá pronto, el “rad” no siempre se incluye de manera consistente en las ecuaciones. Se quitará e insertará cuando sea necesario.

LA RAPIDEZ ANGULAR (ω) de un objeto, cuyo eje de rotación es fijo, es la tasa a la que cambia con el tiempo la coordenada angular, el desplazamiento angular θ. Si θ cambia de θ_i a θ_f en un tiempo t, entonces la **rapidez angular promedio** es

$$\omega_{prom} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t}$$

Las unidades de ω_{prom} son exclusivamente rad/s. Dado que cada vuelta completa o ciclo de un sistema en rotación hace un recorrido de 2π rad

$$\omega = 2\pi f$$

donde f es la **frecuencia** en revoluciones por segundo, rotaciones por segundo o ciclos por segundo. En consecuencia, ω también se conoce como **frecuencia angular**. A ω se le puede asociar una dirección y, de este modo, crear una cantidad vectorial $\vec{\omega}$. Así, si los dedos de la mano derecha se curvan en la dirección de la rotación, el pulgar apunta a lo largo del eje de rotación en la dirección de $\vec{\omega}$, el vector **velocidad angular**.

LA ACELERACIÓN ANGULAR (α) de un objeto, cuyo eje de rotación es fijo, es la tasa a la que su rapidez angular cambia con el tiempo. Si la rapidez angular cambia uniformemente de ω_i a ω_f en un tiempo t, entonces la **aceleración angular** es constante y

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$$

Las unidades típicas de α son rad/s^2, rev/min^2, etc. Es posible asociar una dirección a $\Delta\omega$ y, por tanto a α, con lo que se especifica el vector aceleración angular $\vec{\alpha}$, pero no necesitaremos hacerlo en lo que sigue.

LAS ECUACIONES PARA EL MOVIMIENTO ANGULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO son exactamente análogas a las del movimiento lineal uniformemente acelerado. En la notación acostumbrada, se tiene

Lineal	Angular
$v_{prom} = \frac{1}{2}(v_i + v_f)$	$\omega_{prom} = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)$
$s = v_{prom}t$	$\theta = \omega_{prom}t$
$v_f = v_i + at$	$\omega_f = \omega_i + \alpha t$
$v_f^2 = v_i^2 + 2as$	$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$
$s = v_i t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Tomadas por separado, la segunda ecuación es la definición de rapidez promedio, y es válida, sea la aceleración constante o no.

RELACIONES ENTRE CANTIDADES ANGULARES Y TANGENCIALES: Cuando un disco de radio r gira alrededor de un eje central fijo, un punto en la orilla del disco se describe en términos de la distancia de la circunferencia l que se ha desplazado, su rapidez tangencial v y su aceleración tangencial a_T. Estas cantidades se relacionan con las cantidades angulares θ, ω y α, que describen la rotación de la rueda, mediante las relaciones

$$l = r\theta \qquad v = r\omega \qquad a_T = r\alpha$$

siempre y cuando se utilice una medida en radianes para θ, ω y α.

Por simple razonamiento se demuestra que l es la distancia recorrida por un punto sobre una banda transportadora enrollada sobre una parte de una rueda giratoria, o la distancia que giraría una rueda (sin deslizarse) si estuviera en libertad de hacerlo. En tales casos, v y a_T se refieren a la rapidez y la aceleración tangenciales de un punto en la banda transportadora, o del centro de la rueda, en donde r es el radio de la rueda. Esto se aprecia en la figura 9-1, la cual presenta una rueda giratoria que acelera de manera uniforme a una razón de cambio angular α (sin deslizarse). El movimiento de la rueda se puede considerar como una combinación de una rotación simultánea respecto a su centro O, y una traslación de O a O''. El punto que al inicio toca el suelo (A), de hecho gira en A' a través de un ángulo θ, y se traslada a A'' sobre una distancia $l_O = r\theta$, lo cual también es la distancia que se traslada O. Visto por alguien que está quieto, A se mueve a lo largo de un cicloide (la curva punteada) a su posición en A''. La rapidez con la que se traslada O en cualquier instante es $v_O = r\omega$, en donde ω es la rapidez angular en ese instante. La aceleración lineal (o tangencial) de O, que es constante pues α es constante, es $a_{TO} = r\alpha$.

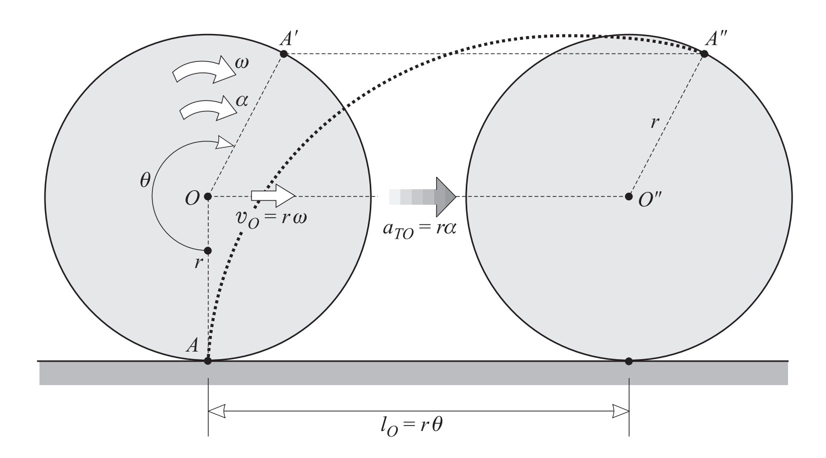


Figura 9-1

ACELERACIÓN CENTRÍPETA (a_C)**:** Una masa puntual m que se mueve con rapidez constante v en un círculo de radio r experimenta aceleración. Aunque la magnitud de su velocidad lineal no cambia, la dirección de la velocidad cambia continuamente. Este cambio en la velocidad da origen a una aceleración a_C de la masa, dirigida hacia el centro del círculo. A esta aceleración se le llama **aceleración centrípeta**; su magnitud está dada por

$$a_C = \frac{(\text{rapidez tangencial})^2}{\text{radio de la trayectoria circular}} = \frac{v^2}{r}$$

donde v es la rapidez de la masa en su desplazamiento perimetral en el círculo.

Como $v = r\omega$, también se tiene $a_C = r\omega^2$, donde ω debe estar en rad/s. Advierta que, en física, es común usar la palabra "aceleración" como una cantidad escalar o vectorial. Por fortuna, suele no haber ambigüedad.

LA FUERZA CENTRÍPETA ($\vec{\mathbf{F}}_C$) es la fuerza que debe actuar sobre una masa m que se mueve en una trayectoria circular de radio r para proporcionarle la aceleración centrípeta requerida v^2/r. De la ecuación $F = ma$, se tiene

$$F_C = \frac{mv^2}{r} = mr\omega^2$$

en donde $\vec{\mathbf{F}}_C$ se dirige hacia el centro de la trayectoria circular. La fuerza centrípeta no es un nuevo tipo de fuerza; sólo es el nombre dado a cualquier fuerza (sea la de gravedad, la tensión en una cuerda, el magnetismo, la fricción, etc.) que causa que un objeto se mueva (fuera de su trayectoria inercial de línea recta) a lo largo de un arco.

PROBLEMAS RESUELTOS

9.1 [I] Exprese cada una de las siguientes cantidades en términos de otras medidas angulares: *a*) 28°, *b*) $\frac{1}{4}$ rev/s, *c*) 2.18 rad/s^2.

a)
$$28° = (28\text{ grados})\left(\frac{1\text{ rev}}{360\text{ grados}}\right) = 0.078\text{ rev}$$
$$= (28\text{ grados})\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{360\text{ grados}}\right) = 0.49\text{ rad}$$

b)
$$\frac{1}{4}\,\frac{\text{rev}}{\text{s}} = \left(0.25\,\frac{\text{rev}}{\text{s}}\right)\left(\frac{360\text{ grados}}{1\text{ rev}}\right) = 90\,\frac{\text{grados}}{\text{s}}$$
$$= \left(0.25\,\frac{\text{rev}}{\text{s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{ rad}}{1\text{ rev}}\right) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

c)
$$2.18\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = \left(2.18\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{360\text{ grados}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 125\,\frac{\text{grados}}{\text{s}^2}$$
$$= \left(2.18\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 0.347\,\frac{\text{rev}}{\text{s}^2}$$

9.2 [I] La lenteja de un péndulo de 90 cm de longitud se balancea en un arco de 15 cm, como se muestra en la figura 9-2. Encuentre el ángulo de oscilación θ, en radianes y en grados.

Recuerde que $l = r\theta$ sólo se aplica a ángulos medidos en radianes. Entonces, en radianes

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{0.15\text{ m}}{0.90\text{ m}} = 0.167\text{ rad} = 0.17\text{ rad}$$

Entonces en grados
$$\theta = (0.167\text{ rad})\left(\frac{360\text{ grados}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 9.6°$$

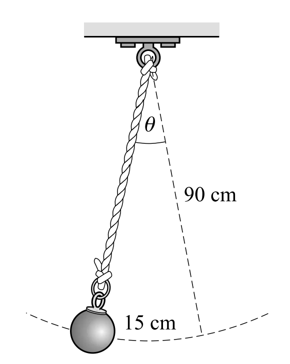


Figura 9-2

9.3 [I] Un ventilador gira a una tasa de 900 rpm (rev/min). *a*) Calcule la rapidez angular de cualquier punto que se encuentre sobre las aspas del ventilador. *b*) Determine la rapidez tangencial del extremo del aspa, si la distancia desde el centro al extremo es de 20.0 cm.

a)
$$f = 900\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} = 15.0\,\frac{\text{rev}}{\text{s}}$$

y puesto que $\omega = 2\pi f$

$$\omega = 94.2\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

para todos los puntos del aspa.

b) La rapidez tangencial es $r\omega$, donde ω debe estar en radianes. Por tanto,

$$v = r\omega = (0.200\text{ m})\,(94.2\text{ rad/s}) = 18.8\text{ m/s}$$

Note que el radián no aparece propiamente en las ecuaciones; se debe anotar y borrar sólo cuando sea necesario.

9.4 [I] Una banda pasa por una rueda de 25 cm de radio, como se muestra en la figura 9-3. Si un punto en la banda tiene una rapidez de 5.0 m/s, ¿qué tan rápido gira la rueda?

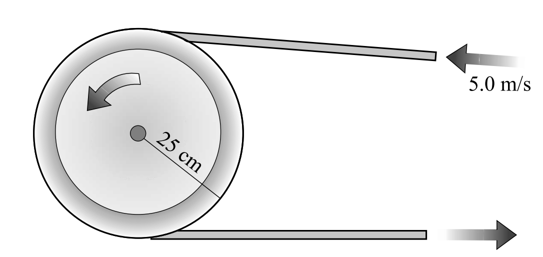


Figura 9-3

Un punto en la circunferencia de la rueda (es decir, sobre la banda) se mueve a una rapidez lineal $v = r\omega$. Así,

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{5.0 \text{ m/s}}{0.25 \text{ m}} = 20 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Como regla, ω resulta en unidades de s^{-1} y el radián debe insertarse de modo adecuado.

9.5 [I] Una rueda de 40 cm de radio gira sobre un eje estacionario. Su rapidez aumenta uniformemente desde el reposo hasta una rapidez de 900 rpm en un tiempo de 20 s. Encuentre *a*) la aceleración angular constante de la rueda y *b*) la aceleración tangencial de un punto que se encuentra en su borde.

a) Como la aceleración es constante, se puede usar la definición $\alpha = (\omega_f - \omega_i)/t$ para obtener

$$\alpha = \frac{\left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right)\left(\frac{900 \text{ rev}}{60 \text{ s}}\right) - \left(2\pi \frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right)\left(0 \ \frac{\text{rev}}{\text{s}}\right)}{20 \text{ s}} = 4.7 \ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

b) Entonces $$a_T = r\alpha = (0.40 \text{ m})\left(4.7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right) = 1.88 \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1.9 \text{ m/s}^2$$

9.6 [II] Una polea de 5.0 cm de radio, en un motor, gira a 30 rev/s y disminuye su velocidad uniformemente a 20 rev/s en 2.0 s. Calcule *a*) la aceleración angular del motor, *b*) el ángulo al que da las vueltas en este tiempo y *c*) la longitud de la banda que se enrolla durante este lapso.

Debido a que la polea desacelera, se puede anticipar que α será negativa:

a) $$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = 2\pi \frac{(20 - 30) \text{ rad/s}}{2.0 \text{ s}} = -10\pi \text{ rad/s}^2$$

Y hasta dos cifras significativas,

b) $$\theta = \omega_{prom} t = \tfrac{1}{2}(\omega_f + \omega_i)t = \tfrac{1}{2}(100\pi \text{ rad/s})(2.0 \text{ s}) = 100\pi \text{ rad} = 1.0 \times 10^2 \pi \text{ rad}$$

c) Con $\theta = 314$ rad

$$l = r\theta = (0.050 \text{ m})(314 \text{ rad}) = 16 \text{ m}$$

9.7 [II] Un automóvil tiene llantas de 30 cm de radio. Parte del reposo y (sin deslizamiento) acelera uniformemente hasta una rapidez de 15 m/s en un tiempo de 8.0 s. Encuentre la aceleración angular de sus llantas y el número de vueltas que da una llanta en este tiempo.

Recuerde que el centro de la rueda acelera tangencialmente a la misma tasa que lo hace un punto en su circunferencia. Se sabe que $a_T = (v_f - v_i)/t$, por tanto

$$a_T = \frac{15 \text{ m/s}}{8.0 \text{ s}} = 1.875 \text{ m/s}^2$$

Entonces $a_T = r\alpha$ da

$$\alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{1.875 \text{ m/s}^2}{0.30 \text{ m}} = 6.2 \text{ rad/s}^2$$

Observe que se deben introducir las unidades angulares correctas, radianes.

Ahora se puede utilizar $\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ para calcular

$$\theta = 0 + \tfrac{1}{2}(6.2 \text{ rad/s}^2)(8.0 \text{ s})^2 = 200 \text{ rad}$$

y para obtener el número correspondiente de vueltas se divide entre 2π,

$$(200 \text{ rad})\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 32 \text{ rev}$$

9.8 [II] La centrífuga de secado de una lavadora que gira a 900 rpm frena uniformemente a 300 rpm mientras efectúa 50 revoluciones. Calcule *a*) la aceleración angular y *b*) el tiempo requerido para completar las 50 revoluciones.

Fácilmente se encuentra que 900 rev/min = 15.0 rev/s = 30.0π rad/s y 300 rev/min = 5.00 rev/s = 10.0π rad/s.

a) De la ecuación $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$, se tiene

$$\alpha = \frac{\omega_f^2 - \omega_i^2}{2\theta} = \frac{(10.0\pi\ \text{rad/s})^2 - (30.0\pi\ \text{rad/s})^2}{2(100\pi\ \text{rad})} = -4.0\pi\ \text{rad/s}^2$$

b) Como $\omega_{prom} = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f) = 20.0\pi$ rad/s, $\theta = \omega_{prom}t$ produce

$$t = \frac{\theta}{\omega_{prom}} = \frac{100\pi\ \text{rad}}{20.0\pi\ \text{rad/s}} = 5.0\ \text{s}$$

9.9 [II] Un objeto de 200 g se amarra al extremo de una cuerda y lo hace girar en un círculo horizontal de 1.20 m de radio a unas constantes 3.0 rev/s. Suponga que la cuerda se encuentra en posición horizontal, es decir, el efecto de la gravedad se puede despreciar. Determine *a*) la aceleración del objeto y *b*) la tensión en la cuerda.

a) El objeto no acelera tangencialmente al círculo, pero sufre una aceleración radial o centrípeta dada por

$$a_C = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$

donde ω debe estar en rad/s. Puesto que 3.0 rev/s = 6.0π rad/s,

$$a_C = (6.0\pi\ \text{rad/s})^2(1.20\ \text{m}) = 426\ \text{m/s}^2 = 0.43\ \text{km/s}^2$$

b) Para producir la aceleración calculada en *a*), la cuerda debe tirar de la masa de 0.200 kg con una fuerza centrípeta dada por

$$F_C = ma_C = (0.200\ \text{kg})(426\ \text{m/s}^2) = 85\ \text{N}$$

Ésta es la tensión en la cuerda.

9.10 [II] ¿Cuál es la máxima rapidez con la que un automóvil puede tomar una curva de 25 m de radio en un camino plano si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es 0.80?

La fuerza radial requerida para mantener al auto en la curva (fuerza centrípeta) es proporcionada por la fuerza de fricción entre las llantas y el camino. Si la masa del auto es *m*, entonces la máxima fuerza de fricción (en este caso la centrípeta) es de $\mu_e F_N$ o 0.80*mg*; ésta surge cuando el auto está a punto de derrapar hacia los lados. Por tanto, la máxima rapidez está dada por

$$\frac{mv^2}{r} = 0.80mg \qquad \text{o} \qquad v = \sqrt{0.80gr} = \sqrt{(0.80)(9.81\ \text{m/s}^2)(25\ \text{m})} = 14\ \text{m/s}$$

9.11 [II] Una nave espacial orbita la Luna a una altura de 20 000 m. Si supone que sólo está sujeta al jalón gravitacional de la Luna, encuentre su rapidez y el tiempo que tarda en completar una órbita. Para la Luna, $m_L = 7.34 \times 10^{22}$ kg y $r = 1.738 \times 10^6$ m.

La fuerza gravitacional de la Luna sobre la nave proporciona la fuerza centrípeta requerida:

$$G = \frac{m_n m_L}{R^2} = \frac{m_n v^2}{R}$$

donde *R* es el radio de la órbita. Al resolver se encuentra que

$$v = \sqrt{\frac{Gm_L}{R}} = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(7.34 \times 10^{22}\ \text{kg})}{(1.738 + 0.020\,0) \times 10^6\ \text{m}}} = 1.67\ \text{km/s}$$

de donde se deduce que

$$\text{Tiempo para una órbita} = \frac{2\pi R}{v} = 6.62 \times 10^3\ \text{s} = 110\ \text{min}$$

9.12 [II] Como se muestra en la figura 9-4, una pelota *B* está amarrada a un extremo de un cordel de 24 cm de longitud, y el otro extremo se encuentra sujeto a un punto fijo *Q*. La pelota se mueve en un círculo horizontal como se muestra. Encuentre la rapidez de la pelota en su trayectoria circular si el cordel forma un ángulo de 30° con la vertical.

Las únicas fuerzas que actúan sobre la pelota son su peso *mg* y la tensión F_T en el cordel. La tensión debe hacer dos cosas: 1) balancear el peso de la pelota mediante su componente vertical, F_T cos 30°; 2) proporcionar la fuerza centrípeta requerida por medio de su componente horizontal, F_T sen 30°. Entonces se puede escribir

$$F_T \cos 30^\circ = mg \qquad \text{y} \qquad F_T \text{ sen } 30^\circ = \frac{mv^2}{r}$$

Al resolver para F_T en la primera ecuación y sustituirlo en la segunda se llega a

$$\frac{mg \text{ sen } 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{mv^2}{r} \qquad \text{o} \qquad v = \sqrt{rg(0.577)}$$

Sin embargo, $r = \overline{BC} = (0.24 \text{ m}) \text{ sen } 30^\circ = 0.12 \text{ m}$ y $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, de donde $v = 0.82$ m/s.

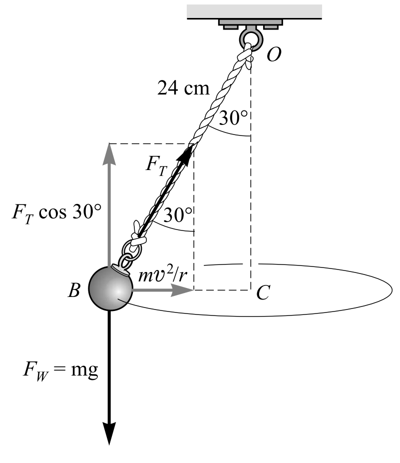


Figura 9-4

9.13 [III] Como se muestra en la figura 9-5, una cuenta de 20 g resbala desde el reposo en el punto *A* a lo largo de un alambre sin fricción. Si *h* tiene 25 cm y *R* tiene 5.0 cm, ¿cuál es la magnitud de la fuerza que el alambre debe ejercer sobre la cuenta en *a*) el punto *B* y *b*) el punto *D*?

a) Como regla general, recuerde conservar unas cuantas cifras significativas más en los pasos intermedios del cálculo que las que se van a encontrar en la respuesta. Esto evitará los errores por redondeo. Calcule primero la rapidez de la cuenta en el punto *B*. Ésta ha caído una distancia $h - 2R$ y por tanto su pérdida de EP_G es $mg(h - 2R)$. Ésta debe ser igual a la EC en el punto *B*:

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = mg(h - 2R)$$

donde v es la rapidez de la cuenta en el punto *B*. Por consiguiente,

$$v = \sqrt{2g(h - 2R)} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.15 \text{ m})} = 1.716 \text{ m/s}$$

Como se muestra en la figura 9-5*b*, dos fuerzas actúan sobre la cuenta cuando se encuentra en *B*: 1) el peso de la cuenta *mg* y 2) la fuerza *F* (considerada hacia abajo) del alambre sobre la cuenta. En conjunto, estas dos fuerzas deben proporcionar la fuerza centrípeta requerida, mv^2/R, si la cuenta sigue la trayectoria circular. Por tanto, se puede escribir

$$mg + F = \frac{mv^2}{R}$$

o

$$F = \frac{mv^2}{R} - mg = (0.020 \text{ kg})\left[\left(\frac{1.716^2}{0.050} - 9.81\right) \text{ m/s}^2\right] = 0.98 \text{ N}$$

El alambre debe ejercer una fuerza hacia abajo de 0.98 N sobre la cuenta para mantenerla en trayectoria circular.

b) La situación es similar en el punto *D*, pero ahora el peso es perpendicular a la dirección de la fuerza centrípeta requerida. Por tanto, el alambre sólo debe proporcionar esta fuerza. Siguiendo un procedimiento como el anterior, se llega a

$$v = \sqrt{2g(h - R)} = \sqrt{2(9.81 \text{ m/s}^2)(0.20 \text{ m})} = 1.98 \text{ m/s}$$

y

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{(0.020 \text{ kg})(1.98 \text{ m/s})^2}{0.050 \text{ m}} = 1.6 \text{ N}$$

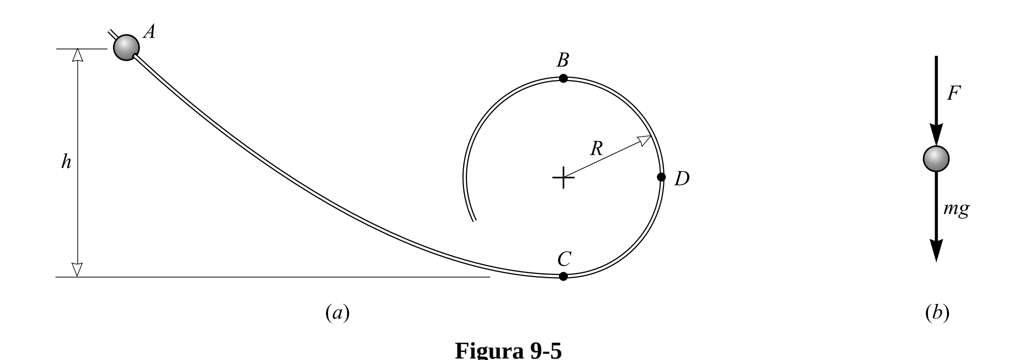


Figura 9-5

9.14 [III] Como se muestra en la figura 9-6, un cuerpo de 0.90 kg amarrado a una cuerda gira en un círculo vertical de 2.50 m de radio. *a*) ¿Cuál debe ser la rapidez mínima v_t que debe tener el cuerpo en el punto más alto del círculo, de modo que no salga de la trayectoria circular? *b*) Bajo la condición *a*), ¿qué rapidez v_b tendrá el objeto después de "caer" al punto más bajo del círculo? *c*) ¿Cuál es la tensión F_{Tb} en la cuerda cuando el cuerpo está en el punto más bajo del círculo y se mueve con la rapidez crítica v_b?

El objeto se mueve a su rapidez mínima cuando está en el punto más alto y la incrementa cuando gira hacia abajo debido a la gravedad ($v_b > v_t$).

a) Como lo muestra la figura 9-6, dos fuerzas radiales actúan sobre el cuerpo en el punto más alto: 1) su peso *mg* y 2) la tensión F_{Tt}. La resultante de estas dos fuerzas debe ser igual a la fuerza centrípeta requerida.

$$\frac{mv_t^2}{r} = mg + F_{Tt}$$

Para una *r* dada, v tendrá el valor más pequeño cuando $F_{Tt} = 0$. En este caso,

$$\frac{mv_t^2}{r} = mg \qquad \text{o} \qquad v_t = \sqrt{rg}$$

Utilizando $r = 2.50$ m y $g = 9.81$ m/s² se encuentra $v_t = 4.95$ m/s como la rapidez en el punto más alto.

b) Al viajar de lo alto a lo bajo del círculo, el cuerpo cae una distancia 2*r*. Dado que la rapidez en el punto más alto es $v_t = 4.95$ m/s, y la rapidez en el punto más bajo es v_b, por conservación de energía se tiene:

$$\text{EC en el punto bajo} = \text{EC en el punto alto} + \text{EP}_G \text{ en el punto alto}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_b^2 = \tfrac{1}{2}mv_t^2 + mg(2r)$$

donde se escogió el punto bajo del círculo como el nivel cero para EP_G. Observe que *m* se cancela. Con $v_t = 4.95$ m/s, $r = 2.50$ m y $g = 9.81$ m/s² se obtiene $v_b = 11.1$ m/s.

c) Cuando el objeto se encuentra en el punto bajo de la trayectoria, se observa en la figura 9-6 que la fuerza radial no balanceada sobre él es $F_{Tb} - mg$. Esta fuerza proporciona la fuerza centrípeta:

$$F_{Tb} - mg = \frac{mv_b^2}{r}$$

Con $m = 0.90$ kg, $g = 9.81$ m/s², $v_b = 11.1$ m/s y $r = 2.50$ m se obtiene

$$F_{Tb} = m\left(g + \frac{v_b^2}{r}\right) = 53 \text{ N}$$

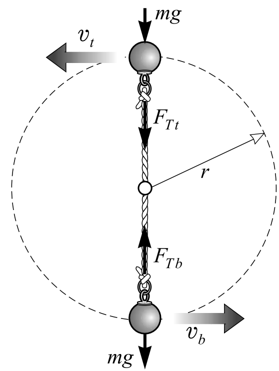


Figura 9-6

9.15 [III] Una curva de 30 m de radio va a peraltarse para que un auto pueda tomarla con una rapidez de 13 m/s sin depender de la fricción. ¿Cuál debe ser la pendiente de la curva (ángulo de peralte)?

En la figura 9-7 se muestra la situación cuando no hay fricción. Solamente dos fuerzas actúan sobre el carro: 1) el peso *mg* del auto (que es recto hacia abajo) y 2) la fuerza normal F_N (que es perpendicular al camino) que ejerce el pavimento sobre el auto.

La fuerza normal F_N tiene dos funciones: 1) su componente vertical, $F_N \cos\theta$, debe balancear el peso del auto; 2) su componente horizontal, F_N sen θ, proporciona la fuerza centrípeta requerida. En otras palabras, el camino empuja de manera horizontal al auto manteniéndolo en movimiento en un círculo. Con las suposiciones anteriores se puede escribir

$$F_N \cos\theta = mg \qquad \text{y} \qquad F_N \operatorname{sen}\theta = \frac{mv^2}{r}$$

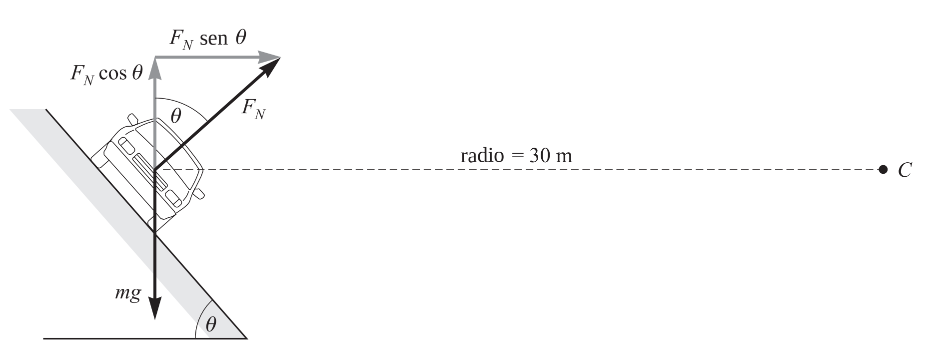


Figura 9-7

Dividir la segunda ecuación entre la primera hace que se cancelen F_N y *m*, con lo que se obtiene

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} = \frac{(13\ \text{m/s})^2}{(9.81\ \text{m/s}^2)(30\ \text{m})} = 0.575$$

De aquí se encuentra que θ, el ángulo de peralte, debe ser 30°.

9.16 [III] Como se muestra en la figura 9-8, un cascarón cilíndrico delgado de radio interior *r* gira de manera horizontal, en torno a un eje vertical, con una rapidez angular ω. Un bloque de madera se recarga en la superficie interior y gira con él. Si el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la superficie es μ_e, ¿con qué rapidez debe girar el cascarón para que el bloque no resbale y caiga? Suponga que $r = 150$ cm y $\mu_e = 0.30$.

La superficie mantiene al bloque en su lugar presionándolo con la fuerza centrípeta $m\omega^2 r$. Esta fuerza es perpendicular a la superficie. La fuerza normal es la que determina la fricción sobre el bloque, que a su vez evita que se deslice hacia abajo. Como $F_f = \mu_e F_N$ y $F_N = mr\omega^2$, se puede escribir

$$F_f = \mu_e F_N = \mu_e mr\omega^2$$

Esta fuerza de fricción debe balancear al peso *mg* del bloque si éste no ha de resbalar; por tanto,

$$mg = \mu_e mr\omega^2 \qquad \text{o} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_e r}}$$

Al insertar los valores dados se obtiene

$$\omega = \sqrt{\frac{9.81\ \text{m/s}^2}{(0.30)(1.50\ \text{m})}} = 4.7\ \text{rad/s} = 0.74\ \text{rev/s}$$

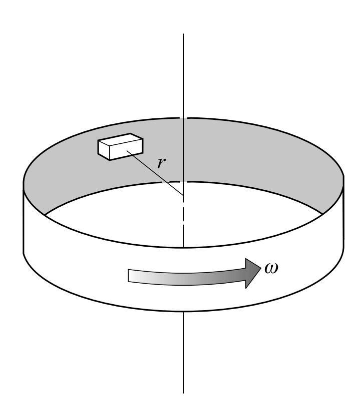


Figura 9-8

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

9.17 [I] Convierta *a*) 50.0 rev a radianes, *b*) 48π rad a revoluciones, *c*) 72.0 rps a rad/s, *d*) 1.50×10^3 rpm a rad/s, *e*) 22.0 rad/s a rpm, *f*) 2.000 rad/s a °/s. **Resp.** *a*) 314 rad; *b*) 24 rev; *c*) 452 rad/s; *d*) 157 rad/s; *e*) 210 rev/min; *f*) 114.6 °/s.

9.18 [I] Exprese 40.0 °/s en *a*) rev/s, *b*) rev/min y *c*) rad/s. **Resp.** *a*) 0.111 rev/s; *b*) 6.67 rev/min; *c*) 0.698 rad/s.

9.19 [I] Un volantín gira a 480 rpm. Calcule la rapidez angular en cualquier punto del volantín y la rapidez tangencial a 30.0 cm del centro. **Resp.** 50.3 rad/s, 15.1 m/s.

9.20 [I] Se desea que el contorno exterior de una rueda de molino de 9.0 cm de radio se mueva a una tasa constante de 6.0 m/s. *a*) Determine la rapidez angular de la rueda. *b*) ¿Cuántos metros de cordón se pueden enredar en la cara lateral de la rueda en 3.0 s cuando gira con esta rapidez? **Resp.** *a*) 67 rad/s; *b*) 18 m.

9.21 [I] ¿Cuántos radianes se mueve en 6.00 h un punto en la superficie de la Tierra (fuera de los polos) como resultado del movimiento de rotación? ¿Cuál es la rapidez de un punto en el ecuador? El radio de la Tierra es 6 370 km. **Resp.** 1.57 rad, 463 m/s.

9.22 [II] Una rueda de 25.0 cm de radio gira a 120 rpm e incrementa de manera uniforme su frecuencia hasta 660 rpm en 9.00 s. Encuentre *a*) la aceleración angular constante en rad/s^2 y *b*) la aceleración tangencial de un punto en el borde. **Resp.** *a*) 6.28 rad/s^2; *b*) 157 cm/s^2.

9.23 [II] La rapidez angular de un disco disminuye uniformemente de 12.00 a 4.00 rad/s en 16.0 s. Calcule la aceleración angular y el número de revoluciones que da en este tiempo. **Resp.** −0.500 rad/s^2, 20.4 rev.

9.24 [II] Una llanta de 30 cm de radio gira a una tasa de 8.0 rev/s cuando el automóvil comienza a detenerse uniformemente hasta el reposo en un tiempo de 14 s. Encuentre el número de revoluciones que da la llanta y la distancia recorrida por el automóvil en los 14 s. **Resp.** 56 rev, 0.11 km.

9.25 [II] Una rueda que gira a 6.00 rev/s tiene una aceleración angular de 4.00 rad/s^2. Encuentre el número de vueltas que debe dar la rueda para alcanzar una rapidez angular de 26.0 rev/s, así como el tiempo requerido. **Resp.** 502 rev, 31.4 s.

9.26 [II] Un cordel enredado en el borde de una rueda de 20 cm de diámetro se jala a una tasa de 75 cm/s. ¿Cuántas revoluciones habrá dado la rueda cuando se hayan desenredado 9.0 m de cordel? ¿Cuánto tiempo llevará este proceso? **Resp.** 14 rev, 12 s.

9.27 [II] Una masa de 1.5 kg en el espacio se mueve en un círculo de 25 cm de radio a 2.0 rev/s. Calcule *a*) la rapidez tangencial, *b*) la aceleración y *c*) la fuerza centrípeta requerida para este movimiento. **Resp.** *a*) 3.1 m/s; *b*) 39 m/s^2 radialmente hacia adentro; *c*) 59 N.

9.28 [II] *a*) Calcule la aceleración radial de un punto en el ecuador de la Tierra. *b*) Repita el problema para el polo norte de la Tierra. Tome el radio de la Tierra como 6.37×10^6 m. **Resp.** *a*) 0.0337 m/s^2; *b*) cero.

9.29 [II] Un carro que se mueve a 5.0 m/s trata de dar vuelta en una esquina, describiendo un arco circular de 8.0 m de radio. El camino es plano. ¿Qué tan grande debe ser el coeficiente de fricción entre las llantas y el pavimento para que no derrape? **Resp.** 0.32.

9.30 [II] Una caja descansa en un punto que se encuentra a 2.0 m del eje de una plataforma circular horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la plataforma es de 0.25. Si la tasa de rotación de la plataforma aumenta lentamente desde cero, ¿con qué rapidez angular empezará a resbalar la caja? **Resp.** 1.1 rad/s.

9.31 [II] Una piedra se encuentra en el fondo de un balde que se mueve en un círculo vertical de 60 cm de radio. ¿Cuál es la rapidez mínima que debe tener la piedra en el punto más alto de la trayectoria si debe permanecer en contacto con el fondo del balde? **Resp.** 2.4 m/s.

9.32 [II] Un péndulo de 80.0 cm de longitud se jala hacia un lado, hasta que su lenteja se eleva 20.0 cm sobre el punto más bajo, y entonces se suelta. Cuando la lenteja de 50.0 g se encuentra en el punto más bajo, *a*) ¿cuál es su rapidez y *b*) cuál es la tensión en la cuerda del péndulo? **Resp.** *a*) 1.98 m/s; *b*) 0.735 N.

9.33 [II] Refiérase a la figura 9-5. ¿Qué tan grande debe ser h (en términos de R) si el alambre sin fricción no debe ejercer fuerza alguna sobre la cuenta al pasar por el punto B? Suponga que la cuenta parte del reposo en el punto A. **Resp.** 2.5 R.

9.34 [II] Si, en la figura 9-5 y en el problema 9.33, $h = 2.5R$, ¿cuál será la fuerza que ejerza la cuenta de 50 g sobre el alambre al pasar por el punto C? **Resp.** 2.9 N.

9.35 [II] Un satélite orbita la Tierra a una altura de 200 km en un círculo de 6 570 km de radio. Encuentre la rapidez del satélite y el tiempo que le toma completar una revolución. Suponga que la masa de la Tierra es de 6.0×10^{24} kg. (*Sugerencia*: La fuerza gravitacional proporciona la fuerza centrípeta.) **Resp.** 7.8 km/s, 88 min.

9.36 [III] El carrito de una montaña rusa se mueve lentamente mientras se aproxima al punto más alto de la colina mayor. Rueda casi sin fricción colina abajo y después hacia arriba en una colina más baja que tiene un radio de curvatura de 15 m. ¿Cuánto más alta debe ser la primera colina que la segunda, si los pasajeros no deben ejercer fuerza alguna sobre los asientos en la cúspide de la colina más baja? **Resp.** 7.5 m.

9.37 [III] El cuerpo humano puede soportar con seguridad una aceleración de hasta 9.00 veces la de la gravedad. ¿Con qué radio de curvatura mínimo un piloto puede hacer que el avión gire hacia arriba, sin peligro, al final de una picada, si la rapidez del avión es de 770 km/h? **Resp.** 519 m.

9.38 [III] Un piloto de 60.0 kg que viaja en un planeador a 40.0 m/s desea hacer un giro vertical hacia adentro, de tal forma que su cuerpo ejerza una fuerza de 350 N sobre el asiento cuando el planeador se encuentre en el punto más alto del lazo. ¿Cuál debe ser el radio del lazo en estas condiciones? (*Sugerencia*: Tanto la gravedad como el asiento ejercen fuerzas sobre el piloto.) **Resp.** 102 m.

9.39 [III] Suponga que la Tierra es una esfera perfecta con $R = 6\,370$ km. Si una persona pesa exactamente 600.0 N en el polo norte, ¿cuánto pesará la persona en el ecuador? (*Sugerencia*: El empuje hacia arriba de la balanza sobre la persona es lo que leerá la balanza y es a lo que se llama peso en este caso.) **Resp.** 597.9 N.

9.40 [III] Una masa m cuelga en el extremo de un péndulo de longitud L que se suelta con un ángulo de 40.0° respecto a la vertical. Encuentre la tensión en la cuerda del péndulo cuando forma un ángulo de 20.0° con la vertical. (*Sugerencia*: Separe el peso en componentes a lo largo y perpendicular a la cuerda.) **Resp.** $1.29mg$.

ROTACIÓN DE UN CUERPO RÍGIDO 10

LA TORCA (o MOMENTO DE TORSIÓN) (τ) debida a una fuerza ejercida alrededor de un eje, se definió en el capítulo 5. En ocasiones también se le llama momento de la fuerza.

EL MOMENTO DE INERCIA (I) de un cuerpo es la medida de la inercia rotacional del cuerpo. Si un objeto que puede girar libremente alrededor de un eje presenta gran dificultad para hacerlo girar, se dice que su momento de inercia alrededor de dicho eje es grande. Un objeto con I pequeña tiene poca inercia rotacional.

Si un cuerpo se considera constituido por pequeñas masas $m_1, m_2, m_3, \ldots$, a las distancias respectivas $r_1, r_2, r_3, \ldots$, a partir de un eje, su momento de inercia en torno a ese eje es

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots = \sum m_i r_i^2$$

Las unidades de I son kg · m².

Es conveniente definir un **radio de giro** (k) para un objeto alrededor de un eje por la relación

$$I = Mk^2$$

donde M es la masa total del objeto. En consecuencia, k es la distancia a la cual se debe colocar una masa puntual M desde el eje, si la masa va a tener la misma I que tiene el objeto.

TORCA Y ACELERACIÓN ANGULAR: Una torca τ que actúa sobre un cuerpo que tiene un ***momento de inercia I*** produce en él una aceleración angular α dada por

$$\tau = I\alpha$$

Aquí τ, I y α están calculadas con respecto al mismo eje. En cuanto a las unidades, τ está en N · m, I en kg · m² y α debe darse en rad/s² (recuerde el equivalente traslacional, $F = ma$).

LA ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN (EC_r) de una masa cuyo momento de inercia alrededor de un eje es I, y rota alrededor del eje con una velocidad angular ω, es

$$EC_r = \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

donde la energía está en joules (J) y ω debe estar en rad/s. (Recuerde el equivalente traslacional, $EC = \tfrac{1}{2} mv^2$.)

ROTACIÓN Y TRASLACIÓN COMBINADAS: La EC de una pelota que rueda, o de otro objeto de masa M que ruede, es la suma de 1) su energía cinética rotacional EC *alrededor de un eje que pasa por su centro de masa* (es decir, c.m.) (capítulo 8); y 2) la energía cinética traslacional EC de una masa puntual equivalente que se mueve con el centro de masa. En otras palabras, de manera aproximada, la EC total es igual a la EC alrededor del *c.m.* más la EC del *c.m.* Expresado en símbolos,

$$EC_{\text{total}} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2} Mv^2$$

Observe que I es el momento de inercia del objeto en torno a un eje que pasa a través de su centro de masa.

EL TRABAJO (W) efectuado sobre un cuerpo en rotación durante un desplazamiento angular θ por una torca constante τ está dado por

$$W = \tau\theta$$

donde W está en joules y θ debe estar en radianes. (Recuerde el equivalente traslacional, $W = Fs$.)

LA POTENCIA (P) transmitida a un cuerpo por una torca está dada por

$$P = \tau\omega$$

donde τ es la torca aplicada alrededor del eje de rotación y ω es la rapidez angular, alrededor del mismo eje; ω debe darse en radianes. (Recuerde el equivalente traslacional, $P = Fv$.)

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR ($\vec{\mathbf{L}}$) es una cantidad vectorial que tiene magnitud $I\omega$ y está dirigida a lo largo del eje de rotación. (Recuerde el equivalente traslacional, $x = m\vec{\mathbf{x}}$). Si la torca neta sobre un cuerpo es cero, la cantidad de movimiento angular permanece sin cambios tanto en magnitud como en dirección. Ésta es la **ley de conservación de la cantidad de movimiento angular**.

EL IMPULSO ANGULAR tiene magnitud τt, donde t es el tiempo durante el cual una torca constante τ actúa sobre el cuerpo. En analogía con el caso lineal, un impulso angular τt sobre un cuerpo causa un cambio en la cantidad de movimiento angular del cuerpo dado por la ecuación

$$\tau t = I\omega_f - I\omega_i$$

TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS: El momento de inercia I de un cuerpo alrededor de un eje paralelo a un eje que pasa por su centro de masa es

$$I = I_{\text{cm}} + Mh^2$$

donde I_{cm} = momento de inercia alrededor de un eje que pasa por el centro de masa
M = masa total del cuerpo
h = distancia perpendicular entre los dos ejes paralelos

En la figura 10-1 se muestran los momentos de inercia (alrededor de un eje que pasa a través del centro de masa) de algunos objetos uniformes de masa M.

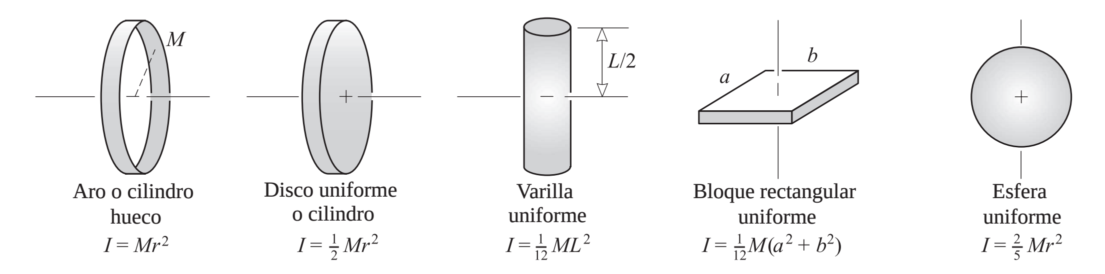


Figura 10-1

ANALOGÍA ENTRE CANTIDADES LINEALES Y ANGULARES:

Desplazamiento lineal	s	$\leftrightarrow$	desplazamiento angular	θ
Rapidez lineal	v	$\leftrightarrow$	rapidez angular	ω
Aceleración lineal	a_T	$\leftrightarrow$	aceleración angular	α
Masa (inercia)	m	$\leftrightarrow$	momento de inercia	I
Fuerza	F	$\leftrightarrow$	torca	τ
Cantidad de movimiento lineal	mv	$\leftrightarrow$	cantidad de movimiento angular	$I\omega$
Impulso lineal	Ft	$\leftrightarrow$	impulso angular	τt

Si, en las ecuaciones de movimiento lineal, se reemplazan las cantidades lineales con las correspondientes cantidades angulares, se obtendrán las ecuaciones correspondientes para movimiento angular. Así pues, se tiene

Lineal:	$F = ma$	$\text{EC} = \frac{1}{2}mv^2$	$W = Fs$	$\text{P} = Fv$
Angular:	$\tau = I\alpha$	$\text{EC}_r = \frac{1}{2}I\omega^2$	$W = \tau\theta$	$\text{P} = \tau\omega$

En estas ecuaciones θ, ω y α deben expresarse en radianes.

PROBLEMAS RESUELTOS

10.1 [I] Una pequeña esfera de 2.0 kg de masa gira en el extremo de una cuerda de 1.2 m de largo en un plano horizontal alrededor de un eje vertical. Determine su momento de inercia con respecto a ese eje.

Una esfera pequeña en el extremo de una cuerda larga recuerda a una masa puntual que gira en torno a un eje a una distancia radial r. En consecuencia, su momento de inercia está dado por

$$I_{\bullet} = m_{\bullet}r^2 = (2.0 \text{ kg})(1.2 \text{ m})^2 = 2.9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

10.2 [I] ¿Cuál es el momento de inercia de una esfera sólida homogénea de 10 kg de masa y radio de 20 cm, alrededor de un eje que pasa por su centro?

A partir de la última parte de la figura 10-1, para una esfera

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = \frac{2}{5}(10 \text{ kg})(0.20 \text{ m})^2 = 0.16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

10.3 [I] Un aro cilíndrico delgado con un diámetro de 1.0 m y una masa de 400 g rueda hacia abajo de la calle. ¿Cuál es el momento de inercia del aro en torno a su eje central de rotación?

A partir de la primera parte de la figura 10.1, para un aro

$$I = MR^2 = (0.400 \text{ kg})(0.50 \text{ m})^2 = 0.10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

10.4 [II] Una rueda de 6.0 kg de masa y de radio de giro de 40 cm rueda a 300 rpm. Encuentre su momento de inercia y su EC rotacional.

$$I = Mk^2 = (6.0 \text{ kg})(0.40 \text{ m})^2 = 0.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La EC rotacional es EC $= \frac{1}{2}I\omega^2$, donde ω debe estar en rad/s. Tenemos

$$\omega = \left(300\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1 \text{ min}}{60.0 \text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 31.4 \text{ rad/s}$$

así

$$\text{EC}_r = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(0.96 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(31.4 \text{ rad/s})^2 = 0.47 \text{ kJ}$$

10.5 [II] Una esfera uniforme de 500 g y 7.0 cm de radio gira a 30 rev/s sobre un eje que pasa por su centro. Encuentre su *a*) EC_r, *b*) cantidad de movimiento angular y *c*) radio de giro.

Se necesita el momento de inercia de una esfera uniforme alrededor de un eje que pase por su centro. De la figura 10-1,

$$I = \tfrac{2}{5}Mr^2 = (0.40)(0.50 \text{ kg})(0.070 \text{ m})^2 = 0.000\ 98 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

a) Se sabe que $\omega = 30$ rev/s $= 188$ rad/s, por tanto

$$\text{EC}_r = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(0.00098 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(188 \text{ rad/s})^2 = 0.017 \text{ kJ}$$

Note que ω debe estar en rad/s.

b) Su cantidad de movimiento angular es

$$I\omega = (0.00098 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(188 \text{ rad/s}) = 0.18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

c) Para cualquier objeto, $I = Mk^2$, donde k es el radio de giro. Entonces

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{0.00098 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{0.50 \text{ kg}}} = 0.044 \text{ m} = 4.4 \text{ cm}$$

Note que éste es un valor razonable en vista de que se trata de una esfera cuyo radio es de 7.0 cm.

10.6 [II] La hélice de un avión tiene una masa de 70 kg y un radio de giro de 75 cm. Encuentre su momento de inercia. ¿De qué magnitud es la torca necesaria para darle una aceleración angular de 4.0 rev/s²?

$$I = Mk^2 = (70 \text{ kg})(0.75 \text{ m})^2 = 39 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Para usar $\tau = I\alpha$, se debe tener α en rad/s²:

$$\alpha = \left(4.0\frac{\text{rev}}{\text{s}^2}\right)\left(2\pi\frac{\text{rad}}{\text{rev}}\right) = 8.0\pi \text{ rad/s}^2$$

entonces $$\tau = I\alpha = (39 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(8.0\pi \text{ rad/s}^2) = 0.99 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

10.7 [III] Como se muestra en la figura 10-2, una fuerza constante de 40 N se aplica tangencialmente al borde de una rueda de 20 cm de radio. La rueda tiene un momento de inercia de 30 kg · m². Encuentre *a*) la aceleración angular, *b*) la rapidez angular después de 4.0 s si parte del reposo y *c*) el número de revoluciones realizadas en 4.0 s. *d*) Demuestre que el trabajo efectuado sobre la rueda en los 4.0 s es igual a la EC_r de la rueda al cabo de los 4.0 s.

a) Utilizando $\tau = I\alpha$, se obtiene

$$(40 \text{ N})(0.20 \text{ m}) = (30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\,\alpha$$

de donde $\alpha = 0.267$ rad/s² o 0.27 rad/s².

b) Se usa $\omega_f = \omega_i + \alpha t$, para encontrar la rapidez angular final,

$$\omega_f = 0 + (0.267 \text{ rad/s}^2)(4.0 \text{ s}) = 1.07 \text{ rad/s} = 1.1 \text{ rad/s}$$

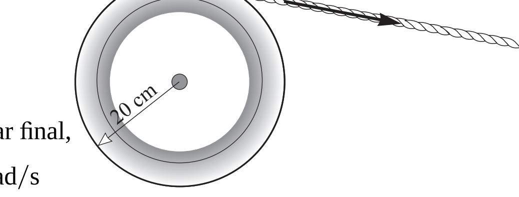


Figura 10.2

c) En virtud de que $\theta = \omega_{prom} t = \frac{1}{2}(\omega_f + \omega_i)t$, se tiene

$$0 = \tfrac{1}{2}(1.07 \text{ rad/s})(4.0 \text{ s}) = 2.14 \text{ rad}$$

que equivale a 0.34 revoluciones.

d) Se sabe que trabajo = torca × θ, por ende

$$\text{Trabajo} = (40 \text{ N} \times 0.20 \text{ m})(2.14 \text{ rad}) = 17 \text{ J}$$

Note que deben usarse radianes. La EC_r final es $\frac{1}{2}I\omega_f^2$, por tanto

$$EC_r = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(1.07 \text{ rad/s})^2 = 17 \text{ J}$$

El trabajo realizado es igual a la EC_r.

10.8 [II] La rueda de un molino es un disco uniforme de 0.90 kg y de 8.0 cm de radio. Se lleva uniformemente al reposo desde una rapidez de 1 400 rpm en un tiempo de 35 s. ¿De qué magnitud es la torca de fricción que frena su movimiento?

Primero se encontrará α a partir del cambio en ω; a continuación se empleará $\tau = I\alpha$ para encontrar τ. Se sabe que f = 1 400 rev/min = 23.3 rev/s, y dado que $\omega = 2\pi f$, ω_i = 146 rad/s y ω_f = 0. Entonces,

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{-146 \text{ rad/s}}{35 \text{ s}} = -4.2 \text{ rad/s}^2$$

También se necesita conocer I. Para un disco uniforme,

$$I = \tfrac{1}{2}Mr^2 = \tfrac{1}{2}(0.90 \text{ kg})(0.080 \text{ m})^2 = 2.9 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Entonces $$\tau = I\alpha = (0.002\,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(-4.2 \text{ rad/s}^2) = -1.2 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$$

10.9 [II] Repita el problema 10.8 utilizando la relación entre trabajo y energía.

La rueda originalmente tiene EC_r, pero, a medida que la rueda se detiene, esta energía se pierde al realizar trabajo de fricción. Por consiguiente, se puede escribir

$$\text{EC}_r \text{ inicial} = \text{trabajo realizado contra la torca de fricción}$$

$$\tfrac{1}{2} I\omega_i^2 = \tau\theta$$

Para encontrar θ se observa que, puesto que α = constante,

$$\theta = \omega_{prom}t = \tfrac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t = \tfrac{1}{2}(146 \text{ rad/s})(35 \text{ s}) = 2\,550 \text{ rad}$$

Del problema 10.5, $I = 0.0029 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, y así la ecuación de trabajo-energía es

$$\tfrac{1}{2}(0.0029 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(146 \text{ rad/s})^2 = \tau(2\,550 \text{ rad})$$

de donde $\tau = 0.012 \text{ N} \cdot \text{m}$ o $1.2 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}$.

10.10 [II] Un volante tiene un momento de inercia de $3.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. ¿Qué torca constante se requiere para aumentar su frecuencia de 2.0 rev/s a 5.0 rev/s en 6.0 revoluciones?

Dado que

$$\theta = 12\pi \text{ rad} \qquad \omega_i = 4.0\pi \text{ rad/s} \qquad \omega_f = 10\pi \text{ rad/s}$$

se puede escribir

$$\text{Trabajo efectuado sobre la rueda} = \text{cambio en la EC}_r \text{ de la rueda}$$

$$\tau\theta = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2$$

$$(\tau)(12\pi \text{ rad}) = \tfrac{1}{2}(3.8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)[(100\pi^2 - 16\pi^2)(\text{rad/s})^2]$$

de donde $\tau = 41.8 \text{ N}\cdot\text{m}$. Observe que en todo este problema deben usarse radianes y segundos.

10.11 [III] Como se muestra en la figura 10-3, una masa $m = 400$ g cuelga del borde de una rueda de radio $r = 15$ cm. Cuando se suelta desde el reposo, la masa cae 2.0 m en 6.5 s. Determine el momento de inercia de la rueda.

Se escribirá $\tau = I\alpha$ para la rueda y $F = ma$ para la masa. Pero primero se determina a utilizando $y = v_i t + \tfrac{1}{2}at^2$:

$$2.0 \text{ m} = 0 + \tfrac{1}{2}a(6.5 \text{ s})^2$$

la cual da $a = 0.095 \text{ m/s}^2$. Luego, a partir de $a_T = \alpha r$,

$$\alpha = \frac{a_T}{r} = \frac{0.095 \text{ m/s}^2}{0.15 \text{ m}} = 0.63 \text{ rad/s}^2$$

La fuerza neta sobre la masa m es $mg - F_T$ y por tanto $F = ma$ se convierte en

$$mg - F_T = ma_T$$

$$(0.40 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) - F_T = (0.40 \text{ kg})(0.095 \text{ m/s}^2)$$

de donde $F_T = 3.88$ N.

Ahora se escribe $\tau = I\alpha$ para la rueda:

$$(F_T)(r) = I\alpha \qquad \text{o} \qquad (3.88 \text{ N})(0.15 \text{ m}) = I(0.63 \text{ rad/s}^2)$$

de donde $I = 0.92 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

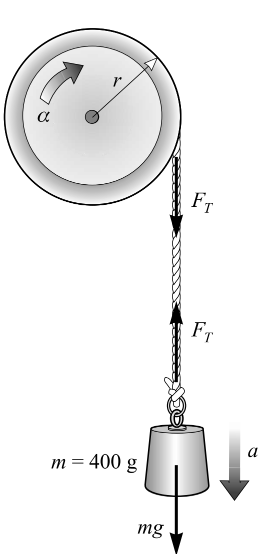


Figura 10-3

10.12 [III] Repita el problema 10.11 usando consideraciones de energía.

Inicialmente, la masa m tiene $\text{EP}_G = mgh$, donde $h = 2.0$ m. Esta EP_G se convierte totalmente en una cantidad igual de EC. Parte de esta EC es la EC traslacional de la masa y el resto es EC_r de la rueda:

$$\text{EP}_\text{G} \text{ inicial} = \text{EC final de } m + \text{EC}_r \text{ final de la rueda}$$

$$mgh = \tfrac{1}{2}mv_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2$$

Para calcular v_f se tiene que $v_i = 0$, $y = 2.0$ m y $t = 6.5$ s. (Observe que $a \neq g$ para la masa, pues no cae libremente.) Entonces

$$v_{prom} = \frac{y}{t} = \frac{2.0 \text{ m}}{6.5 \text{ s}} = 0.308 \text{ m/s}$$

y como $v_{prom} = \frac{1}{2}(v_i + v_f)$ y con $v_i = 0$, se tiene

$$v_f = 2v_{prom} = 0.616 \text{ m/s}$$

Por otro lado, como $v = \omega r$ se obtiene

$$\omega_f = \frac{v_f}{r} = \frac{0.616 \text{ m/s}}{0.15 \text{ m}} = 4.1 \text{ rad/s}$$

La sustitución en la ecuación de energía produce

$$(0.40 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(2.0 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(0.40 \text{ kg})(0.62 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}I(4.1 \text{ rad/s})^2$$

de donde $I = 0.92 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

10.13 [III] El momento de inercia del sistema de poleas de la figura 10.4 es $I = 1.70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, mientras que $r_1 = 50$ cm y $r_2 = 20$ cm. Encuentre la aceleración angular del sistema de poleas y las tensiones F_{T1} y F_{T2}.

Observe para iniciar que $a = \alpha r$, por tanto, $a_1 = (0.50 \text{ m})\alpha$ y $a_2 = (0.20 \text{ m})\alpha$. Para ambas masas se escribe $F = ma$, mientras que para la rueda se escribe $\tau = I\alpha$, considerando como positiva la dirección del movimiento:

$$(2.0)(9.81) \text{ N} - F_{T1} = 2a_1 \qquad \text{o} \qquad 19.6 \text{ N} - F_{T1} = (1.0 \text{ m})\alpha$$

$$F_{T2} - (1.8)(9.81) \text{ N} = 1.8a_2 \qquad \text{o} \qquad F_{T2} - 17.6 \text{ N} = (0.36 \text{ m})\alpha$$

$$(F_{T1})(r_1) - (F_{T2})(r_2) = I\alpha \qquad \text{o} \qquad (0.50 \text{ m})F_{T1} - (0.20 \text{ m})F_{T2} = (1.70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

Estas tres ecuaciones tienen tres incógnitas. Al resolver para F_{T1} en la primera ecuación y sustituir en la tercera se obtiene

$$(9.81 \text{ N} \cdot \text{m}) - (0.50 \text{ m})\alpha - (0.20 \text{ m})F_{T2} = (1.70 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

Se resuelve esta ecuación parar F_{T2} y se sustituye en la segunda ecuación para obtener

$$-11\alpha + 49 - 17.6 = 0.36\alpha$$

de donde $\alpha = 2.8 \text{ rad/s}^2$.

Ahora se puede regresar a la primera ecuación para obtener $F_{T1} = 17$ N y a la segunda ecuación para obtener $F_{T2} = 19$ N.

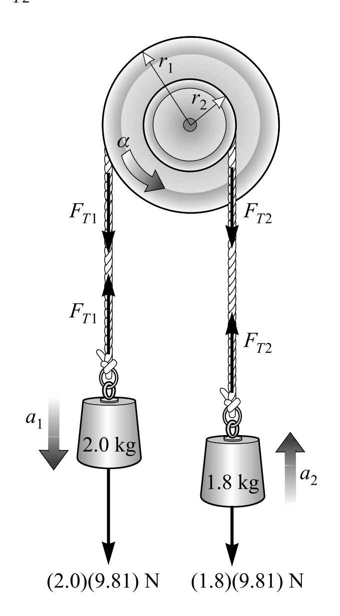


Figura 10-4

10.14 [II] Utilice métodos de energía para calcular la rapidez de la masa de 2.0 kg de la figura 10-4 cuando ha caído 1.5 m desde el reposo. Utilice los mismos valores que en el problema 10.10 para I, r_1 y r_2.

Si la rapidez angular de la rueda es ω, entonces $v_1 = r_1\omega$ y $v_2 = r_2\omega$. Si la rueda gira un ángulo θ, la masa de 2.0 kg cae una distancia s_1 y la masa de 1.8 kg sube una distancia s_2:

$$\theta = \frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} \qquad \text{de donde} \qquad s_2 = s_1\frac{r_2}{r_1}$$

De la conservación de la energía, dado que EP_G disminuye y EC aumenta,

$$m_1gs_1 - m_2gs_2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Dado que

$$s_2 = (20/50)(1.5\text{ m}) = 0.60\text{ m} \qquad v_1 = (0.50\text{ m})\omega \qquad v_2 = (0.20\text{ m})\omega$$

se puede resolver para encontrar $\omega = 4.07$ rad/s. Por consiguiente

$$v_1 = r_1\omega = (0.50\text{ m})(4.07\text{ rad/s}) = 2.0\text{ m/s}$$

10.15 [I] Un motor gira a 20 rev/s y suministra una torca de 75 N · m. ¿Cuál es la potencia en hp que desarrolla?

Con $\omega = 20$ rev/s $= 40\pi$ rad/s, se tiene

$$P = \tau\omega = (75\text{ N}\cdot\text{m})(40\pi\text{ rad/s}) = 9.4\text{ kW} = 13\text{ hp}$$

10.16 [I] Una rueda motriz que acciona una banda de transmisión conectada a un motor eléctrico tiene un diámetro de 38 cm y opera a 1 200 rpm. La tensión en la banda es de 130 N en el lado flojo y de 600 N en el lado tenso. Encuentre la potencia, en hp, que transmite la rueda a la banda.

Se usará $P = \tau\omega$. En este caso, dos torcas, debidas a las dos partes de la banda, actúan sobre la rueda. Se tiene

$$f = 1\,200\text{ rev/min} = 20\text{ rev/s}$$

y
$$\omega = 40\pi\text{ rad/s}$$

así
$$P = [(600 - 130)(0.19)\text{ N}\cdot\text{m}](40\pi\text{ rad/s}) = 11\text{ kW} = 15\text{ hp}$$

10.17 [I] Un motor de 0.75 hp actúa durante 8.0 s sobre una rueda que inicialmente está en reposo y tiene un momento de inercia de 2.0 kg · m². Encuentre la rapidez angular que desarrolla la rueda, si supone que no hay pérdidas.

Trabajo realizado por el motor en 8.0 s = EC de la rueda después de 8.0 s

$$(\text{potencia})\,(\text{tiempo}) = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

$$(0.75\text{ hp})(746\text{ W/hp})\,(8.0\text{ s}) = \tfrac{1}{2}(2.0\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega^2$$

de donde $\omega = 67$ rad/s.

10.18 [II] Como se muestra en la figura 10-5, una esfera sólida uniforme rueda sobre una superficie horizontal a 20 m/s y luego rueda hacia arriba sobre un plano inclinado. Si las pérdidas debidas a la fricción son despreciables, ¿cuál será el valor de h en el lugar donde se detiene la esfera?

Las EC traslacional y rotacional de la esfera en la base del plano inclinado cambiarán a EP_G cuando la esfera se detenga. Por tanto, puede escribirse

$$\left(\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2\right)_{\text{inicial}} = (Mgh)_{\text{final}}$$

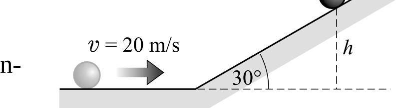


Figura 10-5

Para una esfera sólida, $I = \tfrac{1}{2}Mr^2$. Como $\omega = v/r$, la ecuación se convierte en

$$\tfrac{1}{2}Mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{5}\right)(Mr^2)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = Mgh \qquad \text{o}$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{5}v^2 = (9.81\text{ m/s}^2)h$$

Utilizando $v = 20$ m/s se obtiene $h = 29$ m. Observe que la respuesta no depende de la masa de la esfera ni del ángulo del plano inclinado.

10.19 [II] Inicialmente en reposo, un aro de 20 cm de radio rueda hacia abajo de una colina hasta un punto que se encuentra 5.0 m por debajo del punto inicial. ¿Qué tan rápido rota en ese punto?

$$EP_G\text{ inicial} = (EC_r + EC_t)\text{ final}$$

$$Mgh = \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}Mv^2$$

Pero para un aro $I = Mr^2$ y $v = \omega r$. La ecuación anterior se convierte en

$$Mgh = \tfrac{1}{2}M\omega^2 r^2 + \tfrac{1}{2}M\omega^2 r^2$$

de donde

$$\omega = \sqrt{\frac{gh}{r^2}} = \sqrt{\frac{(9.81\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{m})}{(0.20\ \text{m})^2}} = 35\ \text{rad/s}$$

10.20 [II] Un disco sólido rueda sobre una pista; en la parte más alta de una colina su rapidez es de 80 cm/s. Si las pérdidas por fricción son despreciables, ¿con qué rapidez se mueve el disco cuando se encuentra a 18 cm por debajo de la cima?

En la cima, el disco tiene EC traslacional y rotacional, más su EP_G relativa al punto 18 cm abajo. En el punto final, la EP_G se transformó a más EC de rotación y traslación; por tanto, con $h = 18$ cm se puede escribir

$$(EC_t + EC_r)_{\text{inicial}} + Mgh = (EC_t + EC_r)_{\text{final}}$$

$$\tfrac{1}{2}Mv_i^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgh = \tfrac{1}{2}Mv_f^2 + \tfrac{1}{2}I\omega_f^2$$

Para un disco sólido, $I = \tfrac{1}{2}Mr^2$. Además, $\omega = v/r$. Al sustituir estos valores y simplificar se obtiene

$$\tfrac{1}{2}v_i^2 + \tfrac{1}{2}v_i^2 + gh = \tfrac{1}{2}v_f^2 + \tfrac{1}{2}v_f^2$$

Como $v_i = 0.80$ m/s y $h = 0.18$ m, al sustituir se encuentra que $v_f = 1.7$ m/s.

10.21 [II] Determine el momento de inercia de las cuatro masas que se muestran en la figura 10-6, relativo a un eje perpendicular a la página y que pasa a través de *a*) el punto *A* y *b*) el punto *B*.

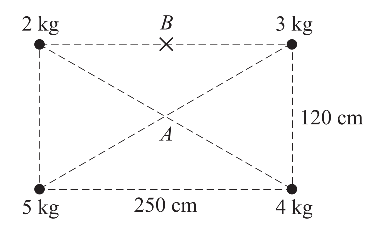


Figura 10-6

a) De la definición de momento de inercia

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_N r_N^2 = (2.0\ \text{kg} + 3.0\ \text{kg} + 4.0\ \text{kg} + 5.0\ \text{kg})(r^2)$$

donde *r* es la mitad de la longitud de la diagonal.

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1.20\ \text{m})^2 + (2.50\ \text{m})^2} = 1.39\ \text{m}$$

Por tanto, $I = 27\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

b) En este problema no se puede utilizar el teorema de ejes paralelos, en virtud de que ni el punto *A* ni el punto *B* están en el centro de masa. Por ello, se repite el procedimiento anterior. Dado que $r = 1.25$ m para las masas de 2.0 y 3.0 kg, mientras que $r = \sqrt{(1.20)^2 + (1.25)^2} = 1.733$ para las otras dos masas,

$$I_B = (2.0\ \text{kg} + 3.0\ \text{kg})(1.25\ \text{m})^2 + (5.0\ \text{kg} + 4.0\ \text{kg})(1.733\ \text{m})^2 = 33\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

10.22 [II] El disco uniforme circular que se muestra en la figura 10-7 tiene una masa de 6.5 kg y un diámetro de 80 cm. Calcule su momento de inercia alrededor de un eje perpendicular a la página que pase *a*) a través de *G* y *b*) a través de *A*.

a)

$$I_G = \tfrac{1}{2}Mr^2 = \tfrac{1}{2}(6.5\ \text{kg})(0.40\ \text{m})^2 = 0.52\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Utilice el resultado de *a*) y el teorema de los ejes paralelos

$$I_A = I_G + Mh^2 = 0.52\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 + (6.5\ \text{kg})(0.22\ \text{m})^2 = 0.83\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

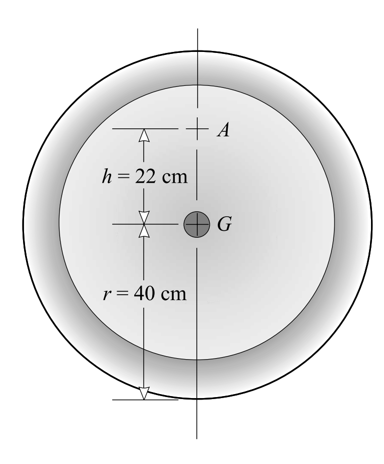


Figura 10-7

Figura 10-8

10.23 [III] Un enorme rodillo en forma de cilindro uniforme es jalado por un tractor para compactar la tierra. Este rodillo tiene 1.80 m de diámetro y un peso de 10 kN. Si los efectos de la fricción son despreciables, ¿qué potencia promedio, en hp, debe tener el tractor para acelerar desde el reposo hasta una rapidez de 4.0 m/s en una distancia horizontal de 3.0 m?

La potencia es igual al trabajo realizado por el tractor, dividido entre el tiempo que toma hacerlo. El tractor realiza el siguiente trabajo:

$$\text{Trabajo} = (\Delta\text{EC})_r + (\Delta\text{EC})_t = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 + \tfrac{1}{2}mv_f^2$$

Se tiene que $v_f = 4.0$ m/s, $\omega_f = v_f/r = 4.44$ rad/s y $m = 10\,000/9.81 = 1019$ kg. El momento de inercia del cilindro es

$$I = \tfrac{1}{2}mr^2 = \tfrac{1}{2}(1019\ \text{kg})(0.90\ \text{m})^2 = 413\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Sustituyendo estos valores, se encuentra que el trabajo requerido es de 12.223 kJ.

Se necesita saber el tiempo que se emplea en realizar este trabajo. Puesto que el rodillo recorrió 3.0 m con una velocidad promedio $v_{prom} = \tfrac{1}{2}(4 + 0) = 2.0$ m/s, se tiene

$$t = \frac{s}{v_{prom}} = \frac{3.0\ \text{m}}{2.0\ \text{m/s}} = 1.5\ \text{s}$$

Entonces
$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{12\ 230\ \text{J}}{1.5\ \text{s}} = (8\ 153\ \text{W})\left(\frac{1\ \text{hp}}{746\ \text{W}}\right) = 11\ \text{hp}$$

10.24 [III] Como se muestra en la figura 10-8, una varilla uniforme delgada *AB* de masa *M* y longitud *L* está sujeta por una bisagra colocada en el piso en su extremo *A*. Si inicialmente está en posición vertical y comienza a caer hacia el piso como se muestra, ¿con qué rapidez angular golpeará el piso?

El momento de inercia alrededor de un eje transversal a través del extremo *A* es

$$I_A = I_G + Mh^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

Conforme la varilla cae al piso, el centro de masa *G* cae una distancia $L/2$, por lo que se puede escribir

$$\text{EP}_G \text{ perdida por la varilla} = \text{EC}_r \text{ ganada por la varilla}$$

$$Mg\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{ML^2}{3}\right)\omega^2$$

de donde $\omega = \sqrt{3g/L}$.

10.25 [I] Un hombre está de pie sobre una plataforma que puede girar libremente, como se muestra en la figura 10-9. Con sus brazos extendidos, su frecuencia de rotación es de 0.25 rev/s; pero cuando los contrae hacia él, su frecuencia es de 0.80 rev/s. Encuentre la razón de su momento de inercia en el primer caso con respecto al segundo.

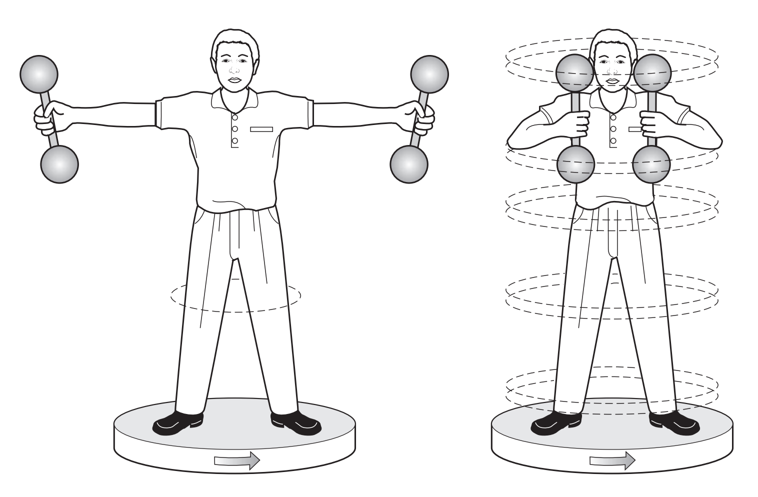


Figura 10-9

Ya que no existe torca sobre el sistema (¿por qué?), la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular establece que

Cantidad de movimiento angular antes = cantidad de movimiento angular después

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

O bien, ya que se pide I_i/I_f,

$$\frac{I_i}{I_f} = \frac{\omega_f}{\omega_i} = \frac{0.80 \text{ rev/s}}{0.25 \text{ rev/s}} = 3.2$$

10.26 [II] Un disco con momento de inercia I_1 gira libremente con rapidez angular ω_1 cuando se deja caer sobre él un segundo disco que no gira, con un momento de inercia I_2 (figura 10-10). Los dos giran después como una unidad. Encuentre la rapidez angular final.

De la ley de conservación de la cantidad de movimiento angular,

Cantidad de movimiento angular antes = cantidad de movimiento angular después

$$I_1\omega_1 + I_2(0) = I_1\omega + I_2\omega$$

Después de resolver, se encuentra
$$\omega = \frac{I_1\omega_1}{I_1 + I_2}$$

10.27 [II] El disco inferior en la figura 10-10 tiene un momento de inercia I_1 alrededor del eje que se muestra. ¿Cuál será su nuevo momento de inercia si una pequeña masa M se coloca sobre él a una distancia R de su centro?

La definición del momento de inercia dice que, para el disco más la masa añadida,

$$I = \sum_{\text{disco}} m_i r_i^2 + MR^2$$

donde la suma se realiza sobre todas las masas que componen el disco original. Dado que el valor de dicha suma está dado como I_1, el nuevo momento de inercia es $I = I_1 + MR^2$.

Figura 10-10

10.28 [II] El disco de abajo en la figura 10-10 tiene un momento de inercia $I = 0.0150$ kg · m² y gira a 3.0 rev/s. Se deja escurrir un hilo de arena dentro del disco a una distancia de 20 cm del eje, con lo cual se forma un anillo de 20 cm de radio de arena sobre él. ¿Cuánta arena debe caer sobre el disco para que su rapidez disminuya hasta 2.0 rev/s?

Cuando una masa Δm de arena cae sobre el disco, el momento de inercia del disco aumenta por una cantidad $r^2\Delta m$, como se demostró en el problema anterior. Después de que la masa m cae sobre el disco, su momento de inercia aumentó a $I + mr^2$. Puesto que la arena inicialmente no tiene una cantidad de movimiento angular, la ley de conservación de la cantidad de movimiento da

(cantidad de movimiento antes) = (cantidad de movimiento después)   o $I\omega_i = (I + mr^2)\omega_f$

de donde

$$m = \frac{I(\omega_i - \omega_f)}{r^2\omega_f} = \frac{(0.0150 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)(6.0\pi - 4.0\pi) \text{ rad/s}}{(0.040 \text{ m}^2)(4.0\pi \text{ rad/s})} = 0.19 \text{ kg}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

10.29 [I] Una fuerza tangencial de 200 N actúa sobre el borde de una rueda de 25 cm de radio. *a*) Encuentre la torca. *b*) Repita el cálculo si la fuerza forma un ángulo de 40º con respecto a un rayo de la rueda.
Resp. *a*) 50 N · m; *b*) 32 N · m.

10.30 [I] Cierta rueda de 8.0 kg tiene un radio de giro de 25 cm. *a*) ¿Cuál es su momento de inercia? *b*) ¿De qué magnitud es la torca que se requiere para darle una aceleración angular de 3.0 rad/s²?
Resp. *a*) 0.50 kg · m²; *b*) 1.5 N · m.

10.31 [II] Determine la torca constante que debe aplicarse a un volante de 50 kg con un radio de giro de 40 cm, para darle una frecuencia de 300 rpm en 10 s, si inicialmente está en reposo. **Resp.** 25 N · m.

10.32 [II] Una rueda de 4.0 kg y radio de giro de 20 cm rota a 360 rpm. La torca de fricción retardadora es de 0.12 N · m. Calcule el tiempo que le tomará a la rueda llegar al reposo. **Resp.** 50 s.

10.33 [II] Determine la EC rotacional de una rueda de 25 kg que rota a 6.0 rev/s, si su radio de giro es de 22 cm.
Resp. 0.86 kJ.

10.34 [II] Una cuerda de 3.0 m de longitud se enrolla en el eje de una rueda. Se tira de la cuerda con una fuerza constante de 40 N. Cuando la cuerda termina de desenredarse, la rueda sigue girando a 2.0 rev/s. Determine el momento de inercia de la rueda y del eje. Desprecie la fricción. (*Sugerencia:* La solución más sencilla es por el método de energía.) **Resp.** 1.5 kg · m².

10.35 [II] Una rueda de 500 g que tiene un momento de inercia de 0.015 kg · m² inicialmente gira a 30 rev/s. Alcanza el reposo después de 163 rev. ¿De qué magnitud es la torca que la frena? **Resp.** 0.26 N · m.

10.36 [II] Cuando se aplican 100 J de trabajo sobre un volante, su rapidez angular se incrementa de 60 rev/min a 180 rev/min. ¿Cuál es su momento de inercia? **Resp.** 0.63 kg · m².

10.37 [II] Una rueda de 5.0 kg con radio de giro de 20 cm llega a tener una frecuencia de 10 rev/s en 25 revoluciones desde el reposo. Determine la torca constante no balanceada requerida. **Resp.** 2.5 N · m.

10.38 [II] Un motor eléctrico funciona a 900 rpm y desarrolla 2.0 hp ¿De qué magnitud es la torca que produce?
Resp. 16 N · m.

10.39 [III] El extremo de transmisión o motriz de una banda tiene una tensión de 1600 N y el lado suelto tiene una tensión de 500 N. La banda hace girar una polea de 40 cm de radio a una tasa de 300 rpm. Esta polea mueve un dínamo que tiene 90% de eficiencia. ¿Cuántos kilowatts genera el dínamo? **Resp.** 12 kW.

10.40 [III] Una rueda de 25 kg tiene un radio de 40 cm y gira libremente alrededor de un eje horizontal. El radio de giro de la rueda es de 30 cm. Una masa de 1.2 kg cuelga de un extremo de la cuerda que está enredada al perímetro de la rueda. Esta masa cae y hace que gire la rueda. Encuentre la aceleración de la masa al caer y la tensión en la cuerda. **Resp.** 0.77 m/s^2, 11 N.

10.41 [III] Una rueda con eje tiene un momento de inercia total de 0.0020 $kg \cdot m^2$ y se pone a girar en torno a un eje horizontal mediante una masa de 800 g que cuelga en el extremo de una cuerda enredada en el eje. El radio del eje es de 2.0 cm. Si parte del reposo, ¿qué distancia debe caer la masa para producir en la rueda una tasa rotacional de 3.0 rev/s? **Resp.** 5.3 cm.

10.42 [II] Un disco sólido de 20 kg ($I = \frac{1}{2}Mr^2$) rueda sobre una superficie horizontal a razón de 4.0 m/s. Determine su EC total. **Resp.** 0.24 kJ.

10.43 [II] Una bola de boliche de 6.0 kg ($I = 2Mr^2/5$) parte del reposo y rueda hacia abajo de una pendiente regular, hasta que alcanza un punto que se encuentra 80 cm abajo del punto de partida. ¿Con qué rapidez se mueve? Ignore las pérdidas por fricción. **Resp.** 3.3 m/s.

10.44 [II] Una pequeña bola sólida ($I = 2Mr^2/5$) rueda sin resbalar sobre la superficie interior de una semiesfera, como se muestra en la figura 10-11 (la bola es mucho más pequeña de lo que se muestra). Si la bola se deja caer en el punto *A*, ¿con qué rapidez se moverá cuando pase por *a*) el punto *B* y *b*) el punto *C*?
Resp. *a*) 2.65 m/s; *b*) 2.32 m/s.

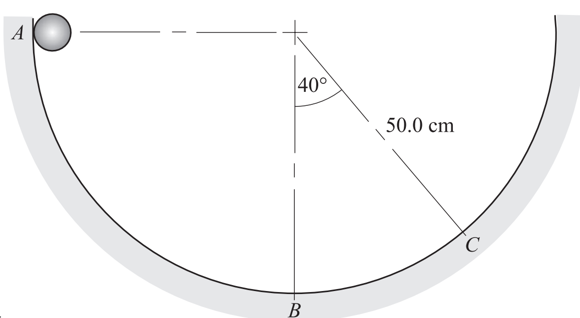


Figura 10-11

10.45 [I] Determine el radio de giro de un disco sólido, de 24 cm de diámetro, alrededor de un eje que pasa a través de su centro de masa y es perpendicular a su cara plana. **Resp.** 8.5 cm.

10.46 [I] En la figura 10-12 se muestran cuatro masas que están en las esquinas de un marco cuadrado muy ligero. ¿Cuál es el momento de inercia del sistema alrededor de un eje perpendicular a la página *a*) que pase a través de *A* y *b*) que pase a través de *B*? **Resp.** *a*) 1.4 $kg \cdot m^2$; *b*) 2.1 $kg \cdot m^2$.

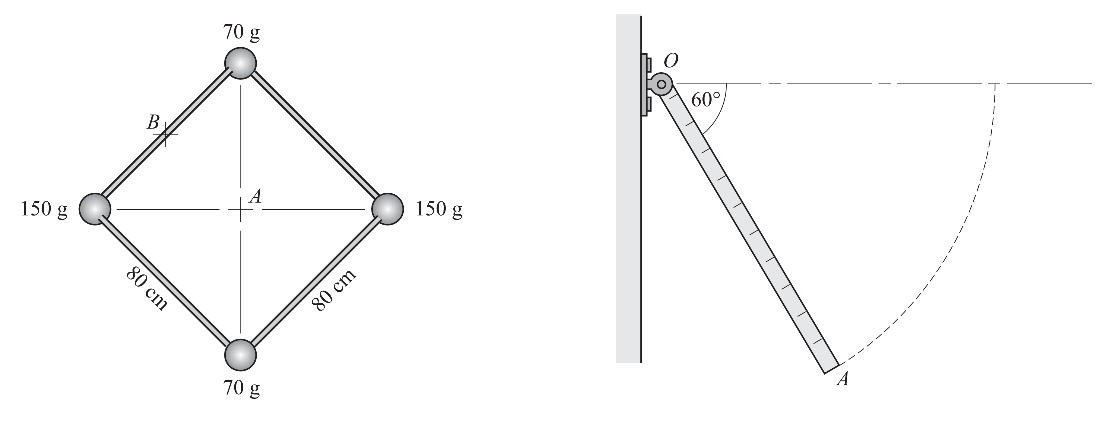


Figura 10-12 **Figura 10-13**

10.47 [I] Determine el momento de inercia de *a*) un aro vertical delgado, de 2 kg de masa y 9 cm de radio en torno a un eje horizontal paralelo a su canto; *b*) de una esfera sólida de 2 kg de masa y 5 cm de radio alrededor de un eje tangente a la esfera. **Resp.** $I = Mr^2 + Mr^2 = 0.03\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$; *b*) $I = \frac{2}{5}Mr^2 + Mr^2 = 7 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$.

10.48 [II] La varilla *OA* en la figura 10-13 es una regla de un metro. Está articulado en el punto *O* de tal manera que puede dar vueltas en un plano vertical. Se sostiene horizontalmente y después se suelta. Calcule la rapidez angular de la varilla y la rapidez lineal de su extremo libre cuando pasa a través de la posición que se muestra en la figura. (*Sugerencia*: Demuestre que $I = mL^2/3$.) **Resp.** 5.0 rad/s, 5.0 m/s.

10.49 [II] Suponga que un satélite orbita la Luna en una trayectoria elíptica. En su punto más cercano a la Luna tiene una rapidez v_c y un radio de r_c desde el centro de la Luna. En su punto más lejano tiene una rapidez v_f y un radio r_f. Encuentre la relación v_c/v_f. (*Sugerencia*: En los puntos más cercano y más lejano, es válida la relación $v = r\omega$.) **Resp.** r_f/r_c.

10.50 [II] Un gran disco horizontal rota sobre un eje vertical que pasa a través de su centro; para el disco, $I = 4\ 000\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. El disco viaja a una tasa de 0.150 rev/s cuando una persona de 90.0 kg, que cuelga de la rama de un árbol, cae sobre el disco. La persona aterriza y permanece a una distancia de 3.00 m del eje de rotación. ¿Cuál es la tasa de rotación del disco después de que la persona aterriza? **Resp.** 0.125 rev/s.

10.51 [II] Una estrella de neutrones se forma cuando colapsa un objeto como el Sol. Suponga que una estrella esférica uniforme de masa *M* y radio *R* colapsa en una esfera uniforme de radio $10^{-5}R$. Si la estrella original tenía una tasa de rotación de 1 rev cada 25 días (como el Sol), ¿cuál será la tasa de rotación de la estrella de neutrones? **Resp.** 5×10^3 rev/s.

10.52 [II] Una persona de 90 kg está parada en la orilla de un tiovivo (en esencia un disco) a 5.0 m de su centro. La persona comienza a caminar alrededor del perímetro del disco con una rapidez de 0.80 m/s relativa al suelo. ¿Cuál es la tasa de rotación que este movimiento proporciona al disco, si $I_{\text{disco}} = 20\ 000\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$? (*Sugerencia*: Para la persona $I = mr^2$.) **Resp.** 0.018 rad/s.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y RESORTES 11

EL PERIODO (T) de un movimiento periódico de un sistema, uno que oscila o rota de manera repetitiva, es el tiempo que requiere el sistema para completar un ciclo completo. En el caso de la vibración, es el tiempo total para el movimiento combinado, atrás y adelante, del sistema. El **periodo** es el *número de segundos por ciclo*.

LA FRECUENCIA (f) es el número de vibraciones que se realizan en la unidad de tiempo o el *número de ciclos por segundo*. Como T es el tiempo para un ciclo, $f = 1/T$. La unidad de frecuencia es el *hertz*, donde un ciclo/s es un hertz (Hz).

LA GRÁFICA DE UN MOVIMIENTO VIBRATORIO se muestra en la figura 11-1. El movimiento que ahí se ilustra es el de ascenso y descenso de una masa sujeta en el extremo de un resorte. Un ciclo completo es desde a hasta b, o desde c hasta d, o desde e hasta f. El tiempo que transcurre en un ciclo es T, o sea el periodo.

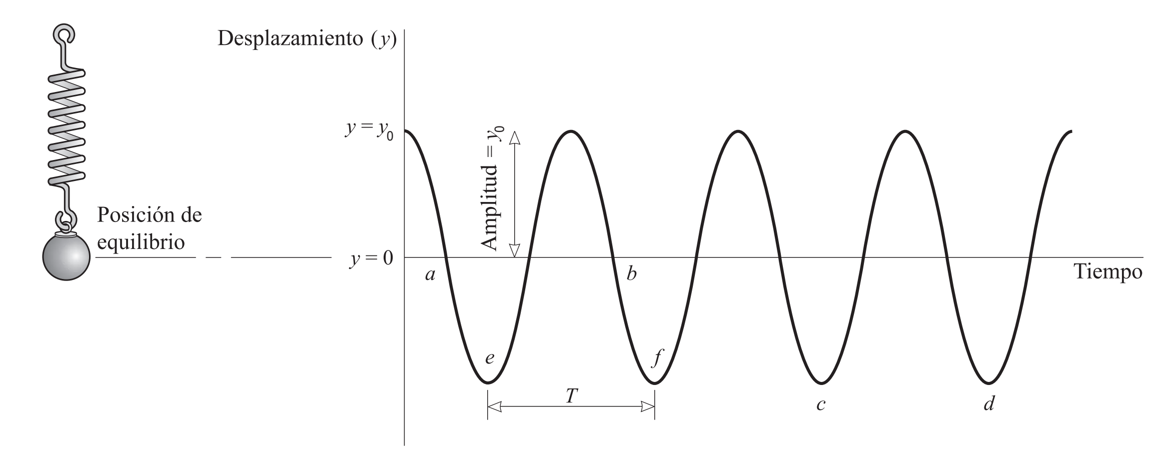


Figura 11-1

EL DESPLAZAMIENTO (x o y) es la distancia del objeto que vibra desde su posición de equilibrio (posición normal de reposo), es decir, desde el centro de su trayectoria de vibración. Al desplazamiento máximo se le llama **amplitud** (vea la figura 11-1).

UNA FUERZA RESTAURADORA es aquella que se opone al desplazamiento del sistema; es necesaria para que ocurra una vibración. En otras palabras, es una fuerza cuya dirección siempre es tal que empuja o jala al sistema a su posición de equilibrio (reposo normal). En el caso de una masa en el extremo de un resorte, el resorte estirado jala a la masa de vuelta a su posición de equilibrio, mientras que el resorte comprimido la empuja de vuelta a la posición de equilibrio.

UN SISTEMA HOOKEANO (es decir, que obedece la ley de Hooke, como un resorte, un alambre, una varilla, etc.) es aquel que regresa a su configuración original después de haberse deformado y luego liberado. Más aún, cuando dicho sistema se estira una distancia x (para compresión, x es negativa), la ***fuerza restauradora*** ejercida por el resorte está dada por la **ley de Hooke**.

$$F = -kx$$

El signo menos indica que la fuerza restauradora siempre tiene dirección opuesta al desplazamiento. La ***constante del resorte (o elástica)*** k tiene unidades de N/m y es una medida de la rigidez (dureza) del resorte. La mayoría de los resortes obedecen la ley de Hooke si las deformaciones son pequeñas.

En algunas ocasiones es útil expresar la ley de Hooke en términos de la fuerza externa F_{ext} necesaria para estirar el resorte una cierta cantidad x. Esta fuerza es el negativo de la fuerza restauradora, y por tanto

$$F_{ext} = kx$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE (MAS) es el movimiento vibratorio que experimenta un sistema que obedece la ley de Hooke. La figura 11-1 ilustra un movimiento armónico simple (MAS). Debido a la semejanza de su gráfica con las curvas de las funciones seno y coseno, el MAS se llama con frecuencia *movimiento sinusoidal* o ***movimiento armónico***. Una característica central del MAS es que el sistema oscila a una sola frecuencia constante. Eso es lo que lo hace armónico "simple".

LA ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA (EP_e) almacenada en un resorte de Hooke que se deforma una distancia es $\frac{1}{2}kx^2$. Si la amplitud del movimiento es x_0 para una masa sujeta en el extremo de un resorte, entonces la energía del sistema en vibración es $\frac{1}{2}kx_0^2$ en todo momento. Sin embargo, esta energía se almacena por completo en el resorte sólo cuando $x = \pm x_0$, esto es, cuando la masa tiene su máximo desplazamiento.

EL INTERCAMBIO DE ENERGÍA entre energía cinética y potencial ocurre constantemente en un sistema que vibra. Cuando el sistema pasa por su posición de equilibrio, EC = máxima y $EP_e = 0$. Cuando el sistema tiene su máximo desplazamiento, entonces EC = 0 y EP_e = máxima. De la ley de conservación de la energía, en ausencia de pérdidas por fricción

$$\text{EC} + \text{EP}_e = \text{constante}$$

Para una masa m que se encuentra en el extremo de un resorte (cuya propia masa es despreciable), esto se convierte en

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_0^2$$

donde x_0 es la amplitud del movimiento.

LA RAPIDEZ EN UN MAS está dada por la ecuación anterior de la energía:

$$|v| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)\frac{k}{m}}$$

Recuerde que la rapidez siempre es una cantidad positiva.

LA ACELERACIÓN EN UN MAS está dada por la ley de Hooke, $F = -kx$ y $F = ma$; una vez desplazado y liberado, la fuerza restauradora impulsa al sistema. Al igualar estas dos ecuaciones para F se obtiene

$$a = -\frac{k}{m}x$$

El signo menos indica que la dirección de $\vec{\mathbf{a}}$ (y $\vec{\mathbf{F}}$) siempre es opuesta a la dirección del desplazamiento $\vec{\mathbf{x}}$. Tenga presente que ni $\vec{\mathbf{F}}$ ni $\vec{\mathbf{a}}$ son constantes.

CÍRCULO DE REFERENCIA: Suponga que un punto P se mueve con rapidez constante $|v_0|$ alrededor de un círculo, como se muestra en la figura 11-2. Este círculo se llama *círculo de referencia* para el MAS. El punto A es la proyección del punto P sobre el eje x, que coincide con el diámetro horizontal del círculo. El movimiento del punto A de ida y vuelta en torno al punto O como centro es el MAS. La amplitud del movimiento es x_0, el radio del círculo. El tiempo que emplea P en dar una vuelta alrededor del círculo es el periodo T del movimiento. La velocidad, $\vec{\mathbf{v}}_0$, del punto A tiene una componente escalar en x de

$$v_x = -|v_0| \text{ sen } \theta$$

Cuando esta cantidad es positiva, $\vec{\mathbf{v}}_x$ apunta en la dirección x positiva; cuando es negativa, $\vec{\mathbf{v}}_x$ apunta en la dirección x negativa.

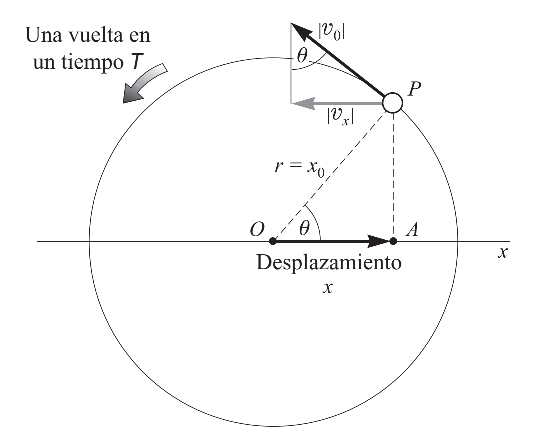


Figura 11-2

PERIODO EN EL MAS: El periodo T en un MAS es el tiempo que emplea el punto P en dar una vuelta al círculo de referencia en la figura 11-2. Por tanto,

$$T = \frac{2\pi r}{|v_0|} = \frac{2\pi x_0}{|v_0|}$$

Pero $|v_0|$ es la rapidez máxima del punto A en la figura 11-2, es decir, $|v_0|$ es el valor de $|v_x|$ en el MAS cuando $x = 0$:

$$|v_x| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)\frac{k}{m}} \quad \text{da} \quad |v_0| = x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

De donde se puede obtener el periodo del MAS

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

para un sistema de resorte de Hooke.

ACELERACIÓN EN TÉRMINOS DE T: Al eliminar la cantidad k/m entre las dos ecuaciones $a = -(k/m)x$ y $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, se encuentra

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

EL PÉNDULO SIMPLE describe de manera aproximada un MAS si el ángulo de oscilación no es muy grande. El periodo de oscilación de un péndulo de longitud L en un lugar donde la aceleración de la gravedad es g, está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

EL MAS se puede expresar analíticamente al tomar como referencia la figura 11-2, donde se ve que el desplazamiento horizontal del punto P está dado por $x = x_0 \cos\theta$. Como $\theta = \omega t = 2\pi f t$, donde la **frecuencia angular** $\omega = 2\pi f$ es la velocidad angular del punto de referencia localizado en el círculo, se tiene

$$x = x_0 \cos 2\pi f t = x_0 \cos \omega t$$

En forma similar, la componente vertical del movimiento del punto P está dada por

$$y = x_0 \text{ sen } 2\pi f t = x_0 \text{ sen } \omega t$$

PROBLEMAS RESUELTOS

11.1 [I] Para el movimiento que se muestra en la figura 11-3, ¿cuál es la amplitud, el periodo y la frecuencia?

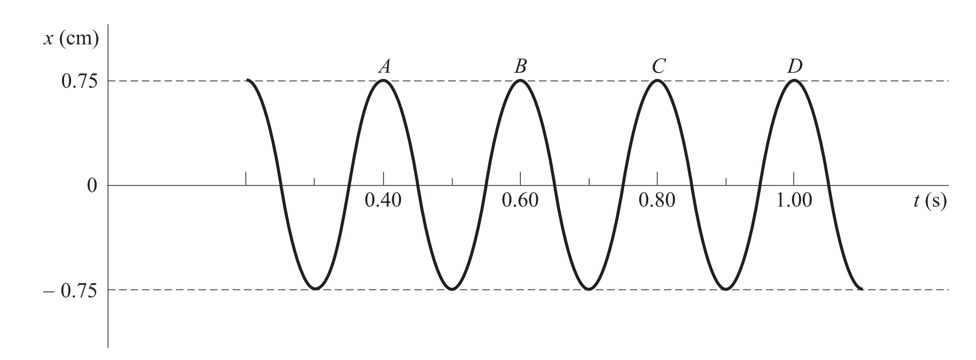


Figura 11-3

La amplitud es el desplazamiento máximo desde la posición de equilibrio y es de 0.75 cm. El periodo es el tiempo empleado para completar un ciclo, por ejemplo, el tiempo desde A hasta B. En consecuencia, el periodo es 0.20 s. La frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.20 \text{ s}} = 5.0 \text{ ciclos/s} = 5.0 \text{ Hz}$$

11.2 [I] Un resorte realiza 12 vibraciones en 40 s. Calcule el periodo y la frecuencia de la vibración.

$$T = \frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{vibraciones efectuadas}} = \frac{40 \text{ s}}{12} = 3.3 \text{ s} \quad f = \frac{\text{vibraciones efectuadas}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{12}{40 \text{ s}} = 0.30 \text{ Hz}$$

11.3 [I] Cuando una masa de 400 g cuelga en el extremo de un resorte vertical, el resorte se estira 35 cm. ¿Cuál es la constante del resorte, y cuánto más se estirará si de él se cuelga una masa adicional de 400 g?

Se usa $F_{ext} = ky$, donde

$$F_{ext} = mg = (0.400 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 3.92 \text{ N}$$

para obtener

$$k = \frac{F}{y} = \frac{3.92 \text{ N}}{0.35 \text{ m}} = 11 \text{ N/m}$$

Con la carga adicional de 400 g, la fuerza total que estira al resorte es 7.84 N. Por consiguiente

$$y = \frac{F}{k} = \frac{7.84 \text{ N}}{11.2 \text{ N/m}} = 0.70 \text{ m} = 2 \times 35 \text{ cm}$$

A condición de que sea hookeano, cada carga de 400 g estira el resorte por la misma cantidad, ya sea que el resorte esté o no cargado.

11.4 [II] Una masa de 200 g oscila horizontalmente y sin fricción en el extremo de un resorte horizontal para el que $k = 7.0$ N/m. La masa se desplaza 5.0 cm de su posición de equilibrio y luego se suelta. Encuentre

a) su máxima rapidez y *b*) su rapidez cuando se encuentra a 3.0 cm de la posición de equilibrio. *c*) ¿Cuál es su aceleración en cada uno de estos casos?

Del principio de conservación de la energía

$$\tfrac{1}{2}kx_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2$$

donde $k = 7.0$ N/m, $x_0 = 0.050$ m y $m = 0.200$ kg. Para encontrar el valor de $|v|$

$$|v| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)\frac{k}{m}}$$

a) La rapidez es máxima cuando $x = 0$; esto es, cuando la masa pasa por la posición de equilibrio:

$$|v| = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.050 \text{ m})\sqrt{\frac{7.0 \text{ N/m}}{0.200 \text{ kg}}} = 0.30 \text{ m/s}$$

b) Cuando $x = 0.030$ m,

$$|v| = \sqrt{\frac{7.0 \text{ N/m}}{0.200 \text{ kg}}[(0.050)^2 - (0.030)^2] \text{ m}^2} = 0.24 \text{ m/s}$$

c) Al utilizar $F = ma$ y $F = kx$, se obtiene

$$a = \frac{k}{m}x = (35 \text{ s}^{-2})(x)$$

lo que produce $a = 0$ cuando la masa está en $x = 0$ y $a = 1.1$ m/s^2 cuando $x = 0.030$ m.

11.5 [II] Una masa de 50 g sujeta al extremo de un resorte oscila con MAS. La amplitud del movimiento es de 12 cm y el periodo es de 1.70 s. Calcule: *a*) la frecuencia, *b*) la constante del resorte, *c*) la máxima rapidez de la masa, *d*) la aceleración máxima de la masa, *e*) la rapidez cuando el desplazamiento es de 6.0 cm y *f*) la aceleración cuando $x = 6.0$ cm.

a)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1.70 \text{ s}} = 0.588 \text{ Hz}$$

b) Como $T = 2\pi\sqrt{m/k}$,

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2(0.050 \text{ kg})}{(1.70 \text{ s})^2} = 0.68 \text{ N/m}$$

c)

$$|v|_0 = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.12 \text{ m})\sqrt{\frac{0.68 \text{ N/m}}{0.050 \text{ kg}}} = 0.44 \text{ m/s}$$

d) De la ecuación $a = -(k/m)x$ se ve que a tiene magnitud máxima cuando x tiene magnitud máxima; es decir, en los puntos extremos $x = \pm x_0$. De este modo,

$$a_0 = \frac{k}{m}x_0 = \frac{0.68 \text{ N/m}}{0.050 \text{ kg}}(0.12 \text{ m}) = 1.6 \text{ m/s}^2$$

e) De la ecuación $|v| = \sqrt{(x_0^2 - x^2)(k/m)}$,

$$|v| = \sqrt{\frac{[(0.12 \text{ m})^2 - (0.06 \text{ m})^2](0.68 \text{ N/m})}{(0.050 \text{ kg})}} = 0.38 \text{ m/s}$$

f)

$$a = -\frac{k}{m}x = -\frac{0.68 \text{ N/m}}{0.050 \text{ kg}}(0.060 \text{ m}) = -0.82 \text{ m/s}^2$$

11.6 [II] Una masa de 50 g cuelga del extremo de un resorte de Hooke. Cuando se añaden 20 g más al extremo del resorte, éste se estira 7.0 cm más. *a*) Encuentre la constante del resorte. *b*) Si la masa de 20 g se retira, ¿cuál será el periodo del movimiento?

a) Con el peso de la masa de 50 g, $F_{\text{ext 1}} = kx_1$, donde x_1 es el alargamiento original del resorte. Cuando se agregan 20 g, la fuerza se convierte en $F_{\text{ext 1}} + F_{\text{ext 2}} = k(x_1 + x_2)$, donde $F_{\text{ext 2}}$ es el peso de la masa de 20 g, y x_2 es el alargamiento que ésta produce. Al restar las dos ecuaciones de fuerza se obtiene

$$F_{\text{ext 2}} = kx_2$$

(Note que esto es lo mismo que $F_{\text{ext}} = kx$, donde F_{ext} es la fuerza de alargamiento adicional y x es la cantidad que se estira debida a ésta. Por esto se podría haber ignorado el hecho de que el resorte ya tenía colgada la masa de 50 g en su extremo.) Al resolver para k se obtiene

$$k = \frac{F_{\text{ext 2}}}{x_2} = \frac{(0.020\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{0.070\ \text{m}} = 2.8\ \text{N/m}$$

b)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.050\ \text{kg}}{2.8\ \text{N/m}}} = 0.84\ \text{s}$$

11.7 [II] Como se muestra en la figura 11-4, un resorte ligero y largo de acero está fijo en su extremo inferior y en la parte superior tiene amarrada una pelota de 2.0 kg. Se requiere una fuerza de 8.0 N para desplazar la pelota 20 cm a un lado, como se muestra. Suponga que el sistema experimenta MAS cuando se libera. *a*) Calcule la constante de fuerza del resorte y *b*) el periodo con el que oscilará la pelota de ida y vuelta.

a)
$$k = \frac{\text{fuerza externa } F_{\text{ext}}}{\text{desplazamiento } x} = \frac{8.0\ \text{N}}{0.20\ \text{m}} = 40\ \text{N/m}$$

b)
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.0\ \text{kg}}{40\ \text{N/m}}} = 1.4\ \text{s}$$

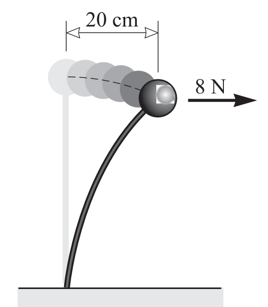


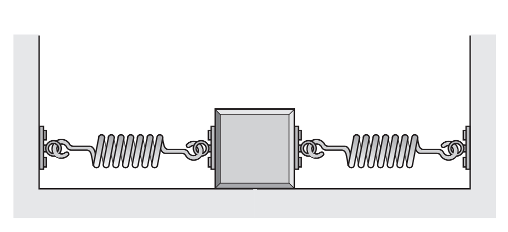
Figura 11-4

11.8 [II] Cuando una masa m se cuelga de un resorte, éste se estira 6.0 cm. Determine el periodo de oscilación si se tira del resorte hacia abajo un poco y después se suelta.

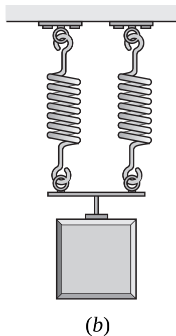
Como
$$k = \frac{F_{\text{ext}}}{x} = \frac{mg}{0.060\ \text{m}}$$

se obtiene
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.060\ \text{m}}{g}} = 0.49\ \text{s}$$

11.9 [II] Dos resortes idénticos tienen k = 20 N/m. Una masa de 0.30 kg se sujeta a ellos como se muestra en los incisos *a*) y *b*) de la figura 11-5. Encuentre el periodo de oscilación de cada sistema. Desprecie las fuerzas de fricción.



(*a*)



(*b*)

Figura 11-5

a) Considere qué pasa cuando a la masa se le da un desplazamiento $x > 0$. Un resorte se alarga una distancia x mientras el otro se comprime la misma distancia x. Cada uno de ellos ejercerá una fuerza de magnitud (20 N/m)x sobre la masa en dirección contraria al desplazamiento. Por ello la fuerza restauradora total será

$$F = -(20 \text{ N/m})x - (20 \text{ N/m})x = -(40 \text{ N/m})x$$

Comparado con $F = -kx$ se puede ver que el sistema tiene una constante de resorte de $k = 40$ N/m. Por lo mismo,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.30 \text{ kg}}{40 \text{ N/m}}} = 0.54 \text{ s}$$

b) Cuando la masa se desplaza una distancia y hacia abajo, cada resorte se estira una distancia y. La fuerza neta restauradora sobre la masa es entonces

$$F = -(20 \text{ N/m})y - (20 \text{ N/m})y = -(40 \text{ N/m})y$$

La comparación con $F = -ky$ muestra que k es 40 N/m, la misma que en *a*). Por consiguiente, el periodo en este caso también es 0.54 s.

11.10 [II] En cierto motor, un pistón experimenta MAS vertical con amplitud de 7.0 cm. Una arandela descansa en la parte superior del pistón. Conforme aumenta lentamente la rapidez del motor, ¿a qué frecuencia la arandela no estará en contacto con el pistón?

La aceleración descendente máxima de la arandela será aquella en la cual se encuentre en caída libre, g. Si el pistón acelera hacia abajo más rápido que ésta, la arandela perderá el contacto.

En un MAS, la aceleración está dada en términos del desplazamiento y del periodo

$$a = -\frac{4\pi^2}{T^2}x$$

(Para ver esto, note que $a = -F/m = -kx/m$. Pero $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, de donde $k = 4\pi^2 m/T^2$, que entonces produce la expresión anterior para a.) Al tomar como positiva la dirección hacia arriba, la mayor aceleración hacia abajo (más negativa) ocurre cuando $x = +x_0 = 0.070$ m; esto es

$$a_0 = \frac{4\pi^2}{T^2}(0.070 \text{ m})$$

La arandela se separará del pistón cuando a_0 sea igual a g. Por esta razón, el periodo crítico para el MAS, T_c, está dado por

$$\frac{4\pi^2}{T_c^2}(0.070 \text{ m}) = g \qquad \text{o} \qquad T_c = 2\pi\sqrt{\frac{0.070 \text{ m}}{g}} = 0.53 \text{ s}$$

Éste corresponde a una frecuencia $f_c = 1/T_c = 1.9$ Hz. La arandela perderá contacto con el pistón si la frecuencia del pistón excede 1.9 ciclos/s.

11.11 [II] Un motor eléctrico de 20 kg se monta sobre cuatro resortes verticales, cada uno con una constante de resorte de 30 N/cm. Calcule el periodo con el cual oscilará verticalmente.

Al igual que en el problema 11.9, se pueden reemplazar los resortes con un solo resorte equivalente. En este caso la constante de fuerza será de 4(3 000 N/m) o 12 000 N/m. Entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{20 \text{ kg}}{12\,000 \text{ N/m}}} = 0.26 \text{ s}$$

11.12 [II] Se vierte mercurio dentro de un tubo de vidrio en U. Normalmente el mercurio se encuentra a la misma altura en ambas columnas, pero, cuando se le perturba, oscila arriba y abajo de brazo a brazo (vea la fi-

gura 11-6). Un centímetro de la columna de mercurio tiene una masa de 15.0 g. Suponga que la columna se desplaza como se muestra, después se libera y oscila sin fricción. Calcule *a*) la constante efectiva del resorte en este movimiento y *b*) su periodo de oscilación.

a) Cuando el mercurio se desplaza x m de su posición de equilibrio como se muestra, la fuerza restauradora es igual al peso de la columna no balanceada de longitud $2x$. El mercurio tiene una masa de 1.50 kg por metro. Por tanto, la masa de la columna es $(2x)(1.50 \text{ kg})$, y en consecuencia su peso es $mg = (29.4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2)(x)$. Por esto la fuerza restauradora es

$$F = (29.4 \text{ N/m})(x)$$

que es de la forma $F = kx$ con $k = 29.4$ N/m. Ésta es la constante efectiva del resorte para este movimiento.

b) El periodo del movimiento es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 1.16\sqrt{M} \text{ s}$$

donde M es la masa total de mercurio en el tubo en U, esto es, la masa total que se mueve debido a la fuerza restauradora.

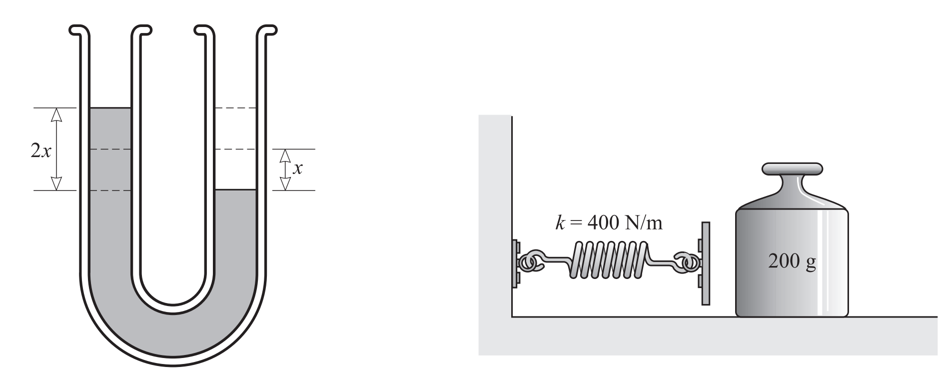


Figura 11-6 **Figura 11-7**

11.13 [II] Calcule la aceleración de la gravedad en un lugar donde un péndulo simple de 150.3 cm de longitud efectúa 100.0 ciclos en 246.7 s.

Se tiene
$$T = \frac{246.7 \text{ s}}{100.0} = 2.467 \text{ s}$$

Al elevar al cuadrado $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ y resolver para g se obtiene

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} L = 9.749 \text{ m/s}^2$$

11.14 [II] La masa de 200 g que se muestra en la figura 11-7 se empuja hacia la izquierda contra el resorte y lo comprime 15 cm desde su posición de equilibrio. Luego se libera el sistema y la masa sale disparada hacia la derecha. Si la fricción se puede despreciar, ¿qué tan rápido se moverá la masa conforme se aleja? Suponga que la masa del resorte es muy pequeña.

Cuando el resorte se comprime, almacena energía en su interior. Dicha energía es $\frac{1}{2}kx_0^2$, donde $x_0 = 0.15$ m. Después de soltar el sistema, esta energía se le comunica a la masa en forma de energía cinética (EC). Cuando el resorte pasa por la posición de equilibrio, toda la EP_e se convertirá en EC (como la masa del resorte es pequeña, su energía cinética se puede despreciar). Por esta razón,

$$\text{EP}_e \text{ original} = \text{EC final de la masa}$$

$$\tfrac{1}{2}kx_0^2 = \tfrac{1}{2}mv^2$$

$$\tfrac{1}{2}(400 \text{ N/m})(0.15 \text{ m})^2 = \tfrac{1}{2}(0.200 \text{ kg})v^2$$

de donde $v = 6.7$ m/s.

11.15 [II] Suponga que, en la figura 11-7, la masa de 200 g inicialmente se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 8.0 m/s. Choca contra el resorte y queda sujeta a él. *a*) ¿Qué tanto se comprime el resorte? *b*) Si el sistema entra en oscilación, ¿cuál es su amplitud? Desprecie la fricción y la masa del resorte.

a) Ya que la masa del resorte es despreciable, toda la EC de la masa se utiliza para comprimir el resorte. Por esto se puede escribir

$$\text{EC original de la masa} = \text{EP}_e \text{ final}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}kx_0^2$$

donde $v_0 = 8.0$ m/s y x_0 es la máxima compresión del resorte. Para $m = 0.200$ kg y $k = 400$ N/m, la relación anterior nos da $x_0 = 0.179$ m $= 0.18$ m

b) El resorte se comprime 0.179 m desde su posición de equilibrio. En este punto toda la energía del sistema masa-resorte es EP_e. Conforme el resorte empuja a la masa de vuelta hacia la derecha, la masa pasará por la posición de equilibrio. La masa se detendrá en un punto a la derecha de la posición de equilibrio donde la energía de nuevo es toda EP_e. Como no existen pérdidas, la energía almacenada en el resorte estirado debe ser la misma que la almacenada en el resorte comprimido. Por esta razón, se estirará $x_0 = 0.18$ m desde la posición de equilibrio. En consecuencia, la amplitud de la oscilación es 0.18 m.

11.16 [II] En la figura 11-8 la masa de 2.0 kg se suelta cuando el resorte no está estirado. Si se desprecian la inercia y la fricción de la polea, y las masas del resorte y la cuerda, encuentre *a*) la amplitud de la oscilación resultante y *b*) su centro o punto de equilibrio.

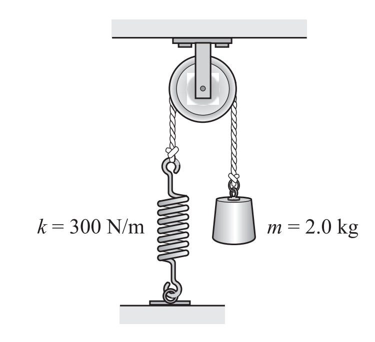


Figura 11-8

a) Suponga que la masa cae una distancia *h* antes de detenerse. En ese instante, la EP_G perdida (*mgh*) estará almacenada en el resorte, de modo que

$$mgh = \frac{1}{2}kh^2 \qquad \text{o} \qquad h = 2\frac{mg}{k} = 0.13 \text{ m}$$

En su movimiento hacia arriba la masa se detiene cuando la energía del sistema se recobra toda como EP_G. Por tanto, subirá 0.13 m arriba de su posición más baja. En consecuencia, la amplitud es 0.13/2 = 0.065 m.

b) El punto central del movimiento se localiza a una distancia de 0.065 m abajo del punto de donde la masa fue liberada, esto es, una distancia igual a la mitad de la recorrida debajo del punto más alto.

11.17 [II] Una partícula de 3.0 g sujeta al extremo de un resorte se mueve de acuerdo con la ecuación $y = 0.75$ sen $63t$, donde y está dada en cm y t en segundos. Calcule la amplitud y la frecuencia de su movimiento, su posición en $t = 0.020$ s, y la constante del resorte.

La ecuación de movimiento es $y = y_0 \text{ sen } 2\pi ft$. Por comparación, se ve que la amplitud es $y_0 = 0.75$ cm. Además,

$$2\pi f = 63 \text{ s}^{-1} \qquad \text{de donde} \qquad f = 10 \text{ Hz}$$

(Note que el argumento de la función seno debe ser adimensional; como t está en segundos, $2\pi f$ debe tener la unidad 1/s.)

Cuando $t = 0.020$ s, se tiene

$$y = 0.75 \text{ sen } (1.26 \text{ rad}) = (0.75)(0.952) = 0.71 \text{ cm}$$

Observe que el argumento de la función seno está en radianes, no en grados.

Para calcular la constante del resorte, se utiliza $f = (1/2\pi)\sqrt{k/m}$ para obtener

$$k = 4\pi^2 f^2 m = 11.9 \text{ N/m} = 12 \text{ N/m}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

11.18 [I] Una pequeña esfera metálica con peso de 10.0 N cuelga de un resorte vertical que llega al reposo después de estirarse 2.0 cm. Determine la constante de resorte. **Resp.** 5.0×10^2 N/m.

11.19 [I] ¿Cuánta energía se almacena en un resorte que tiene una constante elástica de 1 000 N/m cuando se comprime 10 cm? **Resp.** 5.0 J.

11.20 [I] Un péndulo es cronometrado cuando oscila. El reloj se arranca cuando la lenteja está en el extremo izquierdo de su oscilación. Cuando la lenteja regresa al extremo izquierdo después de la vuelta 90, el reloj marca 60.0 s. ¿Cuál es el periodo de oscilación y cuál la frecuencia? **Resp.** 0.667 s, 1.50 Hz.

11.21 [II] Una masa de 300 g en el extremo de un resorte de Hooke oscila en dirección vertical de tal forma que se encuentra a 2.0 cm sobre la mesa en su punto más bajo y a 16 cm arriba en su punto más alto. Su periodo es de 4.0 s. Determine: *a*) la amplitud de vibración, *b*) la constante del resorte, *c*) la rapidez y la aceleración de la masa cuando está 9 cm arriba de la cubierta de la mesa, *d*) la rapidez y la aceleración de la masa cuando se encuentra a 12 cm arriba de la mesa. **Resp.** *a*) 7.0 cm; *b*) 0.74 N/m; *c*) 0.11 m/s; cero; *d*) 0.099 m/s, 0.074 m/s^2.

11.22 [II] Un resorte de Hooke helicoidal se estira 10 cm cuando una masa de 1.5 kg cuelga de él. Suponga que una masa de 4.0 kg cuelga del resorte y entra en oscilación con una amplitud de 12 cm. Calcule *a*) la constante de fuerza del resorte, *b*) la fuerza restauradora máxima que actúa sobre el cuerpo que oscila, *c*) el periodo de oscilación, *d*) la máxima rapidez y la máxima aceleración del cuerpo que oscila y *e*) la rapidez y aceleración cuando el desplazamiento es de 9 cm. **Resp.** *a*) 0.15 kN/m; *b*) 18 N; *c*) 1.0 s; *d*) 0.73 m/s, 4.4 m/s^2; *e*) 0.48 m/s, 3.3 m/s^2.

11.23 [II] Una masa de 2.5 kg experimenta MAS y efectúa exactamente 3 oscilaciones cada segundo. Calcule la aceleración y la fuerza restauradora que actúan sobre el cuerpo cuando se desplaza 5.0 cm de la posición de equilibrio. **Resp.** 18 m/s^2, 44 N.

11.24 [II] Una masa de 300 g en el extremo de un resorte oscila con una amplitud de 7.0 cm y una frecuencia de 1.80 Hz. *a*) Calcule la rapidez y la aceleración máximas. *b*) ¿Cuál es su rapidez cuando se encuentra a 3.0 cm de su posición de equilibrio? **Resp.** *a*) 0.79 m/s, 8.9 m/s^2; *b*) 0.72 m/s.

11.25 [II] Un resorte de Hooke se estira 20 cm cuando una masa dada cuelga de él. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de la masa si se jala hacia abajo un poco y después se suelta? **Resp.** 1.1 Hz.

11.26 [II] Una masa de 300 g en el extremo de un resorte ejecuta un MAS con un periodo de 2.4 s. Calcule el periodo de oscilación cuando la masa de 300 g se sustituye por una masa de 133 g en el mismo resorte. **Resp.** 1.6 s.

11.27 [II] Con una masa de 50 g en su extremo, un resorte experimenta MAS con una frecuencia de 0.70 Hz. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte 15 cm desde su longitud no elongada? ¿Cuánta energía se almacena entonces en el resorte? **Resp.** 0.011 J, 0.011 J.

11.28 [II] En una situación similar a la que se muestra en la figura 11-7, una masa presiona contra un resorte de masa despreciable para el cual $k = 400$ N/m. La masa comprime al resorte 8.0 cm y luego se suelta. Después de resbalar 55 cm sobre la mesa plana desde el punto de liberación, la masa llega al reposo. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza de fricción que se opone al movimiento? **Resp.** 2.3 N.

11.29 [II] Una masa de 500 g está unida al extremo de un resorte vertical inicialmente sin alargar para el cual $k = 30$ N/m. Después se suelta la masa, de modo que cae y alarga el resorte. ¿Cuánto caerá antes de detenerse? (*Sugerencia*: La EP_G perdida por la masa debe aparecer como EP_e.) **Resp.** 33 cm.

11.30 [II] Una pistola de juguete utiliza un resorte para el cual $k = 20$ N/cm. Cuando está cargado, el resorte se comprime 3.0 cm. ¿Qué altura alcanzará un proyectil de 5.0 g disparado con esta pistola? **Resp.** 18 m.

11.31 [II] Un bloque cúbico oscila horizontalmente en MAS con una amplitud de 8.0 cm y una frecuencia de 1.50 Hz. Si un bloque más pequeño colocado sobre el primero no ha de resbalar, ¿cuál es el valor mínimo que puede tener el coeficiente de fricción estática entre los dos bloques? **Resp.** 0.72.

11.32 [II] Calcule la frecuencia de oscilación en Marte de un péndulo simple que tiene 50 cm de longitud. El peso de los objetos en Marte es 0.40 veces el peso en la Tierra. **Resp.** 0.45 Hz.

11.33 [II] Un "péndulo segundero" marca pulsaciones de segundo, esto es, tarda 1 s para completar medio ciclo. *a*) ¿Cuál es la longitud de un "péndulo segundero" simple en un lugar donde $g = 9.80$ m/s^2? *b*) En ese lugar, ¿cuál es la longitud de un péndulo para el cual $T = 1.00$ s? **Resp.** *a*) 99.3 cm; *b*) 24.8 cm.

11.34 [II] Demuestre que el periodo natural de oscilación vertical de una masa colgada en un resorte de Hooke es el mismo que el periodo de un péndulo simple cuya longitud es igual a la elongación que produce la masa cuando cuelga del resorte.

11.35 [II] Una partícula que está en el origen de coordenadas exactamente en $t = 0$ oscila en torno al origen a lo largo del eje y con una frecuencia de 20 Hz y una amplitud de 3.0 cm. Escriba su ecuación de movimiento en centímetros. **Resp.** $y = 3.0$ sen $125.6t$.

11.36 [II] Una partícula oscila de acuerdo con la ecuación $x = 20 \cos 16t$, donde x está en cm. Encuentre su amplitud, frecuencia y posición en exactamente $t = 0$ s. **Resp.** 20 cm, 2.6 Hz, $x = 20$ cm.

11.37 [II] Una partícula oscila de acuerdo con la ecuación $y = 5.0 \cos 23t$, donde y está en centímetros. Calcule su frecuencia de oscilación y su posición en $t = 0.15$ s. **Resp.** 3.7 Hz, -4.8 cm.

DENSIDAD; ELASTICIDAD

12

LA DENSIDAD (ρ) de un material es su masa por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{\text{masa del cuerpo}}{\text{volumen del cuerpo}} = \frac{m}{V}$$

La unidad en el SI para la densidad es kg/m^3, aunque también se usa g/cm^3: 1 000 kg/m^3 = 1 g/cm^3. La densidad del agua es aproximadamente 1 000 kg/m^3.

DENSIDAD RELATIVA (GRAVEDAD ESPECÍFICA) (rrel) de una sustancia es la razón de la densidad de una sustancia respecto a la densidad de una sustancia estándar. El estándar generalmente es el agua (a 4 °C) para sólidos y líquidos, mientras que para gases usualmente es el aire.

$$\text{rrel} = \frac{\rho}{\rho_{\text{estándar}}}$$

Como la densidad relativa es adimensional, tiene el mismo valor para todos los sistemas de unidades.

ELASTICIDAD es la propiedad mediante la cual un cuerpo recobra su tamaño y forma originales cuando la fuerza que lo deformó deja de actuar.

EL ESFUERZO (σ) que experimenta un sólido es la magnitud de la fuerza actuante (F) dividida por el área (A) sobre la que actúa dicha fuerza:

$$\text{Esfuerzo} = \frac{\text{fuerza}}{\text{área sobre la que actúa la fuerza}}$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Su unidad en el SI es el **pascal** (Pa), donde 1 Pa = 1 N/m^2. De esta manera, si un bastón soporta una carga el esfuerzo en cualquier punto en el interior del bastón es la carga dividida entre el área de la sección transversal en ese punto; las secciones más delgadas experimentan el mayor esfuerzo.

DEFORMACIÓN (ε) es la fracción del cambio de forma que resulta de un esfuerzo. Se mide por la razón del cambio en alguna dimensión del cuerpo con respecto a la dimensión original en la que ocurre el cambio.

$$\text{Deformación} = \frac{\text{cambio en la dimensión}}{\text{dimensión original}}$$

Así, la deformación normal de un cuerpo bajo una carga axial es el cambio de la longitud (ΔL) sobre la longitud original L_0:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

La deformación no tiene unidades, ya que es una razón entre cantidades con las mismas dimensiones.

EL LÍMITE ELÁSTICO de un cuerpo es el esfuerzo más pequeño que producirá una deformación permanente en el cuerpo. Cuando se aplica un esfuerzo que excede este límite, el cuerpo no regresa a su estado original exacto después de que se elimina el esfuerzo aplicado.

EL MÓDULO DE YOUNG (Y) o **módulo de elasticidad** se describe como

$$\text{Módulo de elasticidad} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}$$

El módulo tiene las mismas unidades que el esfuerzo N/m^2 o Pa. Un módulo grande significa que, para producir una deformación dada, es necesario un esfuerzo grande: el cuerpo es rígido.

De acuerdo con lo anterior,

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\,\Delta L}$$

A diferencia de la constante k de la ley de Hooke, el valor de Y depende sólo del material del alambre o varilla, y no de sus dimensiones o configuración. En consecuencia, el módulo de Young es una importante medida básica del comportamiento mecánico de los materiales.

EL MÓDULO VOLUMÉTRICO (B) describe la elasticidad volumétrica de un material. Suponga que una fuerza de compresión, uniformemente distribuida, actúa sobre la superficie de un objeto y es perpendicular a la superficie en todos los puntos. Entonces, si F es la fuerza que actúa sobre y perpendicular a la superficie A, se define:

$$\text{Presión sobre } A = P = \frac{F}{A}$$

En el SI la unidad de presión es Pa.

Suponga que la presión sobre un objeto de volumen inicial V_0 se incrementa en una cantidad ΔP. El incremento en la presión origina un cambio de volumen ΔV, donde ΔV es negativo. Entonces se define:

$$\text{Esfuerzo volumétrico} = \Delta P \qquad \text{Deformación volumétrica} = -\frac{\Delta V}{V_0}$$

Por tanto

$$\text{Módulo volumétrico} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}$$

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0} = -\frac{V_0\,\Delta P}{\Delta V}$$

El signo menos se utiliza para eliminar el valor numérico negativo de ΔV y, por consiguiente, para convertir a B en un número positivo. El módulo volumétrico tiene unidades de presión.

El recíproco del módulo volumétrico se llama *compresibilidad* K de una sustancia.

EL MÓDULO DE CORTE (S) describe la elasticidad de la forma de un material. Suponga, como se muestra en la figura 12-1, que sobre un bloque rectangular actúan fuerzas tangenciales F iguales y opuestas. Estas *fuerzas cortantes* deforman el bloque como se indica, pero su volumen permanece constante. Se define

$$\text{Esfuerzo cortante} = \frac{\text{fuerza tangencial actuante}}{\text{área que se corta}}$$

$$\sigma_s = \frac{F}{A}$$

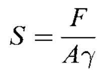
$$\text{Deformación cortante} = \frac{\text{distancia que se corta}}{\text{distancia entre las superficies}}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Entonces
$$\text{Módulo de corte} = \frac{\text{esfuerzo}}{\text{deformación}}$$

$$S = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \frac{FL_0}{A\,\Delta L}$$

Ya que ΔL en general es muy pequeña, la razón $\Delta L/L_0$ es aproximadamente igual al ángulo de corte γ en radianes. En este caso



$$S = \frac{F}{A\gamma}$$

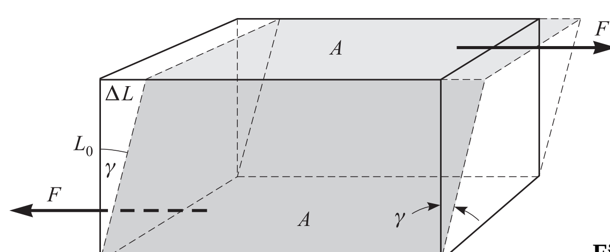


Figura 12-1

PROBLEMAS RESUELTOS

12.1 [I] Determine la densidad y la densidad relativa de la gasolina, si 51 g ocupan 75 cm^3.

$$\text{Densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{0.051\ \text{kg}}{75 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 6.8 \times 10^2\ \text{kg/m}^3$$

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{densidad de la gasolina}}{\text{densidad del agua}} = \frac{6.8 \times 10^2\ \text{kg/m}^3}{1000\ \text{kg/m}^3} = 0.68$$

o bien
$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{masa de 75 cm}^3\text{ de gasolina}}{\text{masa de 75 cm}^3\text{ de agua}} = \frac{51\ \text{g}}{75\ \text{g}} = 0.68$$

12.2 [I] ¿Qué volumen ocupan 300 g de mercurio? La densidad del mercurio es 13 600 kg/m^3.

De $\rho = m/V$,

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.300\ \text{kg}}{13\ 600\ \text{kg/m}^3} = 2.21 \times 10^{-5}\ \text{m}^3 = 22.1\ \text{cm}^3$$

12.3 [I] La densidad relativa del hierro colado es de 7.20. Determine su densidad y la masa de 60.0 cm^3 de hierro.

Para hacerlo se utilizará

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{densidad de la sustancia}}{\text{densidad del agua}} \qquad \text{y} \qquad \rho = \frac{m}{V}$$

De la primera ecuación,

$$\text{Densidad del hierro} = (\text{densidad relativa})(\text{densidad del agua}) = (7.20)(1\ 000\ \text{kg/m}^3) = 7\ 200\ \text{kg/m}^3$$

así pues, $\text{Masa de 60.0 cm}^3 = \rho V = (7\ 200\ \text{kg/m}^3)(60.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) = 0.432\ \text{kg}$

12.4 [I] La masa de cierto matraz calibrado cuando está vacío es de 25.0 g, cuando se llena con agua es de 75.0 g y cuando se llena con glicerina es de 88.0 g. Encuentre la densidad relativa de la glicerina.

De los datos, la masa de la glicerina es de 63.0 g, mientras que un volumen igual de agua tiene una masa de 50.0 g. Entonces

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\text{masa de la glicerina}}{\text{masa del agua}} = \frac{63.0\ \text{g}}{50.0\ \text{g}} = 1.26$$

12.5 [I] Un matraz calibrado tiene una masa de 30.0 g cuando está vacío, 81.0 g cuando está lleno de agua y 68.0 g cuando está lleno de aceite. Determine la densidad del aceite.

Primero se calcula el volumen del matraz por medio de $\rho = m/V$, utilizando los datos del agua:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{(81.0 - 30.0) \times 10^{-3}\ \text{kg}}{1\,000\ \text{kg/m}^3} = 51.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

Entonces, para el aceite,

$$\rho_{\text{aceite}} = \frac{m_{\text{aceite}}}{V} = \frac{(68.0 - 30.0) \times 10^{-3}\ \text{kg}}{51.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3} = 745\ \text{kg/m}^3$$

12.6 [I] Un cubo sólido de aluminio tiene 2.00 cm por lado. La densidad del aluminio es de 2 700 kg/m^3. Determine la masa del cubo.

$$\text{Masa del cubo} = \rho V = (2\,700\ \text{kg/m}^3)(0.020\,0\ \text{m})^3 = 0.0216\ \text{kg} = 21.6\ \text{g}$$

12.7 [I] ¿Cuál es la masa de un litro (1 000 cm^3) de aceite de semilla de algodón cuya densidad es de 926 kg/m^3? ¿Cuál es su peso?

$$m = \rho V = (926\ \text{kg/m}^3)(1\,000 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) = 0.926\ \text{kg}$$

$$\text{Peso} = mg = (0.926\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 9.08\ \text{N}$$

12.8 [I] Un proceso de chapeado electrolítico de estaño da un recubrimiento con un espesor de 7.50×10^{-5} cm. ¿Cuál será el área de la superficie que puede cubrirse con 0.500 kg de estaño? La densidad del estaño es de 7 300 kg/m^3.

El volumen de 0.500 kg de estaño se obtiene de la relación $\rho = m/V$

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.500\ \text{kg}}{7\,300\ \text{kg/m}^3} = 6.85 \times 10^{-5}\ \text{m}^3$$

El volumen de una película con área A y espesor t es $V = At$. Al despejar A, se tiene

$$A = \frac{V}{t} = \frac{6.85 \times 10^{-5}\ \text{m}^3}{7.50 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 91.3\ \text{m}^2$$

que sería el área que puede cubrirse.

12.9 [I] Una lámina delgada de oro tiene una masa de 6.50 mg y un área de 3.12 cm^2. ¿De qué grueso es la lámina? La densidad del oro es de 19 300 kg/m^3.

Un miligramo es igual a 10^{-6} kg, así que la masa de la lámina es de 6.50×10^{-6} kg. Su volumen es

$$V = (\text{área}) \times (\text{espesor}) = (3.12 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)\,(\tau)$$

donde τ es el espesor de la lámina. Esta expresión para el volumen se iguala con m/ρ para obtener

$$(3.12 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)(\tau) = \frac{6.50 \times 10^{-6}\ \text{kg}}{19\,300\ \text{kg/m}^3}$$

de donde $\tau = 1.08 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1.08\ \mu\text{m}$.

12.10 [I] La masa de un litro de leche es de 1.032 kg. La grasa que contiene es de una densidad de 865 kg/m^3 cuando está pura, y constituye exactamente 4% de la leche por volumen. ¿Cuál es la densidad de la leche descremada?

Volumen de grasa en 1 000 cm^3 de leche = 4% × 1 000 cm^3 = 40.0 cm^3

$$\text{Masa de } 40.0 \text{ cm}^3 \text{ de grasa} = V\rho = (40.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(865 \text{ kg/m}^3) = 0.0346 \text{ kg}$$

$$\text{Densidad de la leche descremada} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{(1.032 - 0.0346) \text{ kg}}{(1000 - 40.0) \times 10^{-6} \text{ m}^3} = 1.04 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

12.11 [II] Un alambre de metal de 75.0 cm de longitud y 0.130 cm de diámetro se alarga 0.0350 cm cuando se le cuelga una carga de 8.00 kg en uno de sus extremos. Encuentre el esfuerzo, la deformación y el módulo de Young para el material del alambre.

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{(8.00 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{\pi(6.50 \times 10^{-4} \text{ m})^2} = 5.91 \times 10^7 \text{ N/m}^2 = 5.91 \times 10^7 \text{ Pa}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{0.0350 \text{ cm}}{75.0 \text{ cm}} = 4.67 \times 10^{-4}$$

$$Y = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{5.91 \times 10^7 \text{ Pa}}{4.67 \times 10^{-4}} = 1.27 \times 10^{11} \text{ Pa} = 127 \text{ GPa}$$

12.12 [II] Una columna cilíndrica de acero tiene 4.0 m de largo y 9.0 cm de diámetro. ¿Cuál será su decremento en longitud cuando soporta una carga de 80 000 kg? $Y = 1.9 \times 10^{11}$ Pa.

Primero se calcula

$$\text{Área de la sección transversal de la columna} = \pi r^2 = \pi(0.045 \text{ m})^2 = 6.36 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Ahora, dado que $Y = (F/A)/(\Delta L/L_0)$, se tiene

$$\Delta L = \frac{FL_0}{AY} = \frac{[(8.00 \times 10^4)(9.81) \text{ N}](4.0 \text{ m})}{(6.36 \times 10^{-3} \text{ m}^2)(1.9 \times 10^{11} \text{ Pa})} = 2.6 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.6 \text{ mm}$$

12.13 [I] La presión atmosférica es de aproximadamente 1.01×10^5 Pa. ¿De qué magnitud será la fuerza que ejerce la atmósfera sobre un área de 2.0 cm^2 en la parte superior de su cabeza?

Ya que $P = F/A$, donde F es perpendicular a A, se obtiene $F = PA$. Si supone que 2.0 cm^2 de su cabeza son planos (aproximadamente correcto) y que la fuerza debida a la atmósfera es perpendicular a la superficie (como de hecho lo es), se tiene

$$F = PA = (1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 20 \text{ N}$$

12.14 [I] Una mujer de 60 kg se encuentra de pie sobre una caja cúbica ligera que tiene 5.0 cm por lado. La caja se encuentra colocada en el piso. ¿Cuál es la presión que ejerce la caja sobre el piso?

$$P = \frac{F}{A} = \frac{(60)(9.81) \text{ N}}{(5.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 2.4 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

12.15 [I] El módulo volumétrico del agua es 2.1 GPa. Calcule la contracción volumétrica de 100 mL de agua cuando se someten a una presión de 1.5 MPa.

Dado que $B = -\Delta P/(\Delta V/V_0)$, se tiene

$$\Delta V = -\frac{V_0 \, \Delta P}{B} = -\frac{(100 \text{ mL})(1.5 \times 10^6 \text{ Pa})}{2.1 \times 10^9 \text{ Pa}} = -0.071 \text{ mL}$$

12.16 [II] Una gelatina con forma de caja tiene un área en su base de 15 cm² y una altura de 3.0 cm. Cuando se aplica una fuerza cortante de 0.50 N en la cara superior, ésta se desplaza 4.0 mm en relación con la cara inferior. ¿Cuáles son el esfuerzo cortante, la deformación cortante y el módulo de corte para la gelatina?

$$\sigma_s = \frac{\text{fuerza tangencial}}{\text{área de cara}} = \frac{0.50\ \text{N}}{15 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 0.33\ \text{kPa}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{altura}} = \frac{0.40\ \text{cm}}{3.0\ \text{cm}} = 0.13$$

$$S = \frac{0.33\ \text{kPa}}{0.13} = 2.5\ \text{kPa}$$

12.17 [III] Una pelota de 15 kg y 4.0 cm de radio está suspendida de un punto ubicado a 2.94 m sobre el piso por medio de un alambre de hierro cuya longitud no alargada es de 2.85 m. El diámetro del alambre es de 0.090 cm y su módulo de Young es 180 GPa. Si la pelota se pone a oscilar de tal manera que su centro pase por el punto más bajo de su trayectoria a 5.0 m/s, ¿a qué distancia del piso pasará la pelota? Analice cualquier aproximación que haga.

Sea F_T la tensión del alambre cuando la pelota al oscilar pasa por el punto más bajo. Ya que F_T debe suministrar la fuerza centrípeta, así como equilibrar el peso,

$$F_T = mg + \frac{mv^2}{r} = m\left(9.81 + \frac{25}{r}\right)$$

todo en unidades del SI apropiadas. Esta expresión es complicada, ya que r es la distancia desde el pivote al centro de la pelota cuando el alambre está estirado, así que es igual a $r_0 + \Delta r$, donde r_0, la longitud no deformada del alambre, es

$$r_0 = 2.85\ \text{m} + 0.040\ \text{m} = 2.89\ \text{m}$$

y donde Δr es todavía desconocida. Sin embargo, la distancia no deformada desde el pivote al borde inferior de la pelota es de 2.85 m + 0.080 m = 2.93 m, de donde el máximo valor posible para Δr es

$$2.94\ \text{m} - 2.93\ \text{m} = 0.01\ \text{m}$$

Por consiguiente, si se utiliza $r = r_0 = 2.89$ m, el error que se comete no es mayor a 1/3%. Esto produce $F_T = 277$ N. Bajo esta tensión, el alambre se alargará

$$\Delta L = \frac{FL_0}{AY} = \frac{(277\ \text{N})(2.85\ \text{m})}{\pi(4.5 \times 10^{-4}\ \text{m})^2(1.80 \times 10^{11}\ \text{Pa})} = 6.9 \times 10^{-3}\ \text{m}$$

En consecuencia, la pelota libra por

$$2.94\ \text{m} - (2.85 + 0.0069 + 0.080)\ \text{m} = 0.0031\ \text{m} = 3.1\ \text{mm}$$

Para comprobar la aproximación que se ha realizado, se puede utilizar $r = 2.90$ m, que es su valor máximo posible. Entonces se encuentra que $\Delta L = 6.9$ mm, lo cual demuestra que la aproximación ha originado un error despreciable.

12.18 [III] Un alambre vertical de 5.0 m de largo y 0.0088 cm² de área de sección transversal tiene un módulo de Young $Y = 200$ GPa. Un objeto de 2.0 kg se sujeta a su extremo y alarga el alambre elásticamente. Si ahora el objeto se tira hacia abajo un poco y se suelta, el objeto experimentará un MAS vertical. Encuentre el periodo de su vibración.

La constante de fuerza del alambre que actúa como resorte vertical está dada por $k = F/\Delta L$, donde ΔL es la deformación producida por la fuerza (peso) F. Pero, de $F/A = Y(\Delta L/L_0)$,

$$k = \frac{F}{\Delta L} = \frac{AY}{L_0} = \frac{(8.8 \times 10^{-7}\ \text{m}^2)(2.00 \times 10^{11}\ \text{Pa})}{5.0\ \text{m}} = 35\ \text{kN/m}$$

Entonces para el periodo se tiene

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.0 \text{ kg}}{35 \times 10^3 \text{ N/m}}} = 0.047 \text{ s}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

12.19 [I] Determine la densidad y la densidad relativa del alcohol etílico si 63.3 g ocupan 80.0 mL.
Resp. 791 kg/m^3, 0.791.

12.20 [I] Obtenga el volumen de 200 g de tetracloruro de carbono, cuya densidad relativa es de 1.60.
Resp. 125 mL.

12.21 [I] La densidad del aluminio es de 2.70 g/cm^3. ¿Qué volumen ocuparán 2.00 kg? **Resp.** 740 cm^3.

12.22 [I] Calcule la masa de un cubo de aluminio que tiene 5.00 cm por lado. La densidad del aluminio es de 2 700 kg/m^2. **Resp.** 0.338 kg.

12.23 [I] Un cilindro contiene 200 kg de agua o 132 kg de gasolina. Determine para la gasolina *a*) su densidad relativa y *b*) su densidad ρ en kg/m^3. **Resp.** *a*) 0.660; *b*) 660 kg/m^3.

12.24 [I] En condiciones estándar, el aire tiene una densidad de 1.29 kg/m^3. ¿Cuál es la masa del aire en una habitación con dimensiones 10.0 m $\times$ 8.00 m $\times$ 3.00 m? **Resp.** 310 kg.

12.25 [I] ¿Cuál es la densidad del material en el núcleo del átomo de hidrógeno? Puede suponer que el núcleo es una esfera de 1.2×10^{-15} m de radio y masa de 1.67×10^{-27} kg. El volumen de una esfera es $(4/3)\pi r^3$.
Resp. 2.3×10^{17} kg/m^3.

12.26 [I] Para determinar el radio interno de un tubo capilar uniforme, el tubo se llena con mercurio. Se encontró que una columna de mercurio de 2.375 cm de largo tiene una masa de 0.24 g. ¿Cuál es el radio interno *r* del tubo? La densidad del mercurio es de 13 600 kg/m^3, y el volumen de un cilindro circular recto es $\pi r^2 h$.
Resp. 0.49 mm.

12.27 [I] El ácido de los acumuladores tiene un rrel = 1.285 y 38.0% de su peso es ácido sulfúrico. ¿Qué masa de ácido sulfúrico está contenida en un litro de ácido para acumulador? **Resp.** 488 g.

12.28 [II] Una delgada película semitransparente de oro (ρ = 19 300 kg/m^3) tiene un área de 14.5 cm^2 y una masa de 1.93 mg. *a*) ¿Cuál es el volumen de 1.93 mg de oro? *b*) ¿Cuál es el espesor de la película en angstroms, donde 1 Å = 10^{-10} m? *c*) El átomo de oro tiene un diámetro aproximado de 5 Å. ¿Cuántos átomos de espesor tiene la película? **Resp.** *a*) 1.00×10^{-10} m^3; *b*) 690 Å; *c*) 138 átomos de espesor.

12.29 [II] En una fábrica de cemento polvorienta e insalubre había 2.6×10^9 partículas de polvo por metro cúbico (rrel = 3.0). Si supone que las partículas son esferas de 2.0 μm de diámetro, determine la masa del polvo *a*) en una habitación de 20 m $\times$ 15 m $\times$ 8.0 m y *b*) el inhalado en cada respiración promedio de 400 cm^3 de volumen. **Resp.** *a*) 78 g; b) 13 μg.

12.30 [II] Una varilla de hierro de 4.00 m de largo y 0.500 cm^2 de sección transversal se alarga 1.00 mm cuando se le cuelga una masa de 225 kg en el extremo más bajo. Encuentre el módulo de Young para el hierro.
Resp. 176 GPa.

12.31 [II] Una carga de 50 kg se aplica en el extremo inferior de una varilla de acero de 80 cm de longitud y 0.60 cm de diámetro. ¿Cuánto se alargará la varilla? Para el acero, Y = 190 GPa. **Resp.** 73 μm.

12.32 [II] Una plataforma está suspendida mediante cuatro alambres colocados en sus esquinas. Cada alambre tiene 3.0 m de largo y 2.0 mm de diámetro. El módulo de Young para el material del alambre es de 180 GPa. ¿Cuánto bajará la plataforma (debido a la elongación de los alambres) si se coloca una carga de 50 kg en el centro de la plataforma? **Resp.** 0.65 mm.

12.33 [II] Determine la fracción de cambio de volumen cuando la presión de la atmósfera (1×10^5 Pa) alrededor de un bloque metálico se reduce a cero al colocar al bloque en el vacío. El módulo volumétrico para el metal es de 125 GPa. **Resp.** 8×10^{-7}.

12.34 [II] Calcule el cambio de volumen de un cubo sólido de cobre, de 40 mm por lado, cuando se somete a una presión de 20 MPa. El módulo volumétrico del cobre es de 125 GPa. **Resp.** -10 mm^3.

12.35 [II] La compresibilidad del agua es 5.0×10^{-10} m^2/N. Encuentre el decremento en el volumen de 100 mL de agua cuando se someten a una presión de 15 MPa. **Resp.** 0.75 mL.

12.36 [II] Dos fuerzas paralelas y opuestas, cada una de 4 000 N, se aplican tangencialmente a las caras superior e inferior de un bloque metálico cúbico de 25 cm de lado. Calcule el ángulo de corte y el desplazamiento de la cara superior en relación con la inferior. El módulo de corte para el metal es de 80 GPa.
Resp. 8.0×10^{-7} rad, 2.0×10^{-7} m.

12.37 [II] Un motor de 60 kg se coloca sobre cuatro bloques cilíndricos de hule. Cada cilindro tiene una altura de 3.0 cm y un área en su sección transversal de 15 cm^2. El módulo de corte para este hule es de 2.0 MPa. *a*) Si al motor se le aplica una fuerza lateral de 300 N, ¿cuánto se moverá a los lados? *b*) ¿Con qué frecuencia vibrará el motor de ida y vuelta hacia los lados si se le perturba? **Resp.** *a*) 0.075 cm; *b*) 13 Hz.

FLUIDOS EN REPOSO 13

LA PRESIÓN PROMEDIO sobre una superficie de área A se define como la fuerza dividida entre el área, donde la fuerza debe ser perpendicular (normal) al área:

$$\text{Presión promedio} = \frac{\text{fuerza que actúa en un área}}{\text{área sobre la que se distribuye la fuerza}}$$

$$P = \frac{F}{A}$$

Recuerde que la unidad del SI de la presión es el ***pascal*** (Pa) y 1 Pa = 1 N/m².

LA PRESIÓN ATMOSFÉRICA ESTÁNDAR (P_A) es 1.01×10^5 Pa, y es equivalente a 14.7 lb/pulg². Otras unidades para la presión son

1 atmósfera (atm) = 1.013×10^5 Pa
1 torr = 1 mm de mercurio (mmHg) = 133.32 Pa
1 lb/pulg² = 6.895 kPa

LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA (P) debida a una columna de fluido de altura h y densidad de masa ρ es

$$P = \rho g h$$

PRINCIPIO DE PASCAL: Cuando cambia la presión en cualquier punto en un fluido (líquido o gas) confinado, en cualquier otro punto en el fluido la presión también cambiará y en la misma proporción.

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES: Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido es empujado hacia arriba con una fuerza igual al peso del fluido desplazado. Se puede considerar que la fuerza boyante actúa verticalmente hacia arriba a través del centro de gravedad del fluido desplazado

$$F_B = \text{fuerza boyante} = \text{peso del fluido desplazado}$$

La fuerza boyante sobre un objeto de volumen V *totalmente* sumergido en un fluido de densidad ρ_f es $\rho_f Vg$ y el peso del objeto es $\rho_0 Vg$, donde ρ_0 es la densidad del objeto. Por tanto, la fuerza boyante neta sobre el objeto sumergido será

$$F_{\text{neta}}(\text{hacia arriba}) = Vg(\rho_f - \rho_0)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

13.1 [I] Un cilindro metálico de 80 kg, 2.0 m de longitud y un área de 25 cm² en cada base. Si una de sus bases está en contacto con el piso, ¿qué presión ejerce el cilindro sobre el suelo?

$$P = \frac{\text{fuerza normal}}{\text{área}} = \frac{(80\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{25 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} = 3.1 \times 10^5\ \text{Pa}$$

13.2 [I] La presión atmosférica tiene un valor aproximado de 1.0×10^5 Pa. ¿Qué fuerza ejerce el aire confinado en una habitación sobre una ventana de 40 cm × 80 cm?

La presión atmosférica ejerce una fuerza normal sobre cualquier superficie que se encuentre dentro de la atmósfera. Por consiguiente, la fuerza sobre la ventana es perpendicular a ésta y se obtiene por

$$F = PA = (1.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(0.40 \times 0.80\ \text{m}^2) = 3.2 \times 10^4\ \text{N}$$

Es claro que una fuerza casi igual, debida a la presión atmosférica sobre el exterior, impide que la ventana se rompa.

13.3 [I] Calcule la presión originada por un fluido en reposo a una profundidad de 76 cm en *a*) agua (ρ_a = 1.00 g/cm^3) y *b*) mercurio (ρ = 13.6 g/cm^3).

a) $$P = \rho_a gh = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.76 \text{ m}) = 7\,450 \text{ N/m}^2 = 7.5 \text{ kPa}$$

b) $$P = \rho gh = (13\,600 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.76 \text{ m}) = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \approx 1.0 \text{ atm}$$

13.4 [I] Cuando un submarino se sumerge a una profundidad de 120 m, ¿a qué presión total está sujeta su superficie exterior? La densidad del agua de mar es de aproximadamente 1.03 g/cm^3.

$$P = \text{presión atmosférica + presión del agua}$$
$$= 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + \rho gh = 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + (1\,030 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(120 \text{ m})$$
$$= 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + 12.1 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 13.1 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.31 \text{ MPa}$$

13.5 [I] ¿Qué tan alto subirá el agua por la tubería de un edificio si el manómetro que mide la presión del agua indica que ésta es de 270 kPa (alrededor de 40 lb/pulg^2) al nivel del piso?

Un manómetro mide el exceso de presión debida al agua, esto es, la diferencia entre la presión producida por la columna de agua y la presión atmosférica. La columna de agua más alta que se tiene originaría una presión de 270 kPa. Por esta razón, $P = \rho_a gh$ da

$$h = \frac{P}{\rho_a g} = \frac{2.70 \times 10^5 \text{ N/m}^2}{(1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)} = 27.5 \text{ m}$$

13.6 [I] Un dique de una represa forma un lago artificial de 8.00 km^2. Justo detrás del dique, el lago tiene una profundidad de 12.0 m. ¿Cuál es la presión producida por el agua *a*) en la base del dique y *b*) en un punto ubicado 3.0 metros bajo la superficie del lago?

El área del lago no tiene efecto alguno en la presión que se produce sobre el dique. Por eso, sin importar el punto, $P = \rho_a gh$.

a) $$P = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(12.0 \text{ m}) = 118 \text{ kPa}$$

b) $$P = (1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(3.0 \text{ m}) = 29 \text{ kPa}$$

13.7 [II] Como se muestra en la figura 13-1, un pistón cargado confina a un fluido de densidad ρ en un recipiente cerrado. El peso combinado del pistón y la carga es de 200 N, y el área de la sección transversal del pistón es A = 8.0 cm^2. Calcule la presión total en el punto B si el fluido es mercurio y h = 25 cm (ρ_{Hg} = 13 600 kg/m^3). ¿Cuál sería la lectura en un manómetro colocado en el punto B?

Recuerde lo que dice el principio de Pascal acerca de la presión aplicada al fluido por el pistón y la atmósfera: la presión añadida se aplica a todos los puntos del fluido. Por tanto, la presión total en el punto B se compone de tres partes:

$$\text{Presión atmosférica} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Presión debida al pistón y al peso} = \frac{F_W}{A} = \frac{200 \text{ N}}{8.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 2.5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{Presión debida a la altura } h \text{ del fluido} = h\rho g = 0.33 \times 10^5 \text{ Pa}$$

En este caso, la presión del fluido es relativamente pequeña. Se tiene

$$\text{Presión total en } B = 3.8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

La presión manométrica no incluye a la presión atmosférica. Por esto,

$$\text{Presión manométrica en } B = 2.8 \times 10^5 \text{ Pa}$$

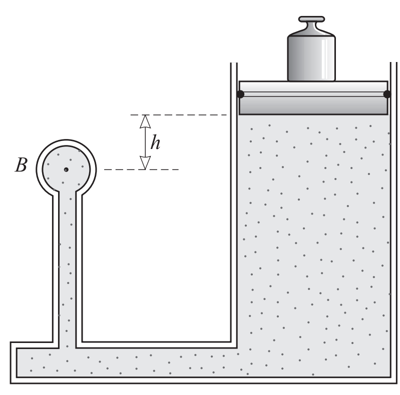


Figura 13-1

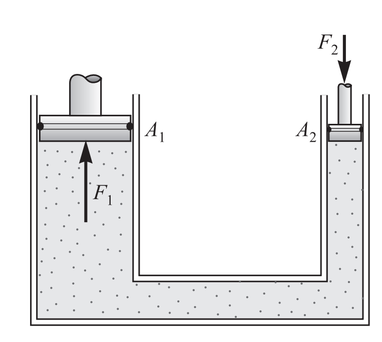


Figura 13-2

13.8 [I] En una prensa hidráulica, como la que se muestra en la figura 13-2, el pistón más grande tiene un área de sección transversal $A_1 = 200\ \text{cm}^2$, y el pistón pequeño tiene un área de sección transversal $A_2 = 5.0\ \text{cm}^2$. Si una fuerza de 250 N se aplica sobre el pistón pequeño, ¿cuál es la fuerza F_1 en el pistón grande?

Por el principio de Pascal,

$$\text{Presión bajo el pistón grande} = \text{presión bajo el pistón pequeño} \quad \text{o} \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

de modo que,
$$F_1 = \frac{A_1}{A_2}F_2 = \frac{200}{5.0}250\ \text{N} = 10\ \text{kN}$$

13.9 [II] Para el sistema que se muestra en la figura 13-3, el cilindro L de la izquierda tiene una masa de 600 kg y un área de sección transversal de 800 cm². El pistón S de la derecha tiene un área en su sección transversal de 25 cm² y peso despreciable. Si el dispositivo se llena con aceite ($\rho = 0.78\ \text{g/cm}^3$), calcule la fuerza F que se requiere para mantener al sistema en equilibrio.

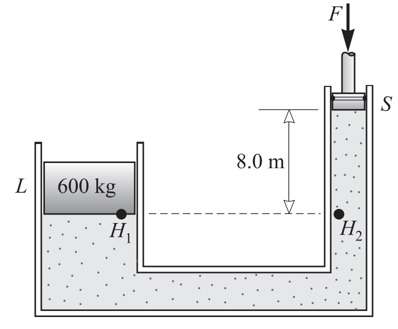


Figura 13-3

Las presiones en los puntos H_1 y H_2 son iguales porque, en un solo fluido conectado, se encuentran en el mismo nivel. Por consiguiente,

$$\text{Presión en } H_1 = \text{presión en } H_2$$

$$\begin{pmatrix}\text{presión debida}\\ \text{al pistón de la}\\ \text{izquierda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{presión debida}\\ \text{a } F \text{ y al pistón}\\ \text{de la derecha}\end{pmatrix} + \text{presión debida a los 8.0 m de aceite}$$

$$\frac{(600)(9.81)\ \text{N}}{0.0800\ \text{m}^2} = \frac{F}{25 \times 10^{-4}\ \text{m}^2} + (8.0\ \text{m})(780\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)$$

de donde $F = 31$ N.

13.10 [I] Un barril se romperá cuando en su interior la presión manométrica sea de 350 kPa. El barril se conecta al extremo inferior de un tubo vertical. El barril y el tubo se llenan con aceite ($\rho = 890\ \text{kg/m}^3$). ¿Qué longitud debe tener el tubo para que el barril no se rompa?

De $P = \rho g h$ se tiene

$$h = \frac{P}{\rho g} = \frac{350 \times 10^3\ \text{N/m}^2}{(9.81\ \text{m/s}^2)(890\ \text{kg/m}^3)} = 40.1\ \text{m}$$

13.11 [II] Un tubo vertical de ensayo tiene 2.0 cm de aceite ($\rho = 0.80\ \text{g/cm}^3$) flotando sobre 8.0 cm de agua. ¿Cuál es la presión en el fondo del tubo debida al fluido que contiene?

$$P = \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = (800\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(0.020\ \text{m}) + (1000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(0.080\ \text{m})$$
$$= 0.94\ \text{kPa}$$

13.12 [II] Como se muestra en la figura 13-4, una columna de agua de 40 cm de altura sostiene otra columna de 31 cm de un fluido desconocido. ¿Cuál es la densidad del fluido que no se conoce?

Las presiones en el punto A debidas a los dos fluidos deben ser iguales (de otra manera, el fluido con mayor presión empujará al fluido con menor presión). Por esta razón,

$$\text{Presión debida al agua} = \text{presión debida al fluido desconocido}$$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$$

de lo cual $$\rho_2 = \frac{h_1}{h_2}\rho_1 = \frac{40}{31}(1000\ \text{kg/m}^3) = 1290\ \text{kg/m}^3 = 1.3 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

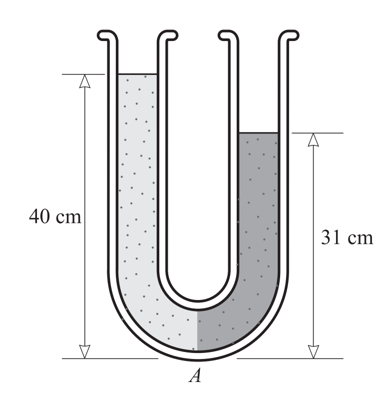


Figura 13-4

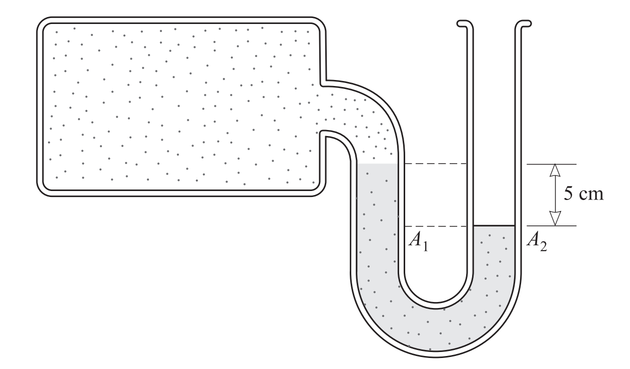


Figura 13-5

13.13 [II] El tubo en U conectado al tanque de la figura 13-15 se llama *manómetro*. Como puede ver, el mercurio en el tubo está más alta en un brazo del tubo que en el otro. ¿Cuál es la presión en el tanque si la presión atmosférica es de 76 cm de mercurio? La densidad del mercurio es de 13.6 g/cm^2.

$$\text{Presión en } A_1 = \text{presión en } A_2$$

$$(P \text{ en el tanque}) + (P \text{ debida a 5 cm de mercurio}) = (P \text{ debida a la atmósfera})$$

$$P + (0.05\ \text{m})(13\,600\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2) = (0.76\ \text{m})(13\,600\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)$$

de lo cual $P = 95$ kPa.

O, quizás de manera más simple, se podría observar que la presión en el tanque es 5.0 cm de mercurio *menor* que la atmosférica. De modo que la presión será de 71 cm de mercurio, que equivale a 94.6 kPa.

13.14 [II] La masa de un bloque de aluminio es de 25.0 g. *a*) ¿Cuál es su volumen? *b*) ¿Cuál será la tensión en una cuerda que sostiene al bloque cuando éste está totalmente sumergido en el agua? La densidad del aluminio es de 2 700 kg/m^3.

El problema es básicamente acerca de la fuerza boyante. *a*) Puesto que $\rho = m/V$, se tiene

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{0.0250\ \text{kg}}{2700\ \text{kg/m}^3} = 9.26 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 = 9.26\ \text{cm}^3$$

b) El bloque desplaza 9.26×10^{-6} m^3 de agua cuando está sumergido, así que la fuerza boyante sobre él es

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = (\text{volumen})(\rho \text{ del agua})(g)$$
$$= (9.26 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2) = 0.0908\ \text{N}$$

La tensión en la cuerda de sostén más la fuerza boyante debe igualar el peso del bloque para que esté en equilibrio (vea la figura 13-6). Esto es, $F_T + F_B = mg$, de donde

$$F_T = mg - F_B = (0.0250\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) - 0.0908\ \text{N} = 0.154\ \text{N}$$

13.15 [II] Con una báscula, una pieza de aleación tiene una masa de 86 g en el aire y 73 g cuando está sumergida en agua. Calcule su volumen y densidad.

El cambio aparente en la masa medida se debe a la fuerza boyante del agua. La figura 13-6 muestra la situación cuando el objeto se encuentra en el agua. De la figura, $F_B + F_T = mg$, así que

$$F_B = (0.086)(9.81)\text{ N} - (0.073)(9.81)\text{ N} = (0.013)(9.81)\text{ N}$$

Pero F_B debe ser igual al peso del agua desalojada.

$$F_B = \text{peso del agua} = (\text{masa del agua})(g)$$
$$= (\text{volumen del agua})(\text{densidad del agua})(g)$$

o $$(0.013)(9.81)\text{ N} = V(1\,000\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)$$

de donde $V = 1.3 \times 10^{-5}$ m^3. Éste también es el volumen de la pieza de aleación. Por tanto,

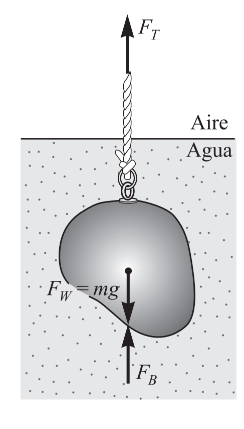


Figura 13-6

$$\rho \text{ de la aleación} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{0.086\text{ kg}}{1.3 \times 10^{-5}\text{ m}^3} = 6.6 \times 10^3\text{ kg/m}^3$$

13.16 [II] Un cilindro sólido de aluminio con $\rho = 2\,700$ kg/m^3, tiene una masa medida de 67 g en el aire y 45 g cuando se sumerge en trementina. Calcule la densidad de la trementina.

La F_B que actúa sobre el cilindro sumergido es

$$F_B = (0.067 - 0.045)\,(9.81)\text{ N} = (0.022)(9.81)\text{ N}$$

Éste también es el peso de la trementina desplazada.

El volumen del cilindro se puede calcular con la ecuación $\rho = m/V$,

$$V \text{ del cilindro} = \frac{m}{\rho} = \frac{0.067\text{ kg}}{2700\text{ kg/m}^3} = 2.5 \times 10^{-5}\text{ m}^3$$

Éste también es el volumen de la trementina desplazada. Por tanto, la densidad de la trementina es

$$\rho = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{(\text{peso})/g}{\text{volumen}} = \frac{(0.022)(9.81)/(9.81)}{2.48 \times 10^{-5}}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8.9 \times 10^2\text{ kg/m}^3$$

13.17 [II] Un tapón de vidrio tiene una masa de 2.50 g cuando se mide en el aire, 1.50 g en el agua y 0.70 g en ácido sulfúrico. ¿Cuál es la densidad del ácido? ¿Cuál es su densidad relativa?

La F_B del tapón en el agua es (0.00250 − 0.00150)(9.81) N. Éste es el peso del agua desplazada. Como $\rho = m/V$, o bien $\rho g = F_W/V$, se tiene

$$\text{Volumen del tapón} = \text{volumen del agua desplazada} = \frac{\text{peso}}{\rho g}$$

$$V = \frac{(0.001\,00)(9.81)\text{ N}}{(1000\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)} = 1.00 \times 10^{-6}\text{ m}^3$$

En el ácido, la fuerza boyante es

$$[(2.50 - 0.70) \times 10^{-3}](9.81)\text{ N} = (0.00180)(9.81)\text{ N}$$

Pero esto es igual al peso del ácido desplazado, mg. Como $\rho = m/V$, $m = 0.00180$ kg y $V = 1.00 \times 10^{-6}$ m^3, se tiene

$$\rho \text{ del ácido} = \frac{0.00180\text{ kg}}{1.00 \times 10^{-6}\text{ m}^3} = 1.8 \times 10^3\text{ kg/m}^3$$

Entonces, para el ácido,

$$\text{Densidad relativa} = \frac{\rho \text{ del ácido}}{\rho \text{ del agua}} = \frac{1800}{1000} = 1.8$$

Método alternativo

$$\text{Peso del agua desplazada} = [(2.50 - 1.50) \times 10^{-3}](9.81)\ \text{N}$$
$$\text{Peso del ácido desplazado} = [(2.50 - 0.70) \times 10^{-3}](9.81)\ \text{N}$$

así
$$\text{Densidad relativa del ácido} = \frac{\text{peso del ácido desplazado}}{\text{peso de igual volumen de agua desplazada}} = \frac{1.80}{1.00} = 1.8$$

Entonces, como la densidad relativa del ácido = (ρ del ácido)/(ρ del agua), se tiene

$$\rho \text{ del ácido} = (\text{densidad relativa del ácido})(\rho \text{ del agua}) = (1.8)(1\,000\ \text{kg/m}^3) = 1.8 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

13.18 [II] La densidad del hielo es de 917 kg/m^3. ¿Qué fracción del volumen de un trozo de hielo estará sobre la superficie del agua cuando flote en agua dulce?

El trozo de hielo flotará en el agua, ya que su densidad es menor que 1 000 kg/m^3, que es la densidad del agua. Como flota,

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = \text{peso del trozo de hielo}$$

Pero el peso del hielo es $\rho_{\text{hielo}} gV$, donde V es el volumen del trozo. Además, el peso del agua desplazada es $\rho_a gV'$, donde V' es el volumen del agua desplazada. Al sustituir en la ecuación anterior

$$\rho_{\text{hielo}} gV = \rho_a gV'$$

$$V' = \frac{\rho_{\text{hielo}}}{\rho_a} V = \frac{917}{1000} V = 0.917V$$

Entonces, la fracción de volumen que está sobre la superficie del agua es

$$\frac{V - V'}{V} = \frac{V - 0.917V}{V} = 1 - 0.917 = 0.083$$

13.19 [II] Una caja rectangular de 60 kg, abierta en su parte superior, mide en la base 1.0 m por 0.80 m, y tiene una profundidad de 0.50 m. *a*) ¿Cuánto se sumergirá en agua dulce? *b*) ¿Qué peso F_{Wb} de lastre hará que se hunda hasta una profundidad de 30 cm?

a) Si supone que la caja flota, se tiene

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = \text{peso de la caja}$$
$$(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{m} \times 0.80\ \text{m} \times y) = (60\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)$$

donde y es la profundidad a la que se hunde la caja. Al resolver se obtiene $y = 0.075$ m. Como esto es menor que 0.50 m, la suposición es correcta.

b)
$$F_B = \text{peso de la caja} + \text{peso del lastre}$$

Pero F_B es igual al peso del agua desplazada. Por tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(1.0\ \text{m} \times 0.80\ \text{m} \times 0.30\ \text{m}) = (60)(9.81)\ \text{N} + F_{Wb}$$

de donde $F_{Wb} = 1765.8$ N = 1.8 kN. Entonces la masa del lastre debe ser de (1765.8/9.81) kg = 180 kg.

13.20 [III] Una espuma de plástico ($\rho_p = 0.58$ g/cm^3) se usa como salvavidas. ¿Qué cantidad de plástico (volumen) se debe usar si 20% (por volumen) de un hombre de 80 kg tiene que permanecer sobre la superficie del agua en un lago? La densidad promedio del hombre es de 1.04 g/cm^3.

Tenga presente que una densidad de 1 g/cm^3 es igual a 1 000 kg/m^3. En equilibrio se tiene

$$F_B \text{ del hombre} + F_B \text{ del plástico} = \text{peso del hombre} + \text{peso del plástico}$$
$$(\rho_a)(0.80\ V_h)g + \rho_a V_p g = \rho_h V_h g + \rho_p V_p g$$

o bien
$$(\rho_a - \rho_p)V_p = (\rho_h - 0.80\ \rho_a)V_h$$

donde los subíndices *h*, *a* y *p* se refieren al hombre, al agua y al plástico, respectivamente.

Pero $\rho_h V_h = 80$ kg, de donde $V_h = (80/1\,040)$ m³. Al sustituir se obtiene

$$[(1\,000 - 580)\ \text{kg/m}^3]V_p = [(1\,040 - 800)\ \text{kg/m}^3][(80/1\,040)\ \text{m}^3]$$

de donde $V_p = 0.044$ m³.

13.21 [III] Un vaso de precipitados parcialmente lleno con agua reposa sobre una báscula y su peso es de 2.30 N. Pero cuando una pieza de metal suspendida de un hilo se sumerge totalmente en el vaso (sin tocar el fondo), la lectura en la báscula es de 2.75 N. ¿Cuál es el volumen de la pieza metálica?

El agua ejerce una fuerza boyante sobre el metal. De acuerdo con la tercera ley de Newton de acción y reacción, el metal ejerce una fuerza igual pero hacia abajo sobre el agua. Ésta es la fuerza que incrementa la lectura en la báscula de 2.30 N a 2.75 N. Por tanto, la fuerza boyante es $2.75 - 2.30 = 0.45$ N. Entonces, dado que

$$F_B = \text{peso del agua desplazada} = \rho_a gV = (1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(V)$$

se tiene el volumen del agua desplazada, y el de la pieza de metal, como

$$V = \frac{0.45\ \text{N}}{9\,810\ \text{kg/m}^2\cdot\text{s}^2} = 46 \times 10^{-6}\ \text{m}^3 = 46\ \text{cm}^3$$

13.22 [II] Se sospecha que una pieza de oro puro ($\rho = 19.3$ g/cm³) tiene el centro hueco. Cuando se mide en el aire tiene una masa de 38.25 g y en el agua de 36.22 g. ¿Cuál es el volumen del agujero central de la pieza de oro?

Recuerde que va de una densidad en g/cm³ a kg/m³ al multiplicar por 1 000. De la ecuación $\rho = m/V$,

$$\text{Volumen real de los 38.25 g de oro puro} = \frac{0.03825\ \text{kg}}{19\,300\ \text{kg/m}^3} = 1.982 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\text{Volumen del agua desplazada} = \frac{(38.25 - 36.22) \times 10^{-3}\ \text{kg}}{1\,000\ \text{kg/m}^3} = 2.030 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

$$\text{Volumen del agujero} = (2.030 - 1.982)\ \text{cm}^3 = 0.048\ \text{cm}^3$$

13.23 [III] Un cilindro de madera tiene masa *m* y área *A* en la base. Flota en el agua con su eje vertical. Demuestre que, si se le da un pequeño desplazamiento vertical, el cilindro experimentará MAS. Calcule la frecuencia del movimiento.

Cuando el cilindro se empuja hacia abajo una distancia *y*, éste desaloja un volumen adicional *Ay* de agua. Como dicho volumen adicional desalojado tiene masa $Ay\rho_a$, una fuerza boyante adicional $Ay\rho_a g$ actúa sobre el cilindro, donde ρ_a es la densidad del agua. Se trata de una fuerza no balanceada que a la vez es una fuerza restauradora. Además, la fuerza es proporcional al desplazamiento y por tanto es una fuerza de la ley de Hooke. En consecuencia, el cilindro experimentará MAS, como se describe en el capítulo 11.

Al comparar $F_B = A\rho_a gy$ con la ley de Hooke en la forma $F = ky$, se ve que la constante del resorte para este movimiento es $k = A\rho_a g$. Ésta, al actuar sobre el cilindro de masa m, hace que tenga una frecuencia vibratoria de

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A\rho_a g}{m}}$$

13.24 [II] Un globo de 5.0 kg se llena con helio ($\rho_{\text{He}} = 0.178$ kg/m³). ¿Cuál será su volumen si debe levantar una carga de 30 kg? Utilice $\rho_{\text{aire}} = 1.29$ kg/m³.

La fuerza boyante, $V\rho_{aire}g$, debe levantar el peso del globo, su carga y al helio contenido dentro del globo:

$$V\rho_{aire}g = (35 \text{ kg})(g) + V\rho_{He}g$$

que produce
$$V = \frac{35 \text{ kg}}{\rho_{aire} - \rho_{He}} = \frac{35 \text{ kg}}{1.11 \text{ kg/m}^3} = 32 \text{ m}^3$$

13.25 [III] Calcule la densidad ρ de un fluido a una profundidad h en términos de su densidad ρ_0 en la superficie.

Si una masa m de fluido tiene volumen V_0 en la superficie, entonces tendrá un volumen $V_0 - \Delta V$ a una profundidad h. Por consiguiente, la densidad a la profundidad h será

$$\rho = \frac{m}{V_0 - \Delta V} \quad \text{mientras} \quad \rho_0 = \frac{m}{V_0}$$

de donde
$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{V_0}{V_0 - \Delta V} = \frac{1}{1 - (\Delta V/V_0)}$$

Sin embargo, del capítulo 12, el módulo volumétrico es $B = P/(\Delta V/V_0)$ y por tanto $\Delta V/V_0 = P/B$. Al hacer esta sustitución se obtiene

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 - P/B}$$

Si supone que ρ es aproximadamente igual a ρ_0, entonces la presión a una profundidad h es más o menos $\rho_0 gh$, y se llega al siguiente resultado

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1 - (\rho_0 gh/B)}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

13.26 [I] Un acróbata de 60 kg realiza un acto de equilibrio sobre un bastón. El extremo del bastón, en contacto con el piso, tiene un área de 0.92 cm^2. Calcule la presión que el bastón ejerce sobre el piso (desprecie el peso del bastón). **Resp.** 6.4 MPa.

13.27 [I] Una población recibe su suministro de agua directamente de un tanque de almacenamiento. Si la superficie del agua contenida en el tanque se ubica a una altura de 26.0 m sobre la llave de una casa, ¿cuál será la presión del agua en la llave? (desprecie los efectos de otros usuarios). **Resp.** 255 kPa.

13.28 [II] A una altura de 10 km (33 000 pies) sobre el nivel del mar, la presión atmosférica es de aproximadamente 210 mm de mercurio. ¿Cuál es la fuerza normal resultante sobre una ventana de 600 cm^2 de un avión que vuela a esa altura? Suponga que la presión dentro de la nave es de 760 mm de mercurio. La densidad del mercurio es de 13 600 kg/m^3. **Resp.** 4.4 kN.

13.29 [II] Un tubo angosto está soldado a un tanque como se muestra en la figura 13-7. La base del tanque tiene un área de 80 cm^2. *a*) Al recordar que la presión está determinada por la altura de la columna del líquido, calcule la fuerza que el aceite ejerce sobre el fondo del tanque cuando éste y el capilar se llenan con aceite ($\rho = 0.72$ g/cm^3) a una altura h_1. *b*) Repita para una altura de aceite de h_2. **Resp.** *a*) 11 N hacia abajo; *b*) 20 N hacia abajo.

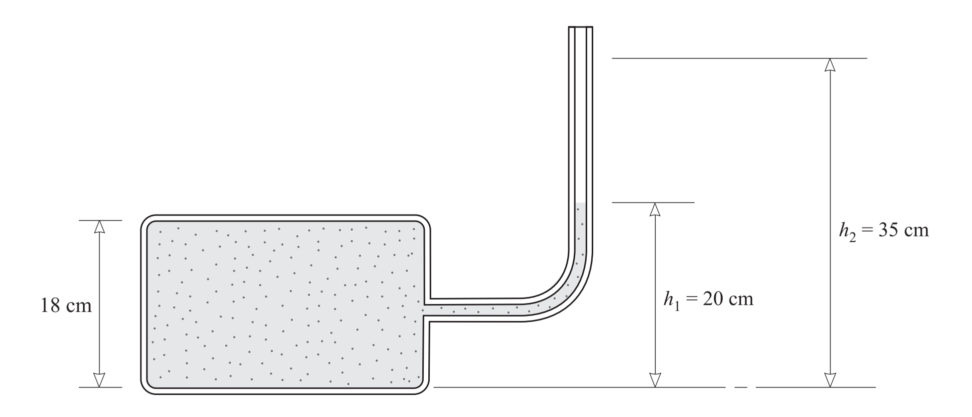


Figura 13-7

13.30 [II] Repita el problema 13.29, pero ahora calcule la fuerza en el techo del tanque debida al aceite.
Resp. *a*) 1.1 N hacia arriba; *b*) 9.6 N hacia arriba.

13.31 [II] Calcule la presión que requiere un sistema de suministro de agua para que el líquido suba a una altura de 50.0 m. **Resp.** 490 kPa.

13.32 [II] El área del pistón de una bomba impelente es de 8.0 cm^2. ¿Qué fuerza se debe aplicar al pistón para que suba aceite (ρ = 0.78 g/cm^2) a una altura de 6.0 m? Suponga que el aceite está expuesto a la atmósfera. **Resp.** 37 N.

13.33 [II] El diámetro del pistón grande de una prensa hidráulica es de 20 cm y el área del pistón pequeño es de 0.50 cm^2. Si se aplica una fuerza de 400 N al pistón pequeño, *a*) ¿cuál es la fuerza resultante que se ejerce en el pistón grande? *b*) ¿Cuál es el incremento de presión debajo del pistón pequeño? *c*) ¿Cuál es el incremento de presión debajo del pistón grande? **Resp.** *a*) 2.5×10^5 N; *b*) 8.0 MPa; *c*) 8.0 MPa.

13.34 [II] Un cubo de metal de 2.00 cm por lado tiene una densidad de 6 600 kg/m^3. Calcule su masa aparente cuando está totalmente sumergido en agua. **Resp.** 44.8 g.

13.35 [II] Un cubo sólido de madera de 30.0 cm de lado se puede sumergir completamente en agua cuando se le aplica una fuerza descendente de 54.0 N. ¿Cuál es la densidad de la madera? **Resp.** 796 kg/m^3.

13.36 [II] Un objeto de metal "pesa" 26.0 g en el aire y 21.48 g cuando está totalmente sumergido en agua. ¿Cuál es el volumen del objeto? ¿Cuál es su densidad? **Resp.** 4.55 cm^3, 5.72×10^3 kg/m^3.

13.37 [II] Una pieza sólida de aluminio ($\rho = 2.70$ g/cm^3) tiene una masa de 8.35 g cuando se mide en el aire. Si la pieza se sumerge, suspendida de un hilo, en una tina con aceite ($\rho = 0.75$ g/cm^3), ¿cuál será la tensión en el hilo? **Resp.** 0.059 N.

13.38 [II] Un vaso contiene un aceite de 0.80 g/cm^3 de densidad. Mediante un hilo, un cubo de aluminio ($\rho = 2.70$ g/cm^3) de 1.6 cm de lado se sumerge en el aceite. Calcule la tensión en el hilo. **Resp.** 0.076 N.

13.39 [II] Un tanque que contiene aceite con densidad relativa = 0.80 descansa en una báscula y pesa 78.6 N. Mediante un alambre, un cubo de aluminio, de 6.0 cm de lado y densidad relativa = 2.70, se sumerge en el aceite. Calcule *a*) la tensión en el alambre y *b*) la lectura en la báscula si no hay derrame de aceite.
Resp. *a*) 4.03 N; *b*) 80 N.

13.40 [II] Para mantener totalmente sumergido en agua y aceite un bloque de plástico se requieren fuerzas descendentes de 45.0 N y 15.0 N, respectivamente. Si el bloque tiene un volumen de 8 000 cm^3, calcule la densidad del aceite. **Resp.** 618 kg/m^3.

13.41 [III] Determine la fuerza no balanceada que actúa sobre una esfera de hierro ($r = 1.5$ cm, $\rho = 7.8$ g/cm^3) en el instante cuando se suelta mientras está totalmente sumergida en *a*) agua y *b*) mercurio ($\rho = 13.6$ g/cm^3). ¿Cuál será la aceleración inicial de la esfera en cada caso? **Resp.** *a*) 0.94 N hacia abajo, 8.6 m/s^2 hacia abajo; *b*) 0.80 N hacia arriba, 7.3 m/s^2 hacia arriba.

13.42 [II] Un cubo de metal de 2.0 cm de arista está suspendido de un hilo sujeto a una balanza. El cubo parece tener una masa de 47.3 g cuando está sumergido en agua. ¿Cuál es su "peso" aparente cuando se sumerge en glicerina, densidad relativa = 1.26? (*Sugerencia*: Calcule ρ también.) **Resp.** 45 g.

13.43 [II] La masa total de un globo y su góndola (vacía) es de 2.0×10^2 kg. Cuando el globo está lleno, contiene 900 m^3 de helio con una densidad de 0.183 kg/m^3. Calcule la carga extra, además de su propio peso, que puede levantar el globo. La densidad del aire es de 1.29 kg/m^3. **Resp.** 7.8 kN.

13.44 [I] Cierta pieza de metal tiene una masa medida de 5.00 g en el aire, 3.00 g en agua y 3.24 g en benceno. Determine la densidad del metal y del benceno. **Resp.** 2.50×10^3 kg/m^3, 880 kg/m^3.

13.45 [II] Un resorte cuya composición no es completamente conocida puede ser o de bronce (densidad relativa = 8.8) o de latón (densidad relativa = 8.4). Tiene una masa de 1.26 g cuando se mide en aire y 1.11 g en agua ¿De qué material es el resorte? **Resp.** Latón.

13.46 [II] ¿Qué fracción del volumen de una pieza de cuarzo ($\rho = 2.65$ g/cm^3) se sumergirá cuando flote en mercurio ($\rho = 13.6$ g/cm^3)? **Resp.** 0.195.

13.47 [II] Un cubo de madera que flota en agua sostiene una masa de 200 g colocada en el centro de su cara superior. Cuando se remueve la masa, el cubo sube 2.00 cm. Determine el volumen del cubo.
Resp. 1.00×10^3 cm^3.

13.48 [III] Un corcho tiene una masa aparente de 5.0 g en el aire. Un lastre tiene una masa aparente de 86 g en agua. Cuando el corcho y el lastre se unen, tienen una masa aparente de 71 g cuando están bajo el agua. ¿Cuál es la densidad del corcho? **Resp.** 2.5×10^2 kg/m^3.

13.49 [II] En un vaso con agua flota un cubo de hielo de 10 cm^3. El vaso está lleno hasta el borde con agua fría. Cuando el cubo se derrite por completo, ¿cuánta agua se derrama del vaso? La densidad relativa del hielo es de 0.92. **Resp.** Ninguna.

13.50 [II] Un tubo de vidrio se dobla en forma de U. Se observa que una columna de 50.0 cm de altura de aceite de olivo en un brazo equilibra una columna de agua de 46.0 cm de altura en el otro. ¿Cuál es la densidad del aceite de olivo? **Resp.** 920 kg/m^3.

13.51 [II] Cierto día, cuando la presión atmosférica es de 1.000×10^5 Pa, un químico destila un líquido bajo una presión ligeramente reducida. La presión dentro de la cámara de destilación se lee con un manómetro de aceite (densidad del aceite = 0.78 g/cm^3). La diferencia de altura en los brazos del manómetro es de 27 cm. ¿Cuál es la presión en la cámara de destilación? **Resp.** 98 kPa.

FLUIDOS EN MOVIMIENTO 14

FLUJO O DESCARGA DE UN FLUIDO (Q)**:** Cuando un fluido que llena un tubo corre a lo largo de este tubo con rapidez promedio v, el *flujo* o *descarga* Q es

$$Q = Av$$

donde A es el área de la sección transversal del tubo. Las unidades de Q en el SI son m^3/s y en el sistema inglés son pie^3/s. Algunas veces Q se llama *tasa de flujo* o **tasa de descarga**.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD: Suponga un fluido *incompresible* (densidad constante) que llena un tubo y fluye a través de él. Suponga además que el área de la sección transversal del tubo es A_1 en un punto y A_2 en otro. Ya que el flujo a través de A_1 debe ser igual al flujo a través de A_2 se tiene

$$Q = A_1v_1 = A_2v_2 = \text{constante}$$

donde v_1 y v_2 son las rapideces promedio del fluido en A_1 y A_2, respectivamente.

LA TASA DE CORTE de un fluido es la tasa a la cual cambia la deformación de corte dentro del fluido. Puesto que la deformación no tiene unidades, la unidad en el SI para la tasa de corte es s^{-1}.

LA VISCOSIDAD (η) de un fluido es la medida del esfuerzo cortante requerido para producir una unidad de tasa de corte. Sus unidades están definidas como las del esfuerzo por unidad de tasa de corte, es decir, Pa · s en el SI. Otra unidad en SI es el $N \cdot s/m^2$ (o bien kg/m · s), llamada *poiseuille* (Pl): 1 Pl = 1 kg/m · s = 1 Pa · s. Otras unidades utilizadas son el *poise* (P), donde 1 P = 0.1 Pl, y el *centipoise* (cP), donde 1 cP = 10^{-3} Pl. Un fluido viscoso, como el alquitrán, tiene una η muy grande.

LEY DE POISEUILLE: El flujo de un fluido a través de un tubo cilíndrico de longitud L y sección transversal de radio R está dado por

$$Q = \frac{\pi R^4(P_i - P_o)}{8\eta L}$$

donde $P_i - P_o$ es la diferencia de presiones entre los extremos del tubo (entrada menos salida).

EL TRABAJO EFECTUADO POR UN PISTÓN en forzar un volumen V de fluido dentro de un cilindro contra una presión opuesta P está dado por PV.

EL TRABAJO EFECTUADO POR UNA PRESIÓN P que actúa sobre una superficie de área A conforme la superficie se mueve una distancia Δx normal a la superficie (con lo cual desplaza un volumen $A\,\Delta x = \Delta V$) se define por

$$\text{Trabajo} = PA\,\Delta x = P\,\Delta V$$

ECUACIÓN DE BERNOULLI para el flujo estacionario de una corriente continua de fluido: considere dos puntos diferentes a lo largo de la trayectoria de la corriente. Sea el punto 1 a una altura h_1 y sean v_1, ρ_1 y P_1 la rapidez, la densidad y la presión del fluido en ese punto. De igual manera se denotan estas cantidades como h_2, v_2, ρ_2 y P_2 para el punto 2. Entonces, si se supone que el fluido es incompresible y que su viscosidad es despreciable,

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$

donde $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ y g es la aceleración debida a la gravedad.

TEOREMA DE TORRICELLI: Suponga que un tanque contiene líquido y está abierto a la atmósfera en su parte superior. Si en el tanque existe un orificio (abertura) a una distancia h debajo de la capa más alta del líquido, entonces

la *rapidez de salida* de éste por el orificio es $\sqrt{2gh}$, siempre que el líquido obedezca la ecuación de Bernoulli y el tanque sea lo suficientemente grande como para considerar que su capa superior está en reposo.

EL NÚMERO DE REYNOLDS (N_R) es un número adimensional que se aplica a un fluido de viscosidad η y densidad ρ y que corre con rapidez v a través de un tubo (o pasando un obstáculo) con diámetro D:

$$N_R = \frac{\rho v D}{\eta}$$

Para sistemas con la misma geometría, los flujos usualmente serán similares siempre que sus números de Reynolds estén cercanos. Los *flujos turbulentos* se presentan cuando el N_R del fluido es mayor que 2 000 para tuberías y mayor que 10 para obstáculos.

PROBLEMAS RESUELTOS

14.1 [I] A través de un tubo de 8.0 cm de diámetro fluye aceite a una rapidez promedio de 4.0 m/s. ¿Cuál es el flujo Q en m^3/s y m^3/h?

$$Q = Av = \pi\,(0.040\text{ m})^2(4.0\text{ m/s}) = 0.020\text{ m}^3/\text{s}$$
$$= (0.020\text{ m}^3/\text{s})(3\,600\text{ s/h}) = 72\text{ m}^3/\text{h}$$

14.2 [I] De manera experimental se encuentra que por un tubo cuyo diámetro interno es de 7.0 mm salen exactamente 250 mL de flujos de fluido en un tiempo de 41 s. ¿Cuál es la rapidez promedio del fluido en el tubo?

Ya que 1 mL $= 10^{-6}$ m^3, y que $Q = Av$,

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{(250 \times 10^{-6}\text{ m}^3)/(41\text{ s})}{\pi(0.0035\text{ m})^2} = 0.16\text{ m/s}$$

14.3 [I] Un acueducto de 14 cm de diámetro interno (d.i.) surte agua (a través de una cañería) al tubo de la llave de 1.00 cm de d.i. Si la rapidez promedio en el tubo de la llave es de 3.0 cm/s, ¿cuál será la rapidez promedio en el acueducto?

Los dos flujos son iguales. De la ecuación de continuidad se sabe que

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Sea 1 la llave y 2 el acueducto,

$$v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = v_1\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = (3.0\text{ cm/s})\left(\frac{1}{14}\right)^2 = 0.015\text{ cm/s}$$

14.4 [II] ¿Cuánta agua fluirá en 30.0 s por un tubo capilar de 200 mm de longitud y 1.50 mm de d.i., si la diferencia de presiones a lo largo del tubo es de 5.00 cm de mercurio? La viscosidad del agua es de 0.801 cP y la densidad del mercurio (ρ) es de 13 600 kg/m^3.

Se aplicará la ley de Poiseuille con

$$P_i - P_0 = \rho g h = (13\,600\text{ kg/m}^3)(9.81\text{ m/s}^2)(0.0500\text{ m}) = 6\,660\text{ N/m}^2$$

y

$$\eta = (0.801\text{ cP})\left(10^{-3}\,\frac{\text{kg/m}\cdot\text{s}}{\text{cP}}\right) = 8.01 \times 10^{-4}\text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

Entonces, se tiene

$$Q = \frac{\pi r^4(P_i - P_o)}{8\eta L} = \frac{\pi(7.5 \times 10^{-4}\ \text{m})^4(6\ 660\ \text{N/m}^2)}{8(8.01 \times 10^{-4}\ \text{kg/m}\cdot\text{s})(0.200\ \text{m})} = 5.2 \times 10^{-6}\ \text{m}^3/\text{s} = 5.2\ \text{mL/s}$$

En 30.0 s, la cantidad que fluirá fuera del tubo es (5.2 mL/s)(30 s) = 1.6×10^2 mL.

14.5 [II] La arteria de una persona se reduce a la mitad de su diámetro inicial por depósitos en la pared interior. ¿En qué factor disminuirá el flujo de sangre a través de la arteria si la diferencia de presión a lo largo de ella permanece constante?

De la ley de Poiseuille, $Q \propto r^4$. Por tanto,

$$\frac{Q_{\text{final}}}{Q_{\text{original}}} = \left(\frac{r_{\text{final}}}{r_{\text{original}}}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.0625$$

14.6 [II] Bajo la misma diferencia de presión, compare el flujo de agua a través de un tubo con el de aceite SAE núm. 10. Se sabe que η para el agua es 0.801 cP y η para el aceite es 200 cP.

De la ley de Poiseuille, $Q \propto 1/\eta$. Por tanto, dado que todo lo demás se cancela,

$$\frac{Q_{\text{agua}}}{Q_{\text{aceite}}} = \frac{200\ \text{cP}}{0.801\ \text{cP}} = 250$$

así que el flujo del agua es 250 veces mayor que el correspondiente al aceite bajo la misma diferencia de presión.

14.7 [II] Calcule la salida de potencia del corazón si, por cada latido, bombea 75 mL de sangre con una presión promedio de 100 mmHg. Considere 65 latidos por minuto.

El trabajo realizado por el corazón es $P\Delta V$. En un minuto, $\Delta V = (65)(75 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)$. Por otro lado

$$P = (100\ \text{mmHg})\frac{1.01 \times 10^5\ \text{Pa}}{760\ \text{mmHg}} = 1.33 \times 10^4\ \text{Pa}$$

en consecuencia

$$\text{Potencia} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{(1.33 \times 10^4\ \text{Pa})[(65)(75 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)]}{60\ \text{s}} = 1.1\ \text{W}$$

14.8 [II] Un tanque abierto en su parte superior tiene una abertura de 3.0 cm de diámetro que se encuentra a 5.0 m por debajo del nivel del agua contenida en el tanque. ¿Qué volumen de líquido saldrá por minuto a través de dicha abertura? (Vea la figura 14.1.)

En este caso puede aplicarse la ecuación de Bernoulli: 1 es la parte superior del nivel y 2 el orificio. La presión en la salida, adentro del chorro libre, es la atmosférica. Entonces $P_1 = P_2$ y h_1 = 5.0 m, $h_2 = 0$.

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$
$$\tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g$$

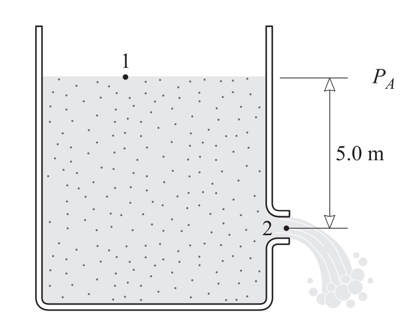


Figura 14-1

Si el tanque es lo suficientemente grande, v_1 puede considerarse cero. Por tanto, al resolver para v_2, se obtiene la ecuación de Torricelli:

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2(9.81\ \text{m/s}^2)(5.0\ \text{m})} = 9.9\ \text{m/s}$$

y el flujo está dado por

$$Q = v_2 A_2 = (9.9\ \text{m/s})\pi\ (1.5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2 = 7.0 \times 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s} = 0.42\ \text{m}^3/\text{min}$$

14.9[II] Un tanque de agua abierto al aire tiene una fuga en la posición 2 que muestra la figura 14-2, donde la presión del agua en la posición 1 es de 500 kPa. ¿Cuál es la velocidad de escape del agua por el orificio?

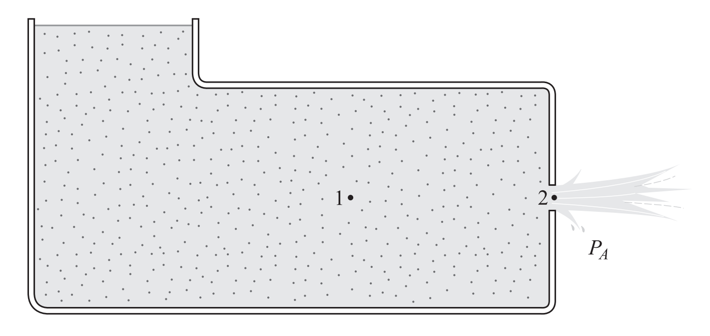


Figura 14-2

La presión en la posición 2 en el chorro libre es atmosférica. Se usará la ecuación de Bernoulli con $P_1 - P_2 = 5.00 \times 10^5$ N/m², $h_1 = h_2$ y la aproximación de $v_1 = 0$. Entonces

$$(P_1 - P_2) + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

de donde $$v_2 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(5.00 \times 10^5 \text{ N/m}^2)}{1000 \text{ kg/m}^3}} = 31.6 \text{ m/s}$$

14.10 [III] El agua fluye a la tasa de 30 mL/s a través de una abertura que se encuentra en el fondo de un tanque grande donde el líquido tiene una profundidad de 4.0 m. Calcule la tasa con que escapa el agua si a su nivel superior se le agrega una presión de 50 kPa.

Tome la posición 1 en la superficie del líquido en la parte superior del tanque y la posición 2 en la abertura. La ecuación de Bernoulli para el caso en que esencialmente v_1 es cero es,

$$(P_1 - P_2) + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Esta ecuación puede aplicarse dos veces, antes de agregar la presión y después.

$$(P_1 - P_2)_{\text{antes}} + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho(v_2^2)_{\text{antes}}$$

$$(P_1 - P_2)_{\text{antes}} + 5 \times 10^4 \text{ N/m}^2 + (h_1 - h_2)\rho g = \frac{1}{2}\rho(v_2^2)_{\text{después}}$$

Si la abertura y la parte superior del tanque estaban inicialmente a la presión atmosférica, entonces

$$(P_1 - P_2)_{\text{antes}} = 0$$

Entonces, al dividir la segunda ecuación entre la primera, se consigue

$$\frac{(v_2^2)_{\text{después}}}{(v_2^2)_{\text{antes}}} = \frac{5 \times 10^4 \text{ N/m}^2 + (h_1 - h_2)\rho g}{(h_1 - h_2)\rho g}$$

Pero $$(h_1 - h_2)vg = (4.0 \text{ m})(1\,000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) = 3.9 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

de donde $$\frac{(v_2)_{\text{después}}}{(v_2)_{\text{antes}}} = \sqrt{\frac{8.9 \times 10^4 \text{ N/m}^2}{3.9 \times 10^4 \text{ N/m}^2}} = 1.51$$

Puesto que $Q = A\rho$, ésta puede escribirse como

$$\frac{Q_{\text{después}}}{Q_{\text{antes}}} = 1.51 \quad \text{o} \quad Q_{\text{después}} = (30 \text{ mL/s})(1.51) = 45 \text{ mL/s}$$

14.11 [II] ¿Cuánto trabajo W realiza una bomba para elevar 5.00 m^3 de agua hasta una altura de 20.0 m e impulsarla dentro de un acueducto a una presión de 150 kPa?

$$W = (\text{trabajo para elevarla}) + (\text{trabajo para impulsarla}) = mgh + P\Delta V$$

$$W = (5.00\ m^3)(1\,000\ kg/m^3)(9.81\ m/s^2)(20.0\ m) + (1.50 \times 10^5\ N/m^2)(5.00\ m^3) = 1.73 \times 10^6\ J$$

14.12 [II] Un tubo horizontal tiene la forma que se presenta en la figura 14-3. En el punto 1 el diámetro es de 6.0 cm, mientras que en el punto 2 es sólo de 2.0 cm. En el punto 1, $v_1 = 2.0$ m/s y $P_1 = 180$ kPa. Calcule v_2 y P_2.

Como hay dos incógnitas, se necesitarán dos ecuaciones. Luego de aplicar la ecuación de Bernoulli con $h_1 = h_2$, se obtiene

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 \qquad \text{o} \qquad P_1 + \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = P_2$$

Sin embargo, $v_1 = 2.0$ m/s y la ecuación de continuidad establece que

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = (2.0\ \text{m/s})\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = (2.0\ \text{m/s})(9.0) = 18\ \text{m/s}$$

Al sustituir se obtiene

$$1.80 \times 10^5\ \text{N/m}^2 + \tfrac{1}{2}(1000\ \text{kg/m}^3)[(2.0\ \text{m/s})^2 - (18\ \text{m/s})^2] = P_2$$

de donde $P_2 = 0.20 \times 10^5\ N/m^2 = 20$ kPa.

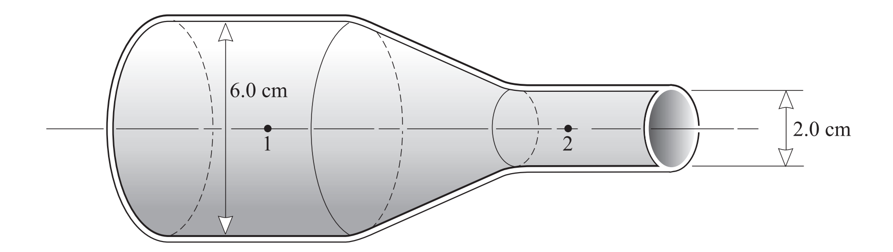


Figura 14-3

14.13 [III] ¿Cuál debe ser la presión manométrica en una manguera de gran diámetro si se quiere que el agua lanzada por la boquilla alcance una altura de 30.0 m en dirección vertical?

Para que un proyectil alcance una altura h, debe lanzarse con una rapidez inicial $\sqrt{2gh}$. (Esto se obtiene al igualar $\frac{1}{2}mv_0^2$ con mgh.) Esta rapidez se puede calcular en términos de la diferencia de presiones dentro y fuera de la manguera (presión manométrica) escribiendo la ecuación de Bernoulli para puntos justo dentro y fuera de la boquilla en términos de presión absoluta:

$$P_{\text{dentro}} + \tfrac{1}{2}\rho v_{\text{dentro}}^2 + h_{\text{dentro}}\rho g = P_{\text{fuera}} + \tfrac{1}{2}\rho v_{\text{fuera}}^2 + h_{\text{fuera}}\rho g$$

Ya que $h_{\text{fuera}} \approx h_{\text{dentro}}$ y $v_{\text{dentro}} \approx 0$, se tiene

$$P_{\text{dentro}} - P_{\text{fuera}} = \tfrac{1}{2}\rho v_{\text{fuera}}^2$$

Al sustituir v_{fuera} por $\sqrt{2gh}$, se obtiene

$$P_{\text{dentro}} - P_{\text{fuera}} = \rho g h = (1\,000\ kg/m^3)(9.81\ m/s^2)(30.0\ m) = 294\ kPa$$

Ya que $P_{\text{fuera}} = P_A$, ésta es la presión manométrica dentro de la manguera. ¿Cómo podría obtener esta última ecuación directamente del teorema de Torricelli?

14.14 [III] ¿A qué tasa fluye el agua desde una llave de 0.80 cm de d.i. si la presión del agua (o manométrica) es de 200 kPa?

Se aplica la ecuación de Bernoulli para puntos justo dentro (1) y fuera (2) de la llave:

$$P_{\text{dentro}} + \tfrac{1}{2}\rho v_{\text{dentro}}^2 + h_{\text{dentro}}\rho g = P_{\text{fuera}} + \tfrac{1}{2}\rho v_{\text{fuera}}^2 + h_{\text{fuera}}\rho g$$

Observe que la presión interna debida solamente al agua es de 200 kPa y por tanto $P_{\text{dentro}} = P_{\text{fuera}} = 200$ kPa, pues $P_{\text{fuera}} = P_A$. Al tomar $h_{\text{fuera}} = h_{\text{dentro}}$, se tiene

$$v_{\text{fuera}}^2 - v_{\text{dentro}}^2 = (200 \times 10^3 \text{ Pa})\frac{2}{\rho}$$

Si se supone $v^2_{\text{dentro}} \ll v^2_{\text{fuera}}$, se resuelve para obtener $v_{\text{fuera}} = 20$ m/s. Así pues, la tasa de flujo es

$$Q = vA = (20 \text{ m/s})(\pi r^2) = (20 \text{ m/s})(\pi)(0.16 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 1.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

14.15 [II] El tubo que se muestra en la figura 14-4 tiene un diámetro de 16 cm en la sección 1 y 10 cm en la sección 2. En la sección 1 la presión es de 200 kPa. El punto 2 está 6.0 m más alto que el punto 1. Si un aceite de 800 kg/m³ de densidad fluye a una tasa de 0.030 m³/s, encuentre la presión en el punto 2 si los efectos de la viscosidad son despreciables.

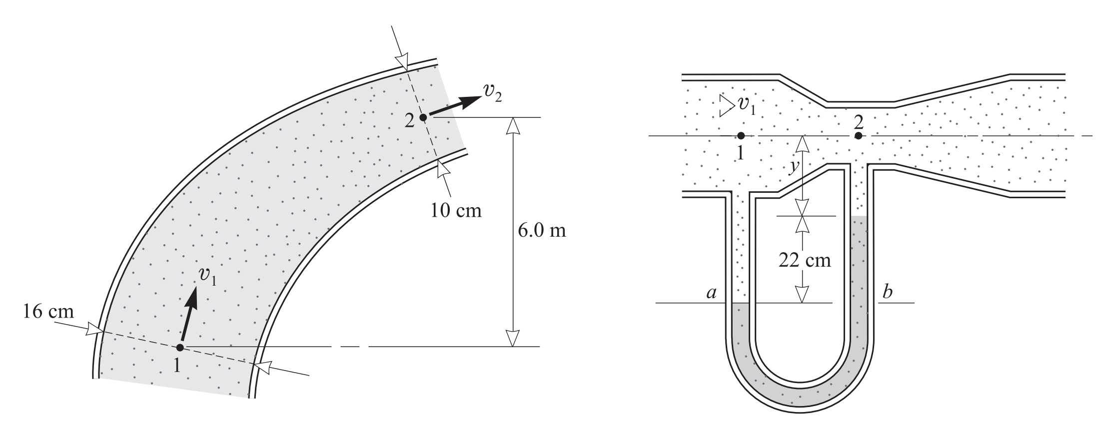


Figura 14-4 **Figura 14-5**

De $Q = v_1 A_1 = v_2 A_2$ se tiene

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{0.030 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(8.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 1.49 \text{ m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{0.030 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(5.0 \times 10^{-2} \text{ m})^2} = 3.82 \text{ m/s}$$

Ahora se puede utilizar la ecuación de Bernoulli:

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g(h_1 - h_2) = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

dadas $P_1 = 2.00 \times 10^5 \text{ N/m}^2, h_2 - h_1 = 6 \text{ m}$ y $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$, se obtiene

$$P_2 = 2.00 \times 10^5 \text{ N/m}^3 + \tfrac{1}{2}(800 \text{ kg/m}^3)[(1.49 \text{ m/s})^2 - (3.82 \text{ m/s})^2] - (800 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(6.0 \text{ m})$$
$$= 1.48 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.5 \times 10^5 \text{ kPa}.$$

14.16 [III] En la figura 14-5 se muestra un medidor Venturi equipado con un manómetro diferencial de mercurio. En la toma, punto 1, el diámetro es de 12 cm, mientras que en la garganta, punto 2, el diámetro es de 6.0 cm.

¿Cuál es el flujo Q de agua a través del medidor, si la lectura en el manómetro es de 22 cm? La densidad del mercurio es de 13.6 g/cm³.

De la lectura del manómetro (recuerde que 1 g/cm³ = 1 000 kg/m³) se obtiene

$$P_1 - P_2 = \rho gh = (13\,600 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(0.22 \text{ m}) = 2.93 \times 10^4 \text{ N/m}^2$$

Ya que $Q = v_1A_1 = v_2A_2$, se tiene $v_1 = Q/A_1$ y $v_2 = Q/A_2$. Al utilizar la ecuación de Bernoulli, con $h_1 - h_2 = 0$, se consigue

$$(P_1 - P_2) + \tfrac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) = 0$$

$$2.93 \times 10^4 \text{ N/m}^2 + \tfrac{1}{2}(1\,000 \text{ kg/m}^3)\left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right)Q^2 = 0$$

donde

$$A_1 = \pi r_1^2 = \pi(0.060)^2 \text{ m}^2 = 0.01131 \text{ m}^2 \quad \text{y} \quad A_2 = \pi r_2^2 = \pi(0.030)^2 \text{ m}^2 = 0.0028 \text{ m}^2$$

Al sustituir se encuentra que $Q = 0.022$ m³/s.

14.17 [III] Se utiliza un túnel de viento con un modelo de automóvil de 20 cm de altura para reproducir aproximadamente la situación en la que un automóvil de 550 cm de altura se mueve a 15 m/s. ¿Cuál debe ser la rapidez del viento en el túnel? ¿Es probable que el flujo sea turbulento?

Se desea que el número de Reynolds N_R sea el mismo para ambos casos, así que las situaciones serán similares. Esto es, se quiere que

$$N_R = \left(\frac{\rho v D}{\eta}\right)_{\text{túnel}} = \left(\frac{\rho v D}{\eta}\right)_{\text{aire}}$$

En virtud de que v y η son iguales para los dos casos, se tiene

$$v_t D_t = v_a D_a \quad \text{de donde} \quad v_t = v_a \frac{D_a}{D_t} = (15 \text{ m/s})(550/20) = 0.41 \text{ km/s}$$

Para investigar la turbulencia se evalúa N_R utilizando los valores para el aire: $\rho = 1.29$ kg/m³ y $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa · s. Al sustituir se obtiene $N_R = 5.9 \times 10^6$, un valor mucho mayor que el requerido para flujo turbulento. Ciertamente el flujo será turbulento.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

14.18 [I] A través de un tubo de 4.0 cm d.i. fluye aceite a una rapidez promedio de 2.5 m/s. Encuentre el flujo en m³/s y cm³/s. **Resp.** 3.1×10^{-3} m³/s = 3.1×10^3 cm³/s.

14.19 [I] Calcule la rapidez promedio del agua que circula por un tubo cuyo d.i. es de 5.0 cm y que entrega 2.5 m³ de agua por hora. **Resp.** 0.35 m/s.

14.20 [II] La rapidez de la glicerina que fluye en un tubo de 5.0 cm de d.i. es de 0.54 m/s. Encuentre la rapidez del fluido en un tubo de 3.0 cm de d.i. que se une a él. El fluido llena ambos tubos. **Resp.** 1.5 m/s.

14.21 [II] ¿Cuánto tiempo necesitarán 500 mL de agua para fluir a través de una tubería de 15 cm de largo y 3.0 mm de d.i., si la diferencia de presión a lo largo del tubo es de 4.0 kPa? La viscosidad del agua es de 0.80 cP. **Resp.** 7.5 s.

14.22 [II] Cierto plástico fundido fluye hacia el exterior de un tubo de 8.0 cm de largo a una tasa de 13 cm³/min, cuando la diferencia de presión entre los dos extremos del tubo es de 18 cm de mercurio. Encuentre la viscosidad

del plástico. El d.i. del tubo es de 1.30 mm. La densidad del mercurio es de 13.6 g/cm^3. **Resp.** 0.097 kg/m · s = 97 cP.

14.23 [II] En un sistema horizontal de tubos, uno de ellos (d.i. = 4.0 mm) de 20 cm de largo se conecta en línea con otro (d.i. = 5.0 mm) de 30 cm de largo. Cuando un fluido viscoso se empuja a través de los tubos a una tasa estacionaria, ¿cuál es la razón de la diferencia de presión a través del tubo de 20 cm en relación con la del tubo de 30 cm? **Resp.** 1.6.

14.24 [II] Una aguja hipodérmica de 3.0 cm de longitud y d.i. de 0.45 mm se utiliza para extraer sangre (η = 4.0 mPl). Si supone que la diferencia de presión en la aguja es de 80 cmHg, ¿cuánto tiempo tomará sacar 15 mL? **Resp.** 17 s.

14.25 [II] En una transfusión sanguínea la sangre fluye desde una botella a presión atmosférica hasta el interior de la vena de un paciente donde la presión es 20 mmHg superior a la atmosférica. La botella está 95 cm más arriba que la vena, en la cual se encuentra la aguja que tiene una longitud de 3.0 cm y un d.i. de 0.45 mm. ¿Cuánta sangre fluye al interior de la vena por minuto? Para la sangre, $\eta = 0.0040$ Pa · s y $\rho = 1\,005$ kg/m^3. **Resp.** 3.4 cm^3.

14.26 [I] ¿Cuánto trabajo realiza el pistón de un sistema hidráulico durante una carrera de 2.0 cm, si el área del extremo del pistón es de 0.75 cm^2 y la presión en el fluido del sistema es de 50 kPa? **Resp.** 75 mJ.

14.27 [II] A un tanque grande que contiene un líquido no viscoso se le hace una perforación 4.5 m abajo del nivel superior del líquido. ¿Cuál es la velocidad teórica de salida a través del orificio? Si el área de la abertura es de 0.25 cm^2, ¿cuánto líquido saldrá en exactamente un minuto? **Resp.** 9.4 m/s, 0.0141 m^3.

14.28 [II] Determine el flujo en litros/s de un líquido no viscoso a través de un orificio de 0.50 cm^2 de área y que se encuentra 2.5 m por debajo del nivel del líquido en un tanque abierto rodeado de aire. **Resp.** 0.35 litros/s.

14.29 [II] Calcule la velocidad teórica del derrame de agua, hacia el aire circundante, desde una abertura que está 8.0 m abajo de la superficie del agua en un gran tanque, si a la superficie del agua se aplica una presión adicional de 140 kPa. **Resp.** 21 m/s.

14.30 [II] ¿Cuántos caballos de fuerza (hp) se requieren para impulsar 8.0 m^3 de agua por minuto dentro de un acueducto con una presión de 220 kPa? **Resp.** 39 hp.

14.31 [II] Desde un lago, una bomba eleva agua con una tasa de 9.0 litros/s a través de un tubo de 5.0 cm de d.i. y la descarga en el aire en un punto ubicado a 16 m sobre el nivel del agua en el lago. ¿Cuáles son en teoría *a*) la velocidad del agua en el punto de descarga y *b*) la potencia desarrollada por la bomba?
Resp. *a*) 4.6 m/s; *b*) 2.0 hp.

14.32 [II] A través de un tubo horizontal de sección transversal variable se establece un flujo de agua estacionario. En un lugar la presión es de 130 kPa y la velocidad es de 0.60 m/s. Determine la presión en otro punto del mismo tubo donde la rapidez es de 9.0 m/s. **Resp.** 90 kPa.

14.33 [II] Un tubo de diámetro interno variable transporta agua. En el punto 1 el diámetro es de 20 cm y la presión de 130 kPa. En el punto 2, que está 4.0 m más arriba que el punto 1, el diámetro es de 30 cm. Si el flujo es de 0.080 m^3/s, ¿cuál es la presión en el segundo punto? **Resp.** 93 kPa.

14.34 [II] Un combustóleo de 820 kg/m^3 de densidad fluye a través de un medidor Venturi que tiene un diámetro de garganta de 4.0 cm y un diámetro de entrada de 8.0 cm. La caída de presión entre la entrada y la garganta es de 16 cm de mercurio. Encuentre el flujo. La densidad del mercurio es de 13 600 kg/m^3. **Resp.** 9.3×10^{-3} m^3/s.

14.35 [II] Determine la máxima cantidad de agua que puede fluir por minuto a través de un tubo de 3.0 cm de d.i. sin que haya turbulencia. Considere que el máximo número de Reynolds para un flujo no turbulento debe ser de 2 000. Para el agua a 20 °C, $\eta = 1.0 \times 10^{-3}$ Pa · s. **Resp.** 0.0028 m^3.

14.36 [I] ¿Cuán rápido puede caer una gota de lluvia (r = 1.5 mm) a través del aire, si el flujo que lo rodea estará cerca de la turbulencia, es decir, para N_R cercano a 10? Para el aire, $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa · s y υ = 1.29 kg/m^3. **Resp.** 4.6 cm/s.

DILATACIÓN TÉRMICA 15

LA TEMPERATURA (T) se puede medir en la escala *Celsius*, donde el punto de congelación del agua es a 0 °C y el punto de ebullición (bajo condiciones normales) es a 100 °C. La escala *Kelvin* (o *absoluta*) está desplazada 273.15 grados respecto de la escala Celsius, así que el punto de congelación del agua está a 273.15 K y el punto de ebullición a 373.15 K. El cero absoluto, temperatura que se analizará en el capítulo 16, está a 0 K (−273.15 °C). La aún usada escala Fahrenheit se relaciona con la escala Celsius mediante la ecuación

$$\text{Temperatura } \textit{Fahrenheit} = \tfrac{9}{5}(\text{temperatura Celsius}) + 32$$

DILATACIÓN LINEAL DE UN SÓLIDO: Cuando un sólido sufre un aumento de temperatura ΔT, su incremento en longitud ΔL es casi proporcional al producto de su longitud inicial L_0 por el cambio de temperatura ΔT. Esto es,

$$\Delta L = \alpha\, L_0\, \Delta T$$

donde la constante de proporcionalidad α se llama **coeficiente de dilatación lineal**. El valor de α depende de la naturaleza de la sustancia. Para los fines de esta obra se puede tomar α como constante independiente de T, aun cuando esto rara vez es exactamente cierto.

De la ecuación anterior, α es el cambio en longitud por unidad de longitud inicial y por unidad de temperatura. Por ejemplo, si 1.000 000 cm de longitud de latón se convierte en 1.000 019 cm de longitud cuando la temperatura se eleva 1.0 °C, el coeficiente de dilatación lineal para el latón es

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_0\, \Delta T} = \frac{0.000019 \text{ cm}}{(1.0 \text{ cm})(1.0\,^\circ\text{C})} = 1.9 \times 10^{-5}\,^\circ\text{C}^{-1}$$

DILATACIÓN SUPERFICIAL: Si un área A_0 se dilata a $A_0 + \Delta A$ cuando se sujeta a un aumento de temperatura ΔT, entonces

$$\Delta A = \gamma\, A_0\, \Delta T$$

donde γ es el **coeficiente de dilatación superficial**. Para un sólido *isotrópico* (que se expande de la misma manera en todas direcciones), $\gamma \approx 2\alpha$.

DILATACIÓN VOLUMÉTRICA: Si un volumen V_0 cambia por una cantidad ΔV cuando se sujeta a un cambio de temperatura ΔT, entonces

$$\Delta V = \beta V_0\, \Delta T$$

donde β es el **coeficiente de dilatación volumétrica**, el cual puede ser un aumento o una disminución en volumen. Para un sólido isotrópico, $\beta \approx 3\alpha$.

PROBLEMAS RESUELTOS

15.1 [I] Una barra de cobre tiene una longitud de 80 cm a 15 °C. ¿Cuál es el incremento de su longitud cuando su temperatura aumenta a 35 °C? El coeficiente de dilatación lineal del cobre es 1.7×10^{-5} °C^{-1}.

$$\Delta L = \alpha\, L_0 \Delta T = (1.7 \times 10^{-5}\ ^\circ\text{C}^{-1})(0.80 \text{ m})[(35 - 15)\ ^\circ\text{C}] = 2.7 \times 10^{-4} \text{ m}$$

15.2 [II] Un cilindro de 1.000 00 cm de diámetro a 30 °C se tiene que deslizar dentro de un agujero en una placa de acero. El agujero tiene un diámetro de 0.99970 cm a 30 °C. ¿A qué temperatura se debe calentar la placa? Para el acero, $\alpha = 1.1 \times 10^{-5}$ °C^{-1}.

La placa se expandirá de la misma manera, ya sea que exista o no un agujero en ella. Por consiguiente, el agujero se expandirá de idéntica forma como lo haría un círculo colocado dentro del agujero. Se desea que el diámetro del agujero cambie en una cantidad

$$\Delta L = (1.00000 - 0.99970) \text{ cm} = 0.00030 \text{ cm}$$

Al usar $\Delta L = \alpha L_0 \, \Delta T$, se encuentra

$$\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha L_0} = \frac{0.00030 \text{ cm}}{(1.1 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1})(0.99970 \text{ cm})} = 27 \text{ °C}$$

La temperatura de la placa debe ser 30 + 27 = 57 °C.

15.3 [I] Una cinta métrica de acero se calibra a 20 °C. En un día frío, cuando la temperatura es de −15 °C, ¿cuál será el error porcentual en la cinta? $\alpha_{acero} = 1.1 \times 10^{-5}$ °C^{-1}.

Para un cambio de temperatura de 20 °C a −15 °C, se tiene $\Delta T = -35$ °C. Entonces

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha \Delta T = (1.1 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1})(-35 \text{ °C}) = -3.9 \times 10^{-4} = -0.039\%$$

15.4 [II] Una barra de cobre ($\alpha = 1.70 \times 10^{-5}$ °C^{-1}) es 20 cm más larga que una barra de aluminio ($\alpha = 2.20 \times 10^{-5}$ °C^{-1}). ¿Cuál debe ser la longitud de la barra de cobre si la diferencia en longitudes es independiente de la temperatura?

Para que la diferencia de longitudes no cambie con la temperatura, ΔL tiene que ser la misma para ambas barras con el mismo cambio de temperatura. Esto es,

$$(\alpha L_0 \, \Delta T)_{cobre} = (\alpha L_0 \, \Delta T)_{aluminio}$$

o

$$(1.70 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}) L_0 \, \Delta T = (2.20 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1})(L_0 - 0.20 \text{ m}) \, \Delta T$$

donde L_0 es la longitud de la barra de cobre y ΔT es la misma para las dos barras. Al resolver se encuentra que $L_0 = 0.88$ m.

15.5 [II] Una esfera de acero ($\alpha = 1.10 \times 10^{-5}$ °C^{-1}) a 20.0 °C tiene un diámetro de 0.9000 cm, mientras que el diámetro de un agujero en una placa de aluminio ($\alpha = 2.20 \times 10^{-5}$ °C^{-1}) es de 0.8990 cm. ¿A qué temperatura (la misma para ambos) apenas pasará la esfera por el orificio?

Se desea que, para una temperatura ΔT mayor que 20.0° C, los diámetros de la esfera y del agujero sean los mismos:

$$0.9000 \text{ cm} + (0.9000 \text{ cm})(1.10 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}) \, \Delta T = 0.8990 \text{ cm} + (0.8990 \text{ cm})(2.20 \times 10^{-5} \text{ °C}^{-1}) \, \Delta T$$

Al resolver para ΔT se encuentra que $\Delta T = 101$ °C. Como la temperatura inicial era de 20.0 °C, la temperatura final debe ser de 121 °C.

15.6 [II] Una cinta métrica de acero se utiliza para medir la longitud de una barra de cobre de 90.00 cm cuando ambas se encuentran a 10 °C, que es la temperatura de calibración de la cinta. ¿Cuál será la lectura de la cinta para la longitud de la barra cuando ambas están a 30 °C? $\alpha_{acero} = 1.1 \times 10^{-5}$ °C^{-1}; $\alpha_{cobre} = 1.7 \times 10^{-5}$ °C^{-1}.

A 30 °C, la barra de cobre tendrá una longitud

$$L_0(1 + \alpha_c \, \Delta T)$$

mientras que las marcas de “centímetros” adyacentes en la cinta de acero estarán separadas una distancia de

$$(1.000 \text{ cm})(1 + \alpha_s \, \Delta T)$$

Por consiguiente, el número de "centímetros" leídos en la cinta será

$$\frac{L_0(1+\alpha_c\,\Delta T)}{(1\text{ cm})(1+\alpha_s\,\Delta T)} = \frac{(90.00\text{ cm})[1+(1.7\times 10^{-5}\,{}^\circ\text{C}^{-1})(20\,{}^\circ\text{C})]}{(1.000\text{ cm})[1+(1.1\times 10^{-5}\,{}^\circ\text{C}^{-1})(20\,{}^\circ\text{C})]} = 90.00\frac{1+3.4\times 10^{-4}}{1+2.2\times 10^{-4}}$$

Usando la aproximación

$$\frac{1}{1+x}\approx 1-x$$

para x muy pequeña comparada con 1, se tiene

$$90.00\frac{1+3.4\times 10^{-4}}{1+2.2\times 10^{-4}} \approx 90.00(1+3.4\times 10^{-4})(1-2.2\times 10^{-4}) \approx 90.00(1+3.4\times 10^{-4}-2.2\times 10^{-4})$$
$$= 90.00 + 0.0108$$

la lectura en la cinta será de 90.01 cm.

15.7 [II] Un vaso de precipitados se llena "hasta la marca" con 50.00 cm^3 de mercurio a 18 °C. Si el vaso y su contenido se calientan a 38 °C, ¿cuánto mercurio estará por arriba de la marca? $\alpha_{\text{vidrio}} = 9.0\times 10^{-6}$ °C^{-1} y $\beta_{\text{mercurio}} = 182\times 10^{-6}$ °C^{-1}.

Se tomará $\beta_{\text{vidrio}} = 3\alpha_{\text{vidrio}}$ como una buena aproximación. El interior del vaso se dilatará como si fuera una pieza sólida de vidrio. Entonces,

Volumen de mercurio sobre la marca = (ΔV del mercurio) – (ΔV del vidrio)

$$= \beta_m V_0\,\Delta T - \beta_g V_0\,\Delta T = (\beta_m - \beta_g)V_0\,\Delta T$$
$$= [(182-27)\times 10^{-6}\,{}^\circ\text{C}^{-1}](50.00\text{ cm}^3)[(38-18)\,{}^\circ\text{C}]$$
$$= 0.15\text{ cm}^3$$

15.8 [II] La densidad del mercurio a exactamente 0 °C es de 13 600 kg/m^3, y su coeficiente de dilatación volumétrica es de 1.82×10^{-4} °C^{-1}. Calcule la densidad del mercurio a 50.0 °C.

ρ_0 = densidad del mercurio a 0 °C
ρ_1 = densidad del mercurio a 50 °C
V_0 = volumen de m kg de mercurio a 0 °C
V_1 = volumen de m kg de mercurio a 50 °C

Dado que la masa no cambia, $m = \rho_0 V_0 = \rho_1 V_1$, de donde se sigue que

$$\rho_1 = \rho_0\frac{V_0}{V_1} = \rho_0\frac{V_0}{V_0+\Delta V} = \rho_0\frac{1}{1+(\Delta V/V_0)}$$

Pero
$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta\,\Delta T = (1.82\times 10^{-4}\,{}^\circ\text{C}^{-1})(50.0\,{}^\circ\text{C}) = 0.00910$$

Al sustituir en la primera ecuación se obtiene

$$\rho_1 = (13\,600\text{ kg/m}^3)\frac{1}{1+0.00910} = 13.5\times 10^3\text{ kg/m}^3$$

15.9 [II] Demuestre que la densidad de un líquido o un sólido varía con la temperatura de la siguiente forma: $\Delta\rho = -\rho\beta\,\Delta T \approx -\rho_0\beta\Delta T$.

Considere una masa m de líquido que tiene un volumen V_0, para el cual $\rho_0 = m/V_0$. Después de un cambio de temperatura ΔT el nuevo volumen es

$$V = V_0 + V_0\beta\Delta T$$

y la densidad será

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{V_0(1+\beta\,\Delta T)}$$

Pero $m/V_0 = \rho_0$, y por tanto se puede escribir

$$\rho(1 + \beta\,\Delta T) = \rho_0$$

Entonces se encuentra

$$\Delta\rho = \rho - \rho_0 = -\rho\beta\,\Delta T$$

En la práctica, ρ tiene un valor muy próximo al de ρ_0, de tal forma que es posible concluir $\Delta\rho \approx -\rho_0\beta\Delta T$.

15.10 [II] Resuelva el problema 15.8 utilizando el resultado del problema 15.9.

Se tiene

$$\Delta\rho \approx -\rho_0\beta\Delta T$$

de donde $$\Delta\rho \approx -(13\,600\ \text{kg/m}^3)(182\times 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(50.0\ {}^\circ\text{C}) = -124\ \text{kg/m}^3$$

de modo que $$\rho_{50\ {}^\circ\text{C}} = \rho_{0\,{}^\circ\text{C}} - 124\ \text{kg/m}^3 = 13.5\times 10^3\ \text{kg/m}^3$$

15.11 [III] Un alambre de acero de 2.0 mm² de sección transversal a 30 °C se mantiene recto (sin tensión alguna) sujetándolo firmemente a dos puntos separados una distancia de 1.50 m (por supuesto, esto tendrá que realizarse en el espacio para que el alambre no tenga peso, pero no se preocupe por ello). Si la temperatura decrece a −10 °C, y si los dos puntos permanecen fijos, ¿cuál será la tensión en el alambre? Para el acero $\alpha = 1.1\times 10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ y $Y = 2.0\times 10^{11}\ \text{N/m}^2$.

En caso de que el alambre no estuviera fijo en sus extremos, se contraería una distancia ΔL al enfriarse, donde

$$\Delta L = \alpha L_0\,\Delta T = (1.1\times 10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(1.5\ \text{m})(40\ {}^\circ\text{C}) = 6.6\times 10^{-4}\ \text{m}$$

Pero los extremos están fijos. Como resultado, las fuerzas en los extremos, de hecho, estiran al alambre la misma longitud ΔL. Por consiguiente, de la ecuación $Y = (F/A)(\Delta L/L_0)$, se tiene

$$\text{Tensión} = F = \frac{YA\,\Delta L}{L_0} = \frac{(2.0\times 10^{11}\ \text{N/m}^2)(2.0\times 10^{-6}\ \text{m}^2)(6.6\times 10^{-4}\ \text{m})}{1.50\ \text{m}} = 176\ \text{N} = 0.18\ \text{kN}$$

Estrictamente, se debió sustituir $(1.5 - 6.6\times 10^{-4})$ m por L en la expresión de la tensión. No obstante, el error es despreciable a pesar de no tomar en cuenta dicho valor.

15.12 [III] Cuando un edificio se construye a −10 °C, una viga de acero (con un área de 45 cm² en la sección transversal) se coloca en su lugar cementando sus extremos a las columnas. Si los extremos cementados no se pueden mover, ¿cuál será la fuerza de compresión sobre la viga cuando la temperatura suba a 25 °C? Para este tipo de acero, $\alpha = 1.1\times 10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1}$ y $Y = 2.0\times 10^{11}\ \text{N/m}^2$.

Se procede de la misma forma que en el problema 15.11:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \alpha\,\Delta T = (1.1\times 10^{-5}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(35\ {}^\circ\text{C}) = 3.85\times 10^{-4}$$

de donde $$F = YA\frac{\Delta L}{L_0} = (2.0\times 10^{11}\ \text{N/m}^2)(45\times 10^{-4}\ \text{m}^2)(3.85\times 10^{-4}) = 3.5\times 10^5\ \text{N}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

15.13 [I] Calcule el incremento de longitud de un alambre de cobre que mide 50 m cuando su temperatura cambia de 12 °C a 32 °C. Para el cobre, $\alpha = 1.7 \times 10^{-5}$ °C^{-1}. **Resp.** 1.7 cm.

15.14[I] Una barra de 3.0 m de longitud se expande 0.091 cm después de un aumento de temperatura de 60 °C. ¿Cuál es el valor de α para el material de que está hecha la barra? **Resp.** 5.1×10^{-6} °C^{-1}.

15.15[I] Una rueda lisa tiene un diámetro de 30.000 cm a una temperatura de 15.0 °C. El diámetro interior de su aro de acero mide 29.930 cm ¿A qué temperatura se debe calentar el aro para que pueda resbalar sobre la rueda? Para este tipo de acero, $\alpha = 1.10 \times 10^{-5}$ °C^{-1}. **Resp.** 227.7 °C.

15.16[II] Una esfera de hierro tiene un diámetro de 6 cm y es 0.010 mm más grande que el diámetro de un agujero que se encuentra en una placa de bronce; tanto la placa como la esfera están a una temperatura de 30 °C. ¿A qué temperatura (la misma para la esfera y la placa) apenas pasará la esfera por el agujero? $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}$ °C^{-1} y 1.9×10^{-5} °C^{-1} para el hierro y el bronce, respectivamente. **Resp.** 54 °C.

15.17[II] *a*) Una regla de aluminio, calibrada a 5.0 °C, se utiliza para medir cierta distancia como 88.42 cm a 35.0 °C. Calcule el error en la medición debido a la dilatación de la regla. *b*) Se encuentra que la longitud de una barra de acero medida con la regla es de 88.42 cm a 35.0 °C, ¿cuál es la longitud correcta de la barra de acero a 35 °C? El coeficiente de dilatación lineal del aluminio es 22×10^{-6} °C^{-1}. **Resp.** *a*) 0.058 cm; *b*) 88 cm.

15.18[II] Una esfera sólida de masa m y radio b gira libremente sobre su eje con una velocidad angular ω_0. Cuando su temperatura se incrementa ΔT, su velocidad angular cambia a ω. Calcule ω_0/ω si el coeficiente de dilatación lineal para el material de la esfera es α. **Resp.** $1 + 2\alpha\, \Delta T + (\alpha \Delta T)^2$.

15.19[I] Encuentre el aumento en volumen de 100 cm^3 de mercurio cuando su temperatura cambia de 10 °C a 35 °C. El coeficiente de dilatación volumétrica del mercurio es 0.00018° C^{-1}. **Resp.** 0.45 cm^3.

15.20[II] El coeficiente de dilatación lineal del vidrio es de 9.0×10^{-6} °C^{-1}. Un picnómetro (frasco que sirve para determinar la densidad relativa de líquidos) tiene una capacidad de 50.000 mL a 15 °C. Calcule su capacidad a 25 °C. **Resp.** 50.014 mL.

15.21[II] Determine el cambio en el volumen de un bloque de hierro fundido de 5.0 cm × 10 cm × 6.0 cm, cuando la temperatura cambia de 15 °C a 47 °C. El coeficiente de dilatación lineal del hierro fundido es 0.000010 °C^{-1}. **Resp.** 0.29 cm^3.

15.22[II] Un recipiente de vidrio se llena exactamente con 1 litro de trementina a 20 °C. ¿Qué volumen de líquido se derramará cuando su temperatura se eleve a 86 °C? El coeficiente de dilatación lineal del vidrio es de 9.0×10^{-6} °C^{-1}; el coeficiente de dilatación volumétrica de la trementina es 97×10^{-5} °C^{-1}. **Resp.** 62 mL.

15.23[II] La densidad del oro a 20.0 °C es de 19.30 g/cm^3, y el coeficiente de dilatación lineal es 14.3×10^{-6} °C^{-1}. Calcule la densidad del oro a 90.0 °C. Eche un vistazo al problema 15.9. **Resp.** 19.2 g/cm^3.

GASES IDEALES 16

UN GAS IDEAL (O PERFECTO) está compuesto de pequeñas partículas en movimiento que no interactúan entre sí y obedecen la ***ley de los gases ideales***, que se establece posteriormente. A presiones bajas o moderadas y a temperaturas no muy bajas, los siguientes gases comunes se pueden considerar como ideales: aire, nitrógeno, oxígeno, helio, hidrógeno y neón. Casi cualquier gas químicamente estable se comporta como gas ideal, si se encuentra alejado de condiciones de licuefacción o solidificación. En otras palabras, un gas real se comporta como uno ideal cuando sus átomos o moléculas están tan separadas que no interactúan de manera apreciable entre sí.

UN MOL DE UNA SUSTANCIA es la cantidad de sustancia que contiene tantas partículas como átomos hay en exactamente 12 gramos (0.012 kg) del isótopo carbono-12. Así pues, un **kilomol** (kmol) de una sustancia es la masa (en kg) que numéricamente es igual a la masa molecular (o atómica) de la sustancia. Por ejemplo, la masa molecular del gas hidrógeno, H_2, es de 2 kg/kmol; es decir, hay 2 kg en 1 kmol de H_2. De manera similar, hay 32 kg en 1 kmol de O_2, y 28 kg en 1 kmol de N_2. Aquí se utilizarán *kilomoles* y *kilogramos* en los cálculos. En ocasiones se empleará el término peso molecular (o atómico) en lugar de *masa* molecular, pero este último es correcto.

LEY DEL GAS IDEAL: La ***presión absoluta*** P de n kilomoles de un gas contenido en un volumen V se relaciona con la ***temperatura absoluta*** T por

$$PV = nRT$$

donde $R = 8\,314$ J/kmol · K se conoce como **constante universal de los gases**. Si el volumen contiene m kilogramos de gas con una masa molecular (o atómica) M, entonces $n = m/M$.

LOS CASOS ESPECIALES de la ley del gas ideal se obtienen al dejar constantes dos de sus variables, es decir

Ley de Boyle (n, T constantes): $PV = \text{constante}$

Ley de Charles (n, P constantes): $\dfrac{V}{T} = \text{constante}$

Ley de Gay-Lussac (n, V constantes): $\dfrac{P}{T} = \text{constante}$

EL CERO ABSOLUTO: Con n y P constantes (ley de Charles), el volumen de un gas ideal decrece linealmente con T y (si el gas permanece como ideal) podría llegar a cero cuando $T = 0$ K. Similarmente, con n y V constantes (ley de Gay-Lussac), la presión disminuiría hasta cero con la temperatura. Esta temperatura única, para la cual P y V llegarían a cero, se llama **cero absoluto**.

LAS CONDICIONES ESTÁNDAR O TEMPERATURA Y PRESIÓN ESTÁNDARES (TPE) se definen como

$$T = 273.15 \text{ K} = 0 \text{ °C} \qquad P = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$$

Bajo condiciones estándar, 1 kmol de *gas ideal* ocupa un volumen de 22.4 m^3. Por consiguiente, en TPE, 2 kg de H_2 ocupan el mismo volumen que 32 kg de O_2 o 28 kg de N_2, que es de 22.4 m^3.

LEY DE DALTON DE LAS PRESIONES PARCIALES: La **presión parcial** de un componente de una mezcla de gases se define como la presión que ejercería el gas componente si ocupara sólo el volumen completo. Entonces, la presión total de una mezcla de gases ideales no reactivos es la suma de las presiones parciales de los gases que la componen. Esto tiene sentido ya que, en efecto, cada gas es “ajeno” a la presencia de cualesquier otros gases.

LOS PROBLEMAS SOBRE LA LEY DE LOS GASES que incluyen cambios en las condiciones, desde (P_1, V_1, T_1) hasta (P_2, V_2, T_2), por lo general se resuelven más fácilmente si la ley de los gases se escribe como

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{(cuando } n \text{ es constante)}$$

Recuerde que es temperatura absoluta y presión absoluta. Note que la presión, debido a que aparece en ambos lados de la ecuación, se puede expresar en las unidades que desee.

PROBLEMAS RESUELTOS

16.1 [II] Una masa de oxígeno ocupa 0.0200 m^3 a presión atmosférica, 101 kPa, y 5.0 ºC. Determine su volumen si su presión se incrementa hasta 108 kPa mientras su temperatura cambia a 30 ºC.

Dado que

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{se tiene} \quad V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Pero $T_1 = 5 + 273 = 278$ K y $T_2 = 30 + 273 = 303$ K, por lo que

$$V_2 = (0.0200 \text{ m}^3)\left(\frac{101}{108}\right)\left(\frac{303}{278}\right) = 0.0204 \text{ m}^3$$

16.2 [II] Un día, cuando la presión atmosférica es de 76 cmHg, un manómetro marca que la presión interna de un tanque es de 400 cmHg. El gas en el tanque tiene una temperatura de 9 ºC. Si el Sol calienta el tanque hasta 31 ºC y no existen fugas de gas en el mismo, ¿cuál será la lectura de la presión en el manómetro?

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{así que} \quad P_2 = P_1 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

Pero los manómetros de los tanques generalmente leen la diferencia de presiones entre el interior y el exterior, la cual se conoce como *presión manométrica*. Por tanto,

$$P_1 = 76 \text{ cmHg} + 400 \text{ cmHg} = 476 \text{ cmHg}$$

Además, $V_1 = V_2$. Entonces se tiene

$$P_2 = (476 \text{ cmHg})\left(\frac{273 + 31}{273 + 9}\right)(1.00) = 513 \text{ cmHg}$$

La lectura en el manómetro será de 513 cmHg − 76 cmHg = 437 cmHg.

16.3 [II] La presión manométrica en la llanta de un automóvil es de 305 kPa cuando su temperatura es de 15 ºC. Después de correr a alta rapidez, el neumático se calienta y su presión sube a 360 kPa. ¿Cuál es entonces la temperatura del gas de la llanta? Considere la presión atmosférica como 101 kPa.

Tenga cuidado de usar solamente temperatura absoluta y presiones absolutas:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \quad \text{así} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

con $P_1 = 305 \text{ kPa} + 101 \text{ kPa} = 406 \text{ kPa}$ y $P_2 = 360 \text{ kPa} + 101 \text{ kPa} = 461 \text{ kPa}$

entonces $$T_2 = (273 + 15)\left(\frac{461}{406}\right)(1.00) = 327 \text{ K}$$

De este modo, la temperatura final de la llanta es 327 − 273 = 54 ºC.

16.4 [II] Un gas a temperatura y presión ambiente está confinado en un cilindro mediante un pistón. Después, el pistón se empuja de modo que el volumen se reduce a una octava parte de su valor inicial. Luego de que la temperatura del gas regresa a la temperatura ambiente, ¿cuál es la presión manométrica del gas en kPa? La presión atmosférica local es de 740 mm de mercurio.

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{o} \qquad P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Recuerde que puede trabajar en las unidades de presión que desee. Aquí $T_1 = T_2$, $P_1 = 740$ mmHg y $V_2 = V_1/8$. Al sustituir se obtiene

$$P_2 = (740 \text{ mmHg})(8)(1) = 5\,920 \text{ mmHg}$$

La presión manométrica es la diferencia entre la presión efectiva y la atmosférica. Por tanto

$$\text{Presión manométrica} = 5\,920 \text{ mmHg} - 740 \text{ mmHg} = 5\,180 \text{ mmHg}$$

Ya que 760 mmHg $=$ 101 kPa, la presión manométrica en kPa es

$$(5\,180 \text{ mmHg})\left(\frac{101 \text{ kPa}}{760 \text{ mmHg}}\right) = 690 \text{ kPa}$$

16.5 [II] Un gas ideal tiene un volumen de exactamente 1 litro a 1.00 atm y -20 ºC. ¿A cuántas atmósferas de presión se debe someter para comprimirlo hasta 0.500 litros cuando su temperatura es de 40 ºC?

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{o} \qquad P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

de donde $$P_2 = (1.00 \text{ atm})\left(\frac{1.00 \text{ L}}{0.500 \text{ L}}\right)\left(\frac{273 \text{ K} + 40 \text{ K}}{273 \text{ K} - 20 \text{ K}}\right) = 2.47 \text{ atm}$$

16.6 [II] Cierta masa de gas de hidrógeno ocupa 370 mL a 16 ºC y 150 kPa. Encuentre su volumen a -21 ºC y 420 kPa.

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{se tiene} \qquad V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$V_2 = (370 \text{ mL})\left(\frac{150 \text{ kPa}}{420 \text{ kPa}}\right)\left(\frac{273 \text{ K} - 21 \text{ K}}{273 \text{ K} + 16 \text{ K}}\right) = 115 \text{ mL}$$

16.7 [II] La densidad del nitrógeno en condiciones TPE es de 1.25 kg/m^3. Determine su densidad a 42 ºC y 730 mm de mercurio.

Ya que $\rho = m/V$, se tiene $V_1 = m/\rho_1$ y $V_2 = m/\rho_2$ para una masa de gas dada bajo dos conjuntos de condiciones. Entonces

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2} \qquad \text{se tiene} \qquad \frac{P_1}{\rho_1 T_1} = \frac{P_2}{\rho_2 T_2}$$

Ya que TPE son 760 mmHg y 273 K,

$$\rho_2 = \rho_1\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right) = (1.25 \text{ kg/m}^3)\left(\frac{730 \text{ mmHg}}{760 \text{ mmHg}}\right)\left(\frac{273 \text{ K}}{273 \text{ K} + 42 \text{ K}}\right) = 1.04 \text{ kg/m}^3$$

Note que aquí la presión puede expresarse en mmHg, pues las unidades se cancelan en la razón P_2/P_1.

16.8 [II] Un tanque de 3.0 litros contiene oxígeno a 20 ºC y a una presión manométrica de 25×10^5 Pa. ¿Qué masa de oxígeno hay en el tanque? La masa molecular del oxígeno es de 32 kg/kmol. Suponga que la presión atmosférica es de 1×10^5 Pa.

La presión absoluta del gas es

$$P = (\text{presión manométrica}) + (\text{presión atmosférica}) = (25 + 1) \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 26 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

De la ley de los gases, con $M = 32$ kg/kmol,

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT$$

$$(26 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(3.0 \times 10^{-3} \text{ m}^3) = \left(\frac{m}{32 \text{ kg/kmol}}\right)\left(8\,314 \frac{\text{J}}{\text{kmol}\cdot\text{K}}\right)(293 \text{ K})$$

Al resolver para *m*, es decir la masa del gas en el tanque, se obtiene 0.10 kg.

16.9 [II] Determine el volumen ocupado por 4.0 g de oxígeno ($M = 32$ kg/kmol) a TPE.

Método 1

Utilice directamente la ley de los gases:

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT$$

$$V = \left(\frac{1}{P}\right)\left(\frac{m}{M}\right)RT = \frac{(4.0 \times 10^{-3} \text{ kg})(8\,314 \text{ J/kmol}\cdot\text{K})(273 \text{ K})}{(1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(32 \text{ kg/kmol})} = 2.8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

Método 2

Bajo condiciones TPE, 1 kmol ocupa 22.4 m^3. Por tanto, los 32 kg ocupan 22.4 m^3 y en consecuencia los 4 g ocupan

$$\left(\frac{4.0 \text{ g}}{32\,000 \text{ g}}\right)(22.4 \text{ m}^3) = 2.8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

16.10 [II] Una gotita de nitrógeno líquido de 2.0 mg está presente en un tubo de 30 mL al sellarse a muy baja temperatura. ¿Cuál será la presión del nitrógeno en el tubo cuando éste se caliente a 20 ºC? Exprese la respuesta en atmósferas. (*M* para el nitrógeno es 28 kg/kmol.)

Use $PV = (m/M)RT$ para encontrar

$$P = \frac{mRT}{MV} = \frac{(2.0 \times 10^{-6} \text{ kg})(8314 \text{ J/kmol}\cdot\text{K})(293 \text{ K})}{(28 \text{ kg/kmol})(30 \times 10^{-6} \text{ m}^3)} = 5800 \text{ N/m}^2$$

$$= (5800 \text{ N/m}^2)\left(\frac{1.0 \text{ atm}}{1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2}\right) = 0.057 \text{ atm}$$

16.11 [II] Un tanque de 590 litros de volumen contiene oxígeno a 20 ºC y 5.0 atm de presión. Calcule la masa del oxígeno almacenado en el tanque. $M = 32$ kg/kmol para el oxígeno.

Use $PV = (m/M)RT$ para obtener

$$m = \frac{PVM}{RT} = \frac{(5 \times 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(0.59 \text{ m}^3)(32 \text{ kg/kmol})}{(8314 \text{ J/kmol}\cdot\text{K})(293 \text{ K})} = 3.9 \text{ kg}$$

16.12 [II] A 18 ºC y 765 mmHg, 1.29 litros de un gas ideal tienen una masa de 2.71 g. Encuentre la masa molecular del gas.

Use $PV = (m/M)RT$ y el hecho de que 760 mmHg = 1.00 atm para obtener

$$M = \frac{mRT}{PV} = \frac{(0.00271 \text{ kg})(8\,314 \text{ J/kmol}\cdot\text{K})(291 \text{ K})}{[(765/760)(1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2)](0.001\,29 \text{ m}^3)} = 50.0 \text{ kg/kmol}$$

16.13 [II] Determine el volumen de 8.0 g de helio ($M = 4.0$ kg/kmol) a 15 ºC y 480 mmHg.

Use $PV = (m/M)RT$ para obtener

$$V = \frac{mRT}{MP} = \frac{(0.0080\ \text{kg})(8\,314\ \text{J/kmol}\cdot\text{K})(288\ \text{K})}{(4.0\ \text{kg/kmol})[(480/760)(1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2)]} = 0.075\ \text{m}^3 = 75\ \text{litros}$$

16.14 [II] Encuentre la densidad del metano ($M = 16$ kg/kmol) a 20 ºC y 5.0 atm.

Use $PV = (m/M)RT$ y $\rho = m/V$ para obtener

$$\rho = \frac{PM}{RT} = \frac{(5.0 \times 1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(16\ \text{kg/kmol})}{(8\,314\ \text{J/kmol}\cdot\text{K})(293\ \text{K})} = 3.3\ \text{kg/m}^3$$

16.15 [II] En un lago, un pez emite una burbuja de 2.0 mm³ a una profundidad de 15 m. Calcule el volumen de la burbuja cuando ésta llega a la superficie del lago. Suponga que no cambia su temperatura.

La presión absoluta en la burbuja a la profundidad h es

$$P = \rho gh + \text{presión atmosférica}$$

donde $\rho = 1\,000\ \text{kg/m}^3$ y la presión atmosférica está alrededor de 100 kPa. A 15 m,

$$P_1 = (1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(15\ \text{m}) + 100\ \text{kPa} = 247\ \text{kPa}$$

y en la superficie, $P_2 = 100$ kPa. Siguiendo el procedimiento usual se tiene

$$V_2 = V_1\left(\frac{P_1}{P_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = (2.0\ \text{mm}^3)\left(\frac{247}{100}\right)(1.0) = 4.9\ \text{mm}^3$$

16.16 [II] Con el extremo abierto hacia abajo, un tubo de ensayo de 15 cm de longitud se sumerge en un lago. ¿Cuán abajo de la superficie del lago debe estar el nivel del agua en el tubo, si un tercio del tubo está lleno con agua?

Sea h la profundidad del agua en el tubo por abajo de la superficie del lago. La presión del aire P_2 en el tubo a una profundidad h es igual a la presión atmosférica P_a más la presión del agua a esa profundidad:

$$P_2 = P_a + \rho gh$$

De la ley de los gases se obtiene P_2 como

$$P_2 = (P_1)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = (1.01 \times 10^5\ \text{Pa})\left(\frac{3}{2}\right)(1.00) = 1.50 \times 10^5\ \text{Pa}$$

Entonces, de la relación entre P_2 y h,

$$h = \frac{P_2 - P_a}{\rho g} = \frac{0.50 \times 10^5\ \text{Pa}}{(1\,000\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)} = 5.1\ \text{m}$$

donde la presión atmosférica se tomó como 100 kPa.

16.17 [II] Un tanque contiene 18 kg de gas de nitrógeno ($M = 28$ kg/kmol) a una presión de 4.50 atm. ¿Qué cantidad de gas de hidrógeno ($M = 2.0$ kg/kmol) a 3.50 atm contendría el mismo depósito?

Escriba la ley de los gases dos veces, una para cada gas:

$$P_N V = n_N RT \qquad \text{y} \qquad P_H V = n_H RT$$

Al dividir una ecuación entre la otra se eliminan V, R y T:

$$\frac{n_H}{n_N} = \frac{P_H}{P_N} = \frac{3.50 \text{ atm}}{4.50 \text{ atm}} = 0.778$$

pero
$$n_N = \frac{m}{M} = \frac{18 \text{ kg}}{28 \text{ kg/kmol}} = 0.643 \text{ kmol}$$

así que
$$n_H = (n_N)(0.778) = (0.643 \text{ kmol})(0.778) = 0.500 \text{ kmol}$$

Entonces, de $n = m/M$, se obtiene

$$m_H = (0.500 \text{ kmol})(2.0 \text{ kg/kmol}) = 1.0 \text{ kg}$$

16.18 [II] En una mezcla gaseosa a 20 ºC, las presiones parciales de los componentes son las siguientes: hidrógeno, 200 mmHg; dióxido de carbono, 150 mmHg; metano, 320 mmHg; etileno, 105 mmHg. ¿Cuál es *a*) la presión total de la mezcla y *b*) la fracción de masa del hidrógeno? ($M_H = 2.0$ kg/kmol, $M_{CO_2} = 44$ kg/kmol, $M_{metano} = 16$ kg/kmol, $M_{etileno} = 30$ kg/kmol.)

a) De acuerdo con la ley de Dalton,

Presión total = suma de presiones parciales = 200 mmHg + 150 mmHg + 320 mmHg + 105 mmHg = 775 mmHg

b) De la ley de los gases, $m = M(PV/RT)$. La masa del hidrógeno presente es

$$m_H = M_H P_H \left(\frac{V}{RT}\right)$$

La masa total del gas presente, m_t, es la suma de términos semejantes:

$$m_t = (M_H P_H + M_{CO_2} P_{CO_2} + M_{metano} P_{metano} + M_{etileno} P_{etileno}) \left(\frac{V}{RT}\right)$$

La fracción requerida es

$$\frac{m_H}{m_t} = \frac{M_H P_H}{M_H P_H + M_{CO_2} P_{CO_2} + M_{metano} P_{metano} + M_{etileno} P_{etileno}}$$

$$\frac{m_H}{m_t} = \frac{(2.0 \text{ kg/kmol})(200 \text{ mmHg})}{(2.0 \text{ kg/kmol})(200 \text{ mmHg}) + (44 \text{ kg/kmol})(150 \text{ mmHg}) + (16 \text{ kg/kmol})(320 \text{ mmHg}) + (30 \text{ kg/kmol})(105 \text{ mmHg})} = 0.026$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

16.19 [I] La masa de un gas ideal ocupa un volumen de 4.00 m^3 a 758 mmHg. Calcule su volumen a 635 mmHg si la temperatura permanece constante. **Resp.** 4.77 m^3.

16.20 [I] Una masa de gas ideal dada ocupa 38 mL a 20 ºC. Si su presión se mantiene constante, ¿qué volumen ocupa a una temperatura de 45 ºC? **Resp.** 41 mL.

16.21 [I] En un día, cuando la presión atmosférica es de 75.83 cmHg, un manómetro en un tanque de gas marca una presión de 258.5 cmHg. ¿Cuál es la presión absoluta (en atmósferas y kPa) del gas dentro del tanque? **Resp.** 334.3 cmHg = 4.398 atm = 445.6 kPa.

16.22 [II] Un tanque que contiene un gas ideal se sella a 20 ºC y una presión de 1.00 atm. ¿Cuál será la presión (en kPa y mmHg) en el tanque, si la temperatura del gas disminuye a −35 ºC? **Resp.** 82 kPa = 6.2×10^2 mmHg.

16.23 [II] Dados 1 000 mL de helio a 15 ºC y 763 mmHg, determine su volumen a −6 ºC y 420 mmHg.
Resp. 1.68×10^3 mL.

16.24 [II] Un kilomol de gas ideal ocupa 22.4 m^3 a 0 ºC y 1 atm. *a*) ¿Qué presión se requiere para comprimir 1.00 kmol de gas en un contenedor de 5.00 m^3 a 100 ºC? *b*) Si 1.00 kmol se va a encerrar en un tanque de 5.00 m^3, el cual puede resistir una presión manométrica máxima de 3.00 atm, ¿cuál sería la máxima temperatura del gas si se desea que el tanque no estalle? **Resp.** *a*) 6.12 atm; *b*) −30 ºC.

16.25 [II] Se encierra aire en un tubo capilar sellado en su extremo inferior por medio de una columna de mercurio como se muestra en la figura 16-1. La parte superior del tubo está abierta. La temperatura es de 14 ºC y la presión atmosférica es de 740 mmHg. ¿Qué longitud tendría la columna de aire atrapado si la temperatura fuera de 30 ºC y la presión atmosférica de 760 mmHg? **Resp.** 12.4 cm.

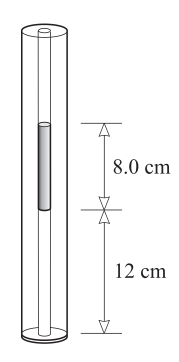


Figura 16-1

16.26 [II] Como se muestra en la figura 16-1, el aire está atrapado en la parte inferior sellada del tubo capilar vertical, por una columna de mercurio de 8.0 cm de longitud. La parte superior del tubo está abierta y el sistema está en equilibrio. ¿Cuál será la longitud de la columna de aire atrapado si el tubo se inclina hasta alcanzar un ángulo de 65º con la vertical? Tome $P_a = 76$ cmHg. **Resp.** 0.13 m.

16.27 [II] En un día, cuando el barómetro marca una lectura de 75.23 cm, un vaso de precipitados contiene 250 mL de cierto gas ideal a 20.0 ºC. Un manómetro de aceite ($\rho = 810$ kg/m^3) lee una presión en el vaso de 41.0 cm de aceite y bajo la presión atmosférica. ¿Qué volumen ocupará el gas bajo condiciones TPE? **Resp.** 233 mL.

16.28 [II] Un tanque de 5 000 cm^3 contiene un gas ideal ($M = 40$ kg/kmol) a una presión manométrica de 530 kPa y una temperatura de 25 ºC. Si supone que la presión atmosférica es de 100 kPa, ¿qué cantidad de masa de gas se encuentra en el tanque? **Resp.** 0.051 kg.

16.29 [II] La presión del aire en un vacío razonablemente bueno podría ser de 2.0×10^{-5} mmHg. ¿Qué masa de aire existe en un volumen de 250 mL a esta presión y 25 ºC? Tome $M = 28$ kg/kmol para el aire.
Resp. 7.5×10^{-12} kg.

16.30 [II] ¿Qué volumen ocupará 1.216 g de SO_2 gaseoso ($M = 64.1$ kg/kmol) a 18.0 ºC y 775 mmHg, si actúa como un gas ideal? **Resp.** 457 mL.

16.31 [II] Calcule la densidad del H_2S gaseoso ($M = 34.1$ kg/kmol) a 27 ºC y 2.00 atm, si supone que es un gas ideal.
Resp. 2.77 kg/m^3.

16.32 [II] Un tubo de 30 mL contiene 0.25 g de vapor de agua ($M = 18$ kg/kmol) a una temperatura de 340 ºC. Si supone que el gas es ideal, ¿cuál es su presión? **Resp.** 2.4 MPa.

16.33 [II] Un método para estimar la temperatura en el centro del Sol se basa en la ley del gas ideal. Si supone que el centro consiste en gases cuya masa *M* promedio es de 0.70 kg/kmol, y si la densidad y la presión son 90×10^3 kg/m^3 y 1.4×10^{11} atm, respectivamente, calcule la temperatura. **Resp.** 1.3×10^7 K.

16.34 [II] Un matraz sellado de 500 mL contiene nitrógeno a una presión de 76.00 cmHg. Un delgado tubo de vidrio reposa en el fondo del matraz. Su volumen es de 0.50 mL y encierra gas de hidrógeno a una presión de 4.5 atm. Suponga que el tubo se rompe de modo que el hidrógeno llena el matraz. ¿Cuál será la nueva presión en el matraz? **Resp.** 76.34 cmHg.

16.35 [II] Como se muestra en la figura 16-2, dos matraces están conectados por una llave de paso inicialmente cerrada. Un matraz contiene gas criptón a 500 mmHg, mientras que el otro contiene helio a 950 mmHg. La llave de paso se abre de modo que los gases se mezclan. ¿Cuál es la presión final del sistema? Suponga temperatura constante. **Resp.** 789 mmHg.

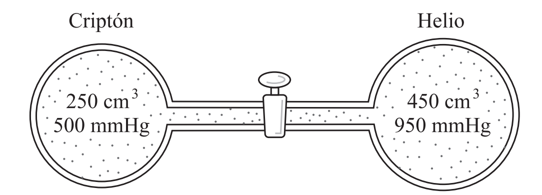


Figura 16-2

16.36 [II] Una burbuja de aire de volumen V_0 se libera cerca del fondo de un lago a una profundidad de 11.0 m. ¿Cuál será su nuevo volumen en la superficie? Suponga que su temperatura es de 4.0 ºC en el punto de liberación y de 12 ºC en la superficie. El agua tiene una densidad de 1 000 kg/m^3 y la presión atmosférica es de 75 cmHg. **Resp.** $2.1V_0$.

16.37 [II] Una campana de buzo cilíndrica (un cilindro vertical con el extremo inferior abierto y el superior cerrado) de 12.0 m de alto se sumerge en un lago hasta que el agua dentro de la campana se eleva 8.0 m desde el fondo del cilindro. Determine la distancia entre la parte superior de la campana y la superficie del lago. (Presión atmosférica = 1.00 atm.) **Resp.** 20.6 m − 4.0 m = 16.6 m.

TEORÍA CINÉTICA 17

LA TEORÍA CINÉTICA considera que la materia está compuesta por partículas discretas (átomos y/o moléculas) en un movimiento continuo. En un gas, las moléculas se encuentran en movimiento azaroso (caótico) continuo con una amplia distribución de rapideces que van desde cero hasta valores muy grandes.

EL NÚMERO DE AVOGADRO (N_A) es el número de partículas (moléculas o átomos) en 1 kmol de sustancia. Para todas las sustancias,

$$N_A = 6.022 \times 10^{26} \text{ partículas/kmol} = 6.022 \times 10^{23} \text{ partículas/mol}$$

Por ejemplo, $M = 2$ kg/kmol para el H_2 y $M = 32$ kg/kmol para el O_2. Por consiguiente, 2 kg de H_2 y 32 kg de O_2 contienen cada uno 6.02×10^{26} moléculas.

LA MASA DE UNA MOLÉCULA (o átomo) se puede calcular a partir de la masa molecular (o atómica) M de la sustancia y con el número de Avogadro N_A. Como M kilogramos de una sustancia contienen N_A partículas, la masa m_0 de una partícula está dada por

$$m_0 = \frac{M}{N_A}$$

LA ENERGÍA CINÉTICA PROMEDIO TRASLACIONAL de una molécula de gas es $3\ k_BT/2$, donde T es la temperatura absoluta del gas y $k_B = R/N_A = 1.381 \times 10^{-23}$ J/K es la **constante de Boltzmann**. En otras palabras, para una molécula de masa m_0,

$$\text{(promedio de } \tfrac{1}{2}m_0v^2) = \tfrac{3}{2}k_BT$$

Note que, en la literatura, la constante de Boltzmann también se representa como k (sin subíndice).

LA RAPIDEZ CUADRÁTICA MEDIA (v_{rms}) de una molécula de gas es la raíz cuadrada del promedio de v^2 para una molécula sobre un intervalo de tiempo muy grande. Esto es equivalente a tomar el promedio sobre todas las moléculas del gas en un instante dado. De la expresión de la energía cinética promedio, la rapidez rms es

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}}$$

LA TEMPERATURA ABSOLUTA (T) de un gas ideal tiene un significado que se obtiene al resolver la ecuación $\frac{1}{2}m_0v_{rms}^2 = \frac{3}{2}k_BT$. Por tanto

$$T = \left(\frac{2}{3k_B}\right)\left(\frac{1}{2}m_0v_{rms}^2\right)$$

La temperatura absoluta de un gas ideal es una medida de su energía cinética traslacional promedio por molécula.

LA PRESIÓN (P) de un gas ideal se definió en el capítulo 16 con la ecuación $PV = (m/M)RT$. Al observar que $m = Nm_0$, donde N es el número de moléculas en el volumen V, y sustituir T con el valor determinado arriba, se tiene

$$PV = \tfrac{1}{3}Nm_0v_{rms}^2$$

Más aún, como $Nm_0/V = \rho$, la densidad del gas

$$P = \frac{1}{3}\rho v_{\text{rms}}^2$$

LA TRAYECTORIA LIBRE MEDIA (TLM) de una molécula de gas es la distancia promedio que tal molécula se mueve entre colisiones. Para un gas ideal de moléculas esféricas con radio b,

$$\text{Trayectoria libre media } = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(N/V)}$$

donde N/V es el número de moléculas por unidad de volumen.

PROBLEMAS RESUELTOS

17.1 [I] El gas nitrógeno común consta de moléculas de N_2. Calcule la masa de una de tales moléculas. La masa molecular es 28 kg/kmol.

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{28 \text{ kg/kmol}}{6.02 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}} = 4.7 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

17.2 [I] El gas helio consta de átomos separados de He, en lugar de moléculas. ¿Cuántos átomos de helio, He, hay en 2.0 g de helio? $M = 4.0$ kg/kmol para el He.

Método 1

Un kilomol de He tiene 4.0 kg y contiene N_A átomos. Pero 2.0 g equivalen a

$$\frac{0.0020 \text{ kg}}{4.0 \text{ kg/kmol}} = 0.00050 \text{ kmol}$$

de helio. Por consiguiente,

$$\text{Número de átomos en 2.0 g} = (0.00050 \text{ kmol})N_A$$
$$= (0.00050 \text{ kmol})(6.02 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}) = 3.0 \times 10^{23}$$

Método 2

La masa de un átomo de helio es

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{4.0 \text{ kg/kmol}}{6.02 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}} = 6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

entonces
$$\text{Número de átomos en 2.0 g} = \frac{0.0020 \text{ kg}}{6.64 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.0 \times 10^{23}$$

17.3 [II] Una gotita de mercurio tiene un radio de 0.50 mm. ¿Cuántos átomos de mercurio hay en la gotita? Para el Hg, $M = 202$ kg/kmol y $\rho = 13\,600$ kg/m^3.

El volumen de una gotita es

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \left(\frac{4\pi}{3}\right)(5.0 \times 10^{-4} \text{ m})^3 = 5.24 \times 10^{-10} \text{ m}^3$$

La masa de la gotita es

$$m = \rho V = (13\,600 \text{ kg/m}^3)(5.24 \times 10^{-10} \text{ m}^3) = 7.1 \times 10^{-6} \text{ kg}$$

La masa de un átomo de mercurio es

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{202 \text{ kg/kmol}}{6.02 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}} = 3.36 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

Entonces el número de átomos en una gotita es

$$\text{Número de átomos } = \frac{m}{m_0} = \frac{7.1 \times 10^{-6} \text{ kg}}{3.36 \times 10^{-25} \text{ kg}} = 2.1 \times 10^{19}$$

17.4 [II] ¿Cuántas moléculas hay en 70 mL de benceno? Para el benceno, $\rho = 0.88 \text{ g/cm}^3$ y $M = 78$ kg/kmol.

Recuerde que $1 \text{ g/cm}^3 = 1\,000 \text{ kg/m}^3$ y aquí $\rho = 880 \text{ kg/m}^3$.

$$\text{Masa de 70 cm}^3 = m = \rho V = (880 \text{ kg/m}^3)(70 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.0616 \text{ kg}$$

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{78 \text{ kg/kmol}}{6.02 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}} = 1.30 \times 10^{-25} \text{ kg}$$

$$\text{Número de moléculas en 70 cm}^3 = \frac{m}{m_0} = \frac{0.0616 \text{ kg}}{1.30 \times 10^{-25} \text{ kg}} = 4.8 \times 10^{23}$$

17.5 [I] Calcule la rapidez rms de una molécula de nitrógeno ($M = 28$ kg/kmol) en aire a 0 ºC.

Se sabe que $\frac{1}{2} m_0 v_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{2} k_B T$ y por tanto

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_0}}$$

Pero

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{28 \text{ kg/kmol}}{6.02 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}} = 4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Así que

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(273 \text{ K})}{4.65 \times 10^{-26} \text{ kg}}} = 0.49 \text{ km/s}$$

17.6 [II] Suponga que una molécula de gas particular en la superficie de la Tierra tiene una rapidez rms igual a la que posee dicho gas a 0 ºC. Si se fuera a mover verticalmente hacia arriba sin chocar con otras moléculas, ¿qué tan alto llegaría? Suponga que g es constante sobre la trayectoria.

La EC inicial de la molécula es

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2} m_0 v_{\text{rms}}^2 = \tfrac{3}{2} k_B T$$

La molécula continuará subiendo hasta que su EC se convierta en EP_G. Por consiguiente, llamando h a la altura a la que se eleva, se tiene

$$\tfrac{3}{2} k_B T = m_0 g h$$

Al resolver para h se obtiene

$$h = \left(\frac{1}{m_0}\right)\left(\frac{3k_B T}{2g}\right) = \left(\frac{1}{m_0}\right)\left[\frac{(3)(1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(273 \text{ K})}{2(9.81 \text{ m/s}^2)}\right]$$
$$= \frac{5.76 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m}}{m_0}$$

donde m_0 está en kg. La altura varía inversamente con la masa de la molécula. Para una molécula de N_2, $m_0 = 4.65 \times 10^{-26}$ kg (problema 17.5) y en este caso h resulta ser 12.4 km.

17.7 [I] El aire a temperatura ambiente tiene una densidad de aproximadamente 1.29 kg/m³. Si supone que está compuesto de un solo gas, calcule v_{rms} para sus moléculas.

Como $P = \frac{1}{3}\rho v_{rms}^2$, se tiene

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3P}{\rho}} = \sqrt{\frac{3(100 \times 10^3 \text{ Pa})}{1.29 \text{ kg/m}^3}} \approx 480 \text{ m/s}$$

donde se ha tomado 100 kPa como la presión atmosférica.

17.8 [I] Encuentre la energía cinética traslacional de un mol de un gramo de cualquier gas ideal a 0 ºC.

Para cualquier gas ideal, $\frac{3}{2}k_BT = \frac{1}{2}m_0v_{rms}^2$, que es la EC de cada molécula. Un mol de un gramo contiene $N_A \times 10^{-3}$ moléculas. Entonces la EC total por mol es

$$\text{EC}_{total} = (N_A \times 10^{-3})\left(\tfrac{3}{2}k_BT\right) = 3 \times 10^{-3}\,\frac{RT}{2} = 3.4 \text{ kJ}$$

donde $T = 273$ K, y se utilizó el hecho de que $k_BN_A = R$.

17.9 [II] Existe aproximadamente un átomo de hidrógeno por cm³ en el espacio exterior, donde la temperatura (a la sombra) es más o menos de 3.5 K. Calcule la rapidez rms de cada átomo y la presión que ejercen.

Tenga presente que $k_BN_A = R$ y que $m_0 = M/N_A$,

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{M/N_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 295 \text{ m/s o } 0.30 \text{ km/s}$$

donde M para el hidrógeno es 1.0 kg/kmol y $T = 3.5$ K. Para determinar la presión se puede utilizar $P = \rho v_{rms}^2/3$. La masa m_0 de un átomo de hidrógeno es (1.0 kg/kmol)/N_A. Ya que en 1 m³ = 10⁶ cm³ hay $N = 10^6$ átomos/m³, se tiene

$$\rho = \frac{Nm_0}{V} = \left(\frac{N}{V}\right)m_0 = 10^6\left(\frac{1}{N_A}\right) \text{ kg/m}^3$$

y

$$P = \tfrac{1}{3}\rho v_{rms}^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{10^6}{6.02 \times 10^{26}}\right)(295)^2 = 5 \times 10^{-17} \text{ Pa}$$

17.10 [I] Calcule las siguientes razones para los gases de hidrógeno ($M = 2.0$ kg/kmol) y nitrógeno ($M = 28$ kg/kmol) a la misma temperatura: *a*) $(\text{EC})_H/(\text{EC})_N$ y *b*) $(\text{rapidez rms})_H/(\text{rapidez rms})_N$.

a) La EC traslacional promedio de una molécula, $\frac{3}{2}k_BT$, depende sólo de la temperatura. Por tanto la razón $(\text{EC})_H/(\text{EC})_N = 1$.

b)

$$\frac{(v_{rms})_H}{(v_{rms})_N} = \sqrt{\frac{3k_BT/m_{0H}}{3k_BT/m_{0N}}} = \sqrt{\frac{m_{0N}}{m_{0H}}}$$

Pero $m_0 = M/NA$, entonces

$$\frac{(v_{rms})_H}{(v_{rms})_N} = \sqrt{\frac{M_N}{M_H}} = \sqrt{\frac{28}{2.0}} = 3.7$$

17.11 [II] Las moléculas de cierto gas ideal se comportan como esferas de radio 3.0×10^{-10} m. Calcule la trayectoria libre media para estas moléculas bajo TPE.

Método 1

Se sabe que en condiciones TPE 1.00 kmol de una sustancia ocupa 22.4 m³. El número de moléculas por unidad de volumen, N/V, se puede encontrar a partir del hecho de que, en 22.4 m³ hay $N_A = 6.02 \times 10^{26}$ moléculas. La trayectoria libre media está dada por

$$\text{Trayectoria libre media} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2(N/V)} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}(3.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2}\left(\frac{22.4\ \text{m}^3}{6.02 \times 10^{26}}\right) = 2.4 \times 10^{-8}\ \text{m}$$

Método 2

Como $M = m_0 N_A = m_0(R/k_B)$ y $m = Nm_0$,

$$PV = \left(\frac{m}{M}\right)RT \qquad \text{se convierte en} \qquad PV = Nk_B T$$

y entonces

$$\frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} = \frac{1.01 \times 10^5\ \text{N/m}^2}{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(273\ \text{K})} = 2.68 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}$$

Entonces se usa la ecuación de la trayectoria libre media como en el método 1.

17.12 [II] ¿A qué presión unas moléculas esféricas de 3.0×10^{-10} m de radio tendrán una trayectoria libre media de 50 cm? Suponga un gas ideal a 20 ºC.

De la expresión para la trayectoria libre media (t.l.m.) se obtiene

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}b^2\,(\text{t.l.m.})}$$

Al combinar esta ecuación con la ley de los gases ideales en la forma $PV = Nk_B T$ (vea el problema 17.11) se obtiene

$$P = \frac{k_B T}{4\pi\sqrt{2}b^2\,(\text{t.l.m.})} = \frac{(1.38 \times 10^{-23}\ \text{J/K})(293\ \text{K})}{4\pi\sqrt{2}(3.0 \times 10^{-10}\ \text{m})^2(0.50\ \text{m})} = 5.1\ \text{mPa}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

17.13 [I] Calcule la masa de un átomo de neón. La masa atómica del neón es 20.2 kg/kmol.
Resp. 3.36×10^{-26} kg.

17.14 [II] En el polietileno, una molécula típica de polímero puede tener una masa molecular de 15×10^3. *a*) ¿Cuál es la masa en kilogramos de dicha molécula? *b*) ¿Cuántas de tales moléculas harán 2 g de polímero?
Resp. *a*) 2.5×10^{-23} kg; *b*) 8×10^{19}.

17.15 [II] Cierto virus del tabaco tiene $M = 4.0 \times 10^7$ kg/kmol. ¿Cuántas moléculas de este virus están presentes en 1.0 mL de una solución que contiene 0.10 mg de virus por mL? **Resp.** 1.5×10^{12}.

17.16 [II] Un tubo electrónico al vacío se selló durante su fabricación a una presión de 1.2×10^{-7} mmHg y a una temperatura de 27 ºC. Su volumen es de 100 cm^3. *a*) ¿Cuál es la presión en el tubo (en Pa)? *b*) ¿Cuántas moléculas de gas permanecen en el tubo? **Resp.** *a*) 1.6×10^{-5} Pa; *b*) 3.8×10^{11}.

17.17 [II] En un tubo que contiene gas de helio la presión es de 0.200 mmHg. Si la temperatura del gas es de 20 ºC, ¿cuál es la densidad del gas? (Use $M_{He} = 4.0$ kg/kmol.) **Resp.** 4.4×10^{-5} kg/m^3.

17.18 [II] ¿A qué temperatura las moléculas de un gas ideal tendrán dos veces la rapidez rms que poseen a 20 ºC? **Resp.** 1 170 K ≈ 900 ºC.

17.19 [II] Un objeto debe tener una rapidez de por lo menos 11.2 km/s para escapar del campo gravitacional de la Tierra. ¿A qué temperatura la v_{rms} de las moléculas de H_2 será igual a la rapidez de escape? Repita para las moléculas de N_2. ($M_{H_2} = 2.0$ kg/kmol y $M_{N_2} = 28$ kg/kmol.) **Resp.** 1.0×10^4 K; 1.4×10^5 K.

17.20 [II] En una región del espacio exterior hay un promedio de sólo cinco moléculas por cm^3. La temperatura en ese lugar es de aproximadamente 3 K. ¿Cuál es la presión promedio de este gas que está muy diluido?
Resp. 2×10^{-16} Pa.

17.21 [II] Un cubo de aluminio tiene un volumen de 1.0 cm^3 y una masa de 2.7 g. *a*) ¿Cuántos átomos de aluminio hay en el cubo? *b*) ¿Qué volumen se puede asociar con cada átomo? *c*) Si cada átomo fuera un cubo, ¿cuál sería la longitud de una arista? $M = 108$ kg/kmol para el aluminio. **Resp.** *a*) 1.5×10^{22}; *b*) 6.6×10^{-29} m^3; *c*) 4.0×10^{-10} m.

17.22 [II] La rapidez rms de las moléculas de nitrógeno en el aire a TPE es de aproximadamente 490 m/s. Calcule su trayectoria libre media y el tiempo promedio entre colisiones. El radio de una molécula de hidrógeno se puede tomar como 2.0×10^{-10} m. **Resp.** 5.2×10^{-8} m, 1.1×10^{-10} s.

17.23 [II] ¿Cuál es la trayectoria libre media de una molécula de gas (radio 2.5×10^{-10} m) en un gas ideal a 500 ºC cuando la presión es de 7.0×10^{-6} mmHg? **Resp.** 10 m.

CALORIMETRÍA 18

ENERGÍA TÉRMICA es la energía cinética aleatoria de las partículas (por lo común electrones, iones, átomos y moléculas) que componen un sistema.

CALOR (Q) es la energía térmica en tránsito de un sistema (o agregado de electrones, iones y átomos) a una temperatura hacia un sistema que se encuentra en contacto con él, pero que está a una temperatura más baja. Su unidad en el SI es el joule. Otras unidades utilizadas para el calor son la ***caloría*** (1 cal = 4.184 J) y la unidad térmica inglesa (1 Btu = 1054 J). La "caloría" utilizada por los nutriólogos se llama "caloría grande" y es en realidad una kilocaloría (1 Cal = 1 kcal = 10^3 cal).

EL CALOR ESPECÍFICO (o ***capacidad calorífica específica***, c) de una sustancia es la cantidad de calor requerida para elevar la temperatura de una unidad de masa de la sustancia en un grado Celsius o equivalentemente por un kelvin.

Si ΔQ es la cantidad de calor requerido para producir un cambio en la temperatura ΔT en una masa m de sustancia, entonces el calor específico es

$$c = \frac{\Delta Q}{m\,\Delta T} \qquad \text{o} \qquad \Delta Q = cm\,\Delta T$$

En el SI, c tiene unidades de J/kg · K, que es equivalente a J/kg · °C. También se utiliza ampliamente la unidad cal/g · °C, donde 1 cal/g · °C = 4 184 J/kg · °C.

El calor específico es una propiedad característica de una sustancia y varía ligeramente con la temperatura. Para el agua, c = 4 180 J/kg · °C = 1.00 cal/g · °C.

EL CALOR GANADO (O PERDIDO) por un cuerpo (cuya fase no cambia) mientras experimenta un cambio de temperatura ΔT, está dado por

$$\Delta Q = mc\,\Delta T$$

EL CALOR DE FUSIÓN (L_f) de un sólido cristalino es la cantidad de calor requerido para fundir una unidad de masa del sólido a temperatura constante. También es igual a la cantidad de calor emitido por una unidad de masa del sólido fundido cuando se cristaliza a la misma temperatura. El calor de fusión del agua a 0 °C es aproximadamente 335 kJ/kg u 80 cal/g.

EL CALOR DE VAPORIZACIÓN (L_v) de un líquido es la cantidad de calor requerido para vaporizar una unidad de masa del líquido a una temperatura constante. Para el agua a 100 °C, L_v es aproximadamente 2.26 MJ/kg o 540 cal/g.

EL CALOR DE SUBLIMACIÓN de una sustancia sólida es la cantidad de calor requerida para convertir una unidad de masa de la sustancia de sólida a gaseosa a temperatura constante.

LOS PROBLEMAS DE CALORIMETRÍA incluyen el intercambio de energía térmica entre objetos inicialmente calientes y objetos fríos. En virtud de que la energía se debe conservar, se puede escribir la siguiente ecuación

La suma de los cambios de calor para todos los objetos = 0

En este caso, el calor que fluye hacia fuera del sistema a alta temperatura ($\Delta Q_{\text{sal}} < 0$) es numéricamente igual al calor que fluye hacia adentro del sistema a baja temperatura ($\Delta Q_{\text{ent}} > 0$) y por consiguiente la suma es cero. Esto, desde luego, supone que no se pierde energía calorífica del sistema.

LA HUMEDAD ABSOLUTA es la masa de vapor de agua presente por unidad de volumen de gas (generalmente la atmósfera). Las unidades típicas son kg/m³ y g/cm³.

LA HUMEDAD RELATIVA (HR) es la relación que se obtiene al dividir la masa de vapor de agua por unidad de volumen *presente en el aire* entre la masa de vapor de agua por unidad de volumen *presente en el aire saturado a la misma temperatura.* Cuando se expresa en porcentaje, la relación anterior se multiplica por 100.

PUNTO DE ROCÍO: El aire frío saturado contiene menos agua que el aire saturado más caliente. Cuando el aire se enfría, eventualmente alcanza una temperatura a la cual se satura. Esta temperatura se llama punto de rocío. A una temperatura más baja que ésta, el agua contenida en el aire se condensa.

PROBLEMAS RESUELTOS

18.1 [I] *a*) ¿Cuánto calor se requiere para elevar la temperatura de 250 mL de agua de 20.0 °C a 35.0 °C? *b*) ¿Cuánto calor pierde el agua cuando se enfría de vuelta a 20.0 °C?

Ya que 250 mL de agua tienen una masa de 250 g y que $c = 1.00$ cal/g · °C para el agua, se tiene

a) $$\Delta Q = mc\,\Delta T = (250\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot°\text{C})(15.0\text{ °C}) = 3.75\times10^3\text{ cal} = 15.7\text{ kJ}$$

b) $$\Delta Q = mc\,\Delta T = (250\text{ g})(1.00\text{ cal/g}\cdot°\text{C})(-15.0\text{ °C}) = -3.75\times10^3\text{ cal} = -15.7\text{ kJ}$$

Note que la entrada de calor (es decir, el calor que entra en un objeto) es positiva, mientras que la salida de calor (es decir, el calor que sale de un objeto) es negativa.

18.2 [I] ¿Cuánto calor entrega 25 g de aluminio conforme se enfría de 100 °C a 20 °C? Para el aluminio, $c = 880$ J/kg · °C.

$$\Delta Q = mc\,\Delta T = (0.025\text{ kg})(880\text{ J/kg}\cdot°\text{C})(-80°\text{ C}) = -1.8\text{ kJ} = -0.42\text{ kcal}$$

18.3 [I] Se adiciona cierta cantidad de calor a una masa de aluminio ($c = 0.21$ cal/g · °C) y su temperatura se eleva 57 °C. Suponga que la misma cantidad de calor se adiciona a la misma masa de cobre ($c = 0.093$ cal/g · °C). ¿Cuánto se elevará la temperatura del cobre?

Dado que ΔQ es la misma para ambos, se tiene

$$mc_{\text{A1}}\Delta T_{\text{A1}} = mc_{\text{Cu}}\Delta T_{\text{Cu}}$$

o $$\Delta T_{\text{Cu}} = \left(\frac{c_{\text{A1}}}{c_{\text{Cu}}}\right)(\Delta T_{\text{A1}}) = \left(\frac{0.21}{0.093}\right)(57\text{ °C}) = 1.3\times10^2\text{ °C}$$

18.4 [I] Dos placas metálicas idénticas (masa $= m$, calor específico $= c$) tienen diferentes temperaturas; una es de 20 °C y la otra de 90 °C. Si se colocan en buen contacto térmico, ¿cuál será su temperatura final?

Puesto que las placas son idénticas, se podría suponer que la temperatura final está a la mitad del camino entre 20 °C y 90 °C; o sea a 55 °C. Esto es correcto, pero se debe demostrar matemáticamente. De la ley de conservación de la energía, el calor perdido por una placa debe ser igual al calor ganado por la otra. En consecuencia, el cambio total de calor del sistema es cero. En forma de ecuación,

$$(\text{cambio de calor de la placa caliente}) + (\text{cambio de calor de la placa fría}) = 0$$
$$mc\,(\Delta T)_{\text{caliente}} + mc(\Delta T)_{\text{fría}} = 0$$

que es la forma abreviada de $m_{\text{caliente}}c_{\text{caliente}}\Delta T_{\text{caliente}} + m_{\text{fría}}c_{\text{fría}}\Delta T_{\text{fría}} = 0$

Se debe tener cuidado con ΔT: Es la temperatura final (que en este caso se denota por T_f) menos la temperatura inicial. Por tanto, la ecuación anterior se convierte en

$$mc(T_f - 90\text{ °C}) + mc(T_f - 20\text{ °C}) = 0$$

Después de cancelar mc en cada término, se resuelve y se encuentra $T_f = 55$ °C, que es la respuesta esperada.

18.5 [II] Un termo contiene 250 g de café a 90 °C. A éste se le añade 20 g de leche a 5 °C. Después de que se establece el equilibrio, ¿cuál es la temperatura del líquido? Suponga que no hay pérdidas de calor en el termo.

Tanto el agua como el café y la leche tienen el mismo valor de c, 1.00 cal/g · °C. La ley de conservación de la energía permite escribir

$$\text{(cambio de calor del café)} + \text{(cambio de calor de la leche)} = 0$$
$$(cm\,\Delta T)_{\text{café}} + (cm\,\Delta T)_{\text{leche}} = 0$$

En otras palabras, el calor perdido por el café es igual al calor ganado por la leche. Si la temperatura final del líquido es T_f, entonces

$$\Delta T_{\text{café}} = T_f - 90\ ^\circ\text{C} \qquad \Delta T_{\text{leche}} = T_f - 5\ ^\circ\text{C}$$

La sustitución y cancelación de c produce

$$(250\ \text{g})(T_f - 90\ ^\circ\text{C}) + (20\ \text{g})(T_f - 5\ ^\circ\text{C}) = 0$$

Al resolver se obtiene $T_f = 84\ ^\circ\text{C}$.

18.6 [II] Un termo contiene 150 g de agua a 4 °C. Dentro de él se colocan 90 g de metal a 100 °C. Después de que se establece el equilibrio, la temperatura del agua y el metal es de 21 °C. ¿Cuál es el calor específico del metal? Suponga que no hay pérdidas de calor en el termo.

$$\text{(cambio de calor del metal)} + \text{(cambio de calor del agua)} = 0$$
$$(cm\,\Delta T)_{\text{metal}} + (cm\,\Delta T)_{\text{agua}} = 0$$
$$c_{\text{metal}}(90\ \text{g})(-79\ ^\circ\text{C}) + (1.00\ \text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(150\ \text{g})(17^\circ\ \text{C}) = 0$$

Al resolver se produce $c_{\text{metal}} = 0.36$ cal/g · °C. Note que $\Delta T_{\text{metal}} = 21 - 90 = -79$ °C.

18.7 [II] Un calorímetro de 200 g de cobre contiene 150 g de aceite a 20 °C. Al aceite se le agregan 80 g de aluminio a 300 °C. ¿Cuál será la temperatura del sistema después de que se establece el equilibrio? $c_{\text{Cu}} = 0.093$ cal/g · °C, $c_{\text{A1}} = 0.21$ cal/g · °C, $c_{\text{aceite}} = 0.37$ cal/g · °C.

$$\text{(cambio de calor del aluminio)} + \text{(cambio de calor del calorímetro y el aceite)} = 0$$
$$(cm\,\Delta T)_{\text{Al}} + (cm\,\Delta T)_{\text{Cu}} + (cm\,\Delta T)_{\text{aceite}} = 0$$

Al sustituir los valores dados esto se convierte en

$$\left(0.21\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot{}^\circ\text{C}}\right)(80\ \text{g})(T_f - 300\,^\circ\text{C}) + \left(0.093\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot{}^\circ\text{C}}\right)(200\ \text{g})(T_f - 20\,^\circ\text{C})$$
$$+ \left(0.37\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot{}^\circ\text{C}}\right)(150\ \text{g})(T_f - 20\,^\circ\text{C}) = 0$$

Al resolver se obtiene $T_f = 72\ ^\circ\text{C}$.

18.8 [II] En un calorímetro de cobre se quemaron exactamente 3.0 g de carbono y se convirtieron en CO_2. La masa del calorímetro es de 1 500 g y contiene 2 000 g de agua. Si la temperatura inicial fue de 20 °C y la temperatura final es de 31 °C, calcule el calor que proporciona cada gramo de carbono. $c_{\text{Cu}} = 0.093$ cal/g · °C. Desprecie la pequeña capacidad calorífica del carbono y del dióxido de carbono.

La ley de conservación de la energía dice que

$$\text{(cambio de calor del carbono)} + \text{(cambio de calor del calorímetro)} + \text{(cambio de calor del agua)} = 0$$
$$\text{(cambio de calor del carbono)} + (0.093\ \text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(1\,500\ \text{g})(11\ ^\circ\text{C}) + (1\ \text{cal/g}\cdot{}^\circ\text{C})(2\,000\ \text{g})(11\ ^\circ\text{C}) = 0$$
$$\text{(cambio de calor del carbono)} = -23\,500\ \text{cal}$$

Por tanto, el calor generado por un gramo de carbono conforme se quema es

$$\frac{23\,500 \text{ cal}}{3.0 \text{ g}} = 7.8 \text{ kcal/g}$$

18.9 [II] Determine la temperatura resultante T_f cuando se mezclan 150 g de hielo a 0 °C con 300 g de agua a 50 °C.

De la conservación de la energía, se tiene

$$\text{(cambio de calor del hielo)} + \text{(cambio de calor del agua)} = 0$$

$$\text{(calor para fundir hielo)} + \text{(calor para calentar agua con hielo)} + \text{(cambio de calor del agua)} = 0$$

$$(mL_f)_{\text{hielo}} + (cm\,\Delta T)_{\text{agua con hielo}} + (cm\,\Delta T)_{\text{agua}} = 0$$

$$(150 \text{ g})(80 \text{ cal/g}) + (1.00 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(150 \text{ g})(T_f - 0\ °\text{C}) + (1.\ 00 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(300 \text{ g})(T_f - 50\ °\text{C}) = 0$$

de donde $T_f = 6.7$ °C.

18.10 [II] ¿Cuánto calor se entrega cuando 20 g de vapor a 100 °C se condensan y enfrían a 20 °C?

Cambio de calor = (cambio de calor por condensación) + (cambio de calor del agua durante el enfriamiento)

$$= mL_v + cm\,\Delta T$$
$$= (20 \text{ g})(-540 \text{ cal/g}) + (1.00 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(20 \text{ g})(20\ °\text{C} - 100\ °\text{C})$$
$$= -12\,400 \text{ cal} = -12 \text{ kcal}$$

18.11 [II] Una pieza de aluminio de 20 g ($c = 0.21$ cal/g · °C) a 90 °C se deja caer dentro de una cavidad en un gran bloque de hielo a 0 °C. ¿Cuánto hielo fundirá el aluminio?

$$\text{(cambio de calor de Al conforme se enfría a 0 °C)} + \text{(cambio de calor de masa } m \text{ de hielo fundido)} = 0$$

$$(mc\,\Delta T)_{\text{Al}} + (L_f m)_{\text{hielo}} = 0$$

$$(20 \text{ g})(0.21 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(0\ °\text{C} - 90°\text{ C}) + (80 \text{ cal/g})m = 0$$

Por lo cual, la cantidad de hielo fundido es $m = 4.7$ g.

18.12 [II] En un calorímetro (que se comporta térmicamente como si fuese equivalente a 40 g de agua) hay 200 g de agua y 50 g de hielo, todo a exactamente 0 °C. Dentro de él se vacían 30 g de agua a 90 °C. ¿Cuál será la condición final del sistema?

Comience por suponer (tal vez incorrectamente) que la temperatura final es $T_f > 0$ °C. Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{cambio de calor}\\ \text{de agua caliente}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{calor para}\\ \text{fundir hielo}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{calor para calentar}\\ \text{250 g de agua}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{calor para calentar}\\ \text{el calorímetro}\end{pmatrix} = 0$$

$$(30 \text{ g})(1.00 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(T_f - 90\ °\text{C}) + (50 \text{ g})(80 \text{ cal/g}) + (250 \text{ g})(1.00 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(T_f - 0\ °\text{C})$$
$$+ (40 \text{ g})(1.00 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(T_f - 0\ \ °\text{C}) = 0$$

Al resolver se encuentra que $T_f = -4.1$ °C, contrario a la suposición de que la temperatura final estaba arriba de 0 °C. Al parecer, no todo el hielo se funde. Por consiguiente, $T_f = 0$ °C.

Para encontrar cuánto hielo se funde, se tiene que

$$\text{Calor perdido por el agua caliente} = \text{calor ganado por el hielo fundente}$$
$$(30 \text{ g})(1.00 \text{ cal/g}\cdot°\text{C})(90\ °\text{C}) = (80 \text{ cal/ g})m$$

donde m es la masa del hielo que se funde. Al despejar, se encuentra que $m = 34$ g. El sistema final tiene 50 g − 34 g = 16 g de hielo que no se fundió.

18.13 [I] Un calentador eléctrico que produce 900 W de potencia se utiliza para vaporizar agua. ¿Cuánto agua a 100 °C se puede transformar el calentador en vapor a 100 °C en 3.00 min? (Para el agua a 100 °C, $L_v = 2.26 \times 10^6$ J/kg.)

El calentador produce 900 J de energía calorífica por segundo. Así que el calor producido en 3 min es

$$\Delta Q = (900 \text{ J/s})(180 \text{ s}) = 162 \text{ kJ}$$

El calor requerido para vaporizar una masa m de agua es

$$\Delta Q = mL_v = m(2.26 \times 10^6 \text{ J/kg})$$

Al igualar estas dos expresiones para ΔQ y resolver para m se obtiene $m = 0.0717$ kg $= 71.7$ g como la masa de agua vaporizada.

18.14 [I] Una bala de 3.00 g ($c = 0.0305$ cal/g · °C $= 128$ J/kg · °C) que se mueve a 180 m/s penetra en una bolsa de arena y se detiene. ¿En qué cantidad cambia la temperatura de la bala si toda su energía cinética se transforma en energía térmica que se agrega a la bala?

La energía cinética perdida por la bala es

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(3.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(180 \text{ m/s})^2 = 48.6 \text{ J}$$

Esto resulta en la adición de $\Delta Q = 48.6$ J de energía térmica a la bala. Entonces, ya que $\Delta Q = mc\Delta T$ se puede determinar ΔT para la bala como:

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{mc} = \frac{48.6 \text{ J}}{(3.00 \times 10^{-3} \text{ kg})(128 \text{ J/kg} \cdot {}^\circ\text{C})} = 127\,^\circ\text{C}$$

Note que se utilizó c en J/kg · °C y no en cal/g · °C.

18.15 [I] Suponga que una persona de 60 kg consume 2 500 Cal en comida durante un día. Si el equivalente total de calor de este alimento fuese retenido por el cuerpo de la persona, ¿cuál sería el cambio en temperatura que le ocasionaría? (Para el cuerpo, $c = 0.83$ cal/g · °C.) Recuerde que 1 Cal $=$ 1 kcal $=$ 1 000 cal.

La cantidad equivalente de calor añadido al cuerpo en un día es

$$\Delta Q = (2\,500 \text{ Cal})(1\,000 \text{ cal/Cal}) = 2.5 \times 10^6 \text{ cal}$$

Entonces, utilizando $\Delta Q = mc\Delta T$,

$$\Delta T = \frac{\Delta Q}{mc} = \frac{2.5 \times 10^6 \text{ cal}}{(60 \times 10^3 \text{ g})(0.83 \text{ cal/g} \cdot {}^\circ\text{C})} = 50\,^\circ\text{C}$$

18.16 [II] Un termómetro que se encuentra en una habitación de 10 m $\times$ 8.0 m $\times$ 4.0 m registra una lectura de 22 °C y un higrómetro señala una HR de 35%. ¿Qué masa de vapor de agua hay en la habitación? El aire saturado a 22 °C contiene 19.33 g H_2O/m^3.

$$\%\text{HR} = \frac{\text{masa de agua/m}^3}{\text{masa de agua/m}^3 \text{ de aire saturado}} \times 100$$

$$35 = \frac{\text{masa/m}^3}{0.01933 \text{ kg/m}^3} \times 100$$

de donde la masa/m^3 $= 6.77 \times 10^{-3}$ kg/m^3. Pero la habitación en cuestión tiene un volumen de 10 m $\times$ 8.0 m $\times$ 4.0 m $=$ 320 m^3. Por tanto, la masa total de agua en la habitación es

$$(320 \text{ m}^3)(6.77 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3) = 2.2 \text{ kg}$$

18.17 [II] En cierto día, cuando la temperatura es de 28 °C, se forma humedad en la parte exterior de un vaso que contiene una bebida fría, si el vaso está a una temperatura de 16 °C o menos. ¿Cuál es la humedad relativa ese día? El aire saturado a 28 °C contiene 26.93 g/m^3 de agua, mientras que, a 16 °C, contiene 13.50 g/m^3.

El rocío se forma a una temperatura de 16 °C o menos, de modo que el punto de rocío es de 16 °C. El aire está saturado a esa temperatura y por tanto contiene 13.50 g/m^3. Entonces,

$$\text{HR} = \frac{\text{masa presente/m}^3}{\text{masa/m}^3 \text{ en aire saturado}} = \frac{13.50}{26.93} = 0.50 = 50\%$$

18.18 [II] Aire ambiente a 5 °C y 20% de humedad relativa se introduce en un calentador y acondicionador de aire donde se calienta a 20 °C y su humedad relativa aumenta a un confortable 50%. ¿Cuántos gramos de agua deben evaporarse en un metro cúbico de aire ambiental para lograr esto? El aire saturado a 5 °C contiene 6.8 g/m^3 de agua, y a 20 °C contiene 17.3 g/m^3.

$$\text{Masa/m}^3 \text{ de vapor de agua en aire a 5 °C} = 0.20 \times 6.8 \text{ g/m}^3 = 1.36 \text{ g/m}^3$$

$$\text{Masa confortable/m}^3 \text{ a 20 °C} = 0.50 \times 17.3 \text{ g/m}^3 = 8.65 \text{ g/m}^3$$

$$1 \text{ m}^3 \text{ de aire a 5 °C se expande a } (293/278) \text{ m}^3 = 1.054 \text{ m}^3 \text{ a 20 °C}$$

$$\text{La masa de vapor de agua en } 1.054 \text{ m}^3 \text{ a 20 °C} = 1.054 \text{ m}^3 \times 8.65 \text{ g/m}^3 = 9.12 \text{ g}$$

$$\text{Masa de vapor de agua que se agrega a cada m}^3 \text{ de aire a 5 °C} = (9.12 - 1.36) \text{ g} = 7.8 \text{ g}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

18.19 [I] ¿Cuántas calorías se requieren para calentar de 15 °C a 65 °C cada una de las siguientes sustancias? *a*) 3.0 g de aluminio, *b*) 5.0 g de vidrio pyrex, *c*) 20 g de platino. Los calores específicos, en cal/g · °C, para el aluminio, el vidrio pyrex y el platino son 0.21, 0.20 y 0.032, respectivamente. **Resp.** *a*) 32 cal; *b*) 50 cal; *c*) 32 cal.

18.20 [I] Cuando se queman 5.0 g de cierto tipo de carbón, elevan la temperatura de 1 000 mL de agua de 10 °C a 47 °C. Determine la energía térmica producida por gramo de carbón. Desprecie la pequeña capacidad calorífica del carbón. **Resp.** 7.4 kcal/g.

18.21 [II] El aceite de una caldera tiene un calor de combustión de 44 MJ/kg. Si supone que 70% del calor producido se aprovecha, ¿cuántos kilogramos de aceite se requieren para elevar la temperatura de 2000 kg de agua desde 20 °C hasta 99 °C? **Resp.** 22 kg.

18.22 [II] ¿Cuál será la temperatura final si 50 g de agua a exactamente 0 °C se agregan a 250 g de agua a 90 °C? **Resp.** 75 °C.

18.23 [II] Una pieza de metal de 50 g a 95 °C se deja caer dentro de 250 g de agua a 17.0 °C y la calienta a 19.4 °C. ¿Cuál es el calor específico del metal? **Resp.** 0.16 cal/g · °C.

18.24 [II] ¿Cuánto tiempo le tomará a un calentador de 2.50 W evaporar completamente 400 g de helio líquido que se encuentra en su punto de ebullición (4.2 K)? Para el helio, $L_v = 5.0$ cal/g. **Resp.** 56 min.

18.25 [II] Un calorímetro de cobre de 55 g ($c = 0.093$ cal/g · °C) contiene 250 g de agua a 18.0 °C. Cuando 75 g de una aleación a 100 °C se dejan caer dentro del calorímetro, la temperatura final es de 20.4 °C ¿Cuál es el calor específico de la aleación? **Resp.** 0.10 cal/g · °C.

18.26 [II] Determine la temperatura que resulta cuando se mezclan 1.0 kg de hielo a exactamente 0 °C con 9.0 kg de agua a 50 °C y el calor no se pierde. **Resp.** 37 °C.

18.27 [II] ¿Cuánto calor es necesario para cambiar 10 g de hielo a exactamente 0 °C a vapor a 100 °C?
Resp. 7.2 kcal.

18.28 [II] Diez kilogramos de vapor a 100 °C se condensan al transformarlos en 500 kg de agua a 40.0 °C. ¿Cuál es la temperatura resultante? **Resp.** 51.8 °C.

18.29 [II] El calor de combustión del gas etano es de 373 kcal/mol. Si supone que 60.0% del calor es utilizable, ¿cuántos litros de etano, en condiciones de presión y temperatura estándares, deben quemarse para convertir 50.0 kg de agua a 10.0 °C en vapor a 100 °C? Un mol de gas ocupa 22.4 litros a precisamente 0 °C y 1 atm. **Resp.** 3.15×10^3 litros.

18.30 [II] Calcule el calor de fusión del hielo a partir de los siguientes datos para el hielo a 0 °C que se agrega al agua:

Masa del calorímetro	60 g
Masa del calorímetro más agua	460 g
Masa del calorímetro más agua y hielo	618 g
Temperatura inicial del agua	38.0 °C
Temperatura final de la mezcla	5.0 °C
Calor específico del calorímetro	0.10 cal/g · °C

Resp. 80 cal/g.

18.31 [II] Determine el resultado cuando 100 g de vapor a 100 °C pasan sobre una mezcla de 200 g de agua y 20 g de hielo a exactamente 0 °C en un calorímetro que se comporta térmicamente como si fuese el equivalente a 30 g de agua. **Resp.** 49 g de vapor condensado, temperatura final de 100° C.

18.32 [II] Determine el resultado cuando 10 g de vapor a 100 °C pasan a través de una mezcla de 400 g de agua y 100 g de hielo a exactamente 0 °C contenidos en un calorímetro que se comporta térmicamente como si fuese el equivalente a 50 g de agua. **Resp.** 80 g de hielo fundido, temperatura final 0 °C.

18.33 [II] Suponga que una persona que ingiere 2500 Cal de comida por día pierde esta cantidad en calor a través de la evaporación del agua de su cuerpo. ¿Cuánta agua debe evaporar cada día? A temperatura corporal, para el agua $L_v = 600$ cal/g. **Resp.** 4.17 kg.

18.34 [II] ¿Cuánto tiempo le tomará a un calentador de 500 W elevar la temperatura de 400 g de agua desde 15 °C hasta 98 °C? **Resp.** 278 s.

18.35 [II] Un taladro de 0.250 hp ocasiona que una broca de acero de 50.0 g se caliente al realizar un agujero en un bloque de madera dura. Si supone que 75.0% de la energía perdida por fricción provoca el calentamiento de la broca, ¿en qué cantidad cambiaría su temperatura en 20.0 s? Para el acero, $c = 450$ J/kg · °C.
Resp. 124 °C.

18.36 [II] En cierto día la temperatura es de 20 °C y el punto de rocío es de 5.0 °C. ¿Cuál es la humedad relativa? El aire saturado a 20 °C y a 5.0 °C contiene 17.12 y 6.80 g/m^3 de agua, respectivamente. **Resp.** 40%.

18.37 [II] ¿Cuánto vapor de agua existe en una habitación de 105 m^3 en un día cuando la humedad relativa en la habitación de 32% y la temperatura ambiente es de 20 °C? El aire saturado a 20 °C contiene 17.12 g/m^3 de agua. **Resp.** 0.58 kg.

18.38 [II] El aire a 30 °C y 90% de humedad relativa se hace circular en una unidad de aire acondicionado y se enfría a 20 °C. La humedad relativa se reduce simultáneamente a 50%. ¿Cuántos gramos de agua se eliminan de un metro cúbico de aire a 30 °C por el acondicionador? El aire saturado contiene 30.4 g/m^3 y 17.1 g/m^3 de agua a 30 °C y 20 °C, respectivamente. **Resp.** 19 g.

TRANSFERENCIA DE ENERGÍA CALORÍFICA 19

LA ENERGÍA CALORÍFICA SE PUEDE TRANSFERIR hacia o desde un sistema por **conducción**, **convección** y **radiación**. Recuerde que el calor es la energía transferida de un sistema a una temperatura más elevada hacia un sistema a una temperatura más baja (con el cual está en contacto) a través de las colisiones de sus partículas constituyentes.

LA CONDUCCIÓN ocurre cuando la energía calorífica pasa a través de un material como resultado de las colisiones entre los electrones, iones, átomos y moléculas del material. Cuanto más caliente esté un material, mayor será la EC promedio de sus átomos. Cuando existe una diferencia de temperatura entre los materiales en contacto, los átomos con mayor energía en la sustancia más caliente transfieren energía a los átomos con menor energía en la sustancia más fría cuando las colisiones atómicas ocurren entre los dos. Por tanto, el calor fluye de lo caliente a lo frío.

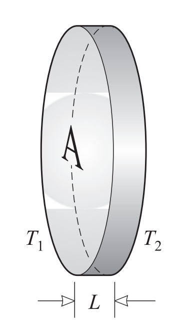


Figura 19-1

Considere la losa (plancha) de material que se muestra en la figura 19-1. Su espesor es L y su área de sección transversal es A. Las temperaturas de sus dos caras son T_1 y T_2, de modo que la diferencia de temperatura a través de la losa es $\Delta T = T_1 - T_2$. A la cantidad $\Delta T/L$ se le llama **gradiente de temperatura**. Es la razón de cambio de la temperatura con la distancia.

La cantidad de calor ΔQ transmitida de la cara 1 a la cara 2 en un tiempo Δt está dada por

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A \frac{\Delta T}{L}$$

donde k_T depende del material de la losa y se le llama **conductividad térmica** del material. En el SI, k_T tiene unidades de W/m · K y $\Delta Q/\Delta t$ está en J/s (es decir, W). Otras unidades que a veces se utilizan para expresar k_T se relacionan con W/m · K de la siguiente manera:

$$1\ \text{cal/s}\cdot\text{cm}\cdot{}^\circ\text{C} = 418.4\ \text{W/m}\cdot\text{K} \qquad \text{y} \qquad 1\ \text{Btu}\cdot\text{pulg/h}\cdot\text{pie}^2\cdot{}^\circ\text{F} = 0.144\ \text{W/m}\cdot\text{K}$$

LA RESISTENCIA TÉRMICA (o *valor R*) de una losa se define por la ecuación de flujo de calor de la siguiente forma

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{A\,\Delta T}{R} \qquad \text{donde} \qquad R = \frac{L}{k_T}$$

Sus unidades en el SI son $\text{m}^2 \cdot \text{K/W}$. Las unidades más comunes son $\text{pie}^2 \cdot \text{h} \cdot {}^\circ\text{F/Btu}$, donde $1\ \text{pie}^2 \cdot \text{h} \cdot {}^\circ\text{F/Btu} = 0.176\ \text{m}^2 \cdot \text{K/W}$. (Es improbable que tenga alguna ocasión para confundir este símbolo R con el símbolo de la constante universal de los gases.)

Para varias losas de la misma área superficial en serie, el valor R combinado está dado por

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$

donde $R_1, \ldots,$ son los valores R de las losas individuales.

LA CONVECCIÓN de la energía calorífica ocurre en un fluido cuando un material caliente fluye de tal forma que desplaza al material frío. Ejemplos típicos son el flujo de aire caliente desde una plancha en un sistema de calentamiento y el flujo de agua templada de la corriente del Golfo.

LA RADIACIÓN es el modo de transporte de la energía electromagnética radiante a través del vacío y el espacio vacío entre átomos. La energía radiante es distinta del calor, aun cuando ambas corresponden a energía en tránsito. El calor es calor; la radiación electromagnética es radiación electromagnética; no deben confundirse.

Un **cuerpo negro** es un cuerpo que absorbe toda la energía radiante que incide sobre él. En equilibrio térmico, un cuerpo emite tanta energía como la que absorbe. Por tanto, un buen captador de radiación es también un buen emisor de radiación.

Suponga que una superficie de área A tiene una temperatura absoluta T y radia sólo una fracción ϵ de la energía que emitiría una superficie negra. La cantidad ϵ se llama **emisividad** de la superficie, y la energía por segundo (es decir, la potencia) radiada por la superficie está dada por la ley de **Stefan-Boltzmann**:

$$\mathrm{P} = \epsilon A \sigma T^4$$

donde $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4 es la constante de *Stefan-Boltzmann* y T la temperatura absoluta. La emisividad de un cuerpo negro es igual a la unidad.

Todos los objetos cuya temperatura está por arriba del cero absoluto radian energía. Cuando un objeto con temperatura absoluta T está en una región donde la temperatura es T_e, la energía neta radiada por segundo por el objeto es

$$\mathrm{P} = \epsilon A \sigma (T^4 - T_e^4)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

19.1 [I] Una placa de hierro de 2 cm de espesor tiene un área de 5 000 cm^2 en su sección transversal. Una de las caras está a 150 ºC y la otra está a 140 °C. ¿Cuánto calor fluye a través de la placa cada segundo? Para el hierro, $k_T = 80$ W/m · K.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A \frac{\Delta T}{L} = (80\ \mathrm{W/m \cdot K})(0.50\ \mathrm{m^2})\left(\frac{10\ ^\circ\mathrm{C}}{0.02\ \mathrm{m}}\right) = 20\ \mathrm{kJ/s}$$

19.2 [I] Una placa de metal de 4.00 mm de espesor tiene una diferencia de temperatura entre sus dos caras de 32.0 °C. Transmite 200 kcal/h a través de un área de 5.00 cm^2. Calcule la conductividad térmica del metal en W/m · K.

$$k_T = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\,\frac{L}{A(T_1 - T_2)} = \frac{(2.00 \times 10^5\ \mathrm{cal})(4.184\ \mathrm{J/cal})}{(1.00\ \mathrm{h})(3\,600\ \mathrm{s/h})}\,\frac{4.00 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}}{(5.00 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2})(32.0\ \mathrm{K})}$$
$$= 58.5\ \mathrm{W/m \cdot K}$$

19.3 [II] Dos placas de metal están soldadas una a la otra como se muestra en la figura 19-2. Se sabe que $A = 80$ cm^2, $L_1 = L_2 = 3.0$ mm, $T_1 = 100$ °C, $T_2 = 0$ °C. Para la placa de la izquierda, $k_{T1} = 48.1$ W/m · K; para la placa de la derecha, $k_{T2} = 68.2$ W/m · K. Calcule la tasa de flujo de calor a través de las placas y la temperatura T del empalme soldado.

Se suponen condiciones de equilibrio de modo que el flujo de calor a través de la placa 1 es igual al flujo de calor a través de la placa 2. Entonces

$$k_{T1} A \frac{T_1 - T}{L_1} = k_{T2} A \frac{T - T_2}{L_2}$$

Pero $L_1 = L_2$, así que se convierte en

$$k_{T1}(100\ ^\circ\mathrm{C} - T) = k_{T2}(T - 0\ ^\circ\mathrm{C})$$

de donde $$T = (100\ ^\circ\mathrm{C})\left(\frac{k_{T1}}{k_{T1} + k_{T2}}\right) = (100\ ^\circ\mathrm{C})\left(\frac{48.1}{48.1 + 68.2}\right) = 41.4\ ^\circ\mathrm{C}$$

Entonces, la tasa de flujo de calor es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_{T1} A \frac{T_1 - T}{L_1} = \left(48.1 \frac{W}{\mathrm{m \cdot K}}\right)(0.0080\ \mathrm{m^2})\frac{(100 - 41.4)\mathrm{K}}{0.0030\ \mathrm{m}} = 7.5\ \mathrm{kJ/s}$$

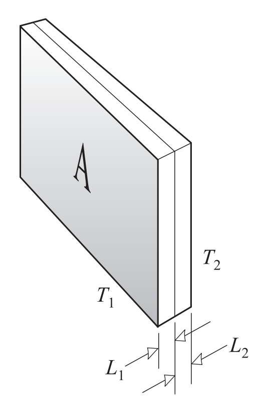


Figura 19-2

19.4 [II] Un enfriador de bebidas tiene la forma de un cubo de 42 cm de longitud en cada arista. Sus paredes, de 3.0 cm de espesor, están hechas de plástico ($k_T = 0.050$ W/m · K). Cuando la temperatura exterior es de 20 °C, ¿cuánto hielo se derrite dentro del enfriador cada hora?

Se necesita determinar la cantidad de calor dirigido hacia la caja. La caja cúbica tiene seis caras, cada una con un área de aproximadamente (0.42 m)^2. Entonces, de la ecuación $\Delta Q/\Delta t = k_T A \Delta T/L$ se tiene, con el hielo interior a 0 °C

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (0.050 \text{ W/m}\cdot\text{k})(0.42 \text{ m})^2(6)\left(\frac{20\,°\text{C}}{0.030 \text{ m}}\right) = 35.3 \text{ J/s} = 8.43 \text{ cal/s}$$

En una hora, $\Delta Q = (60)^2(8.43) = 30\,350$ cal. Para derretir 1.0 g de hielo se requieren 80 cal, así que la masa de hielo fundido en una hora es

$$m = \frac{30\,350 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g}} = 0.38 \text{ kg}$$

19.5 [III] Un tubo de cobre (longitud, 3.0 m; diámetro interior, 1.500 cm; diámetro exterior, 1.700 cm) se extiende a través de un tanque de 3.0 m de largo por el que circula agua rápidamente y que se mantiene a 20 °C. Por el interior del tubo circula vapor de agua a 100 °C. *a*) ¿Cuál es la tasa de flujo de calor desde el vapor hacia el tanque? *b*) ¿Cuánto vapor se condensa por minuto? Para el cobre, $k_T = 1.0$ cal/s · cm · °C.

Para determinar la tasa a la que el calor fluye por la pared del tubo, aproxímelo como lámina delgada. Como el espesor del tubo es mucho más pequeño que su radio, el área de la superficie interior del tubo,

$$2\pi r_i L = 2\pi(0.750 \text{ cm})(300 \text{ cm}) = 1\,410 \text{ cm}^2$$

aproximadamente es igual al área de la superficie exterior,

$$2\pi r_o L = 2\pi(0.850 \text{ cm})(300 \text{ cm}) = 1\,600 \text{ cm}^2$$

Como una aproximación, se puede considerar al tubo como una placa de 0.100 cm de espesor y un área dada por

$$A = \tfrac{1}{2}(1\,410 \text{ cm}^2 + 1\,600 \text{ cm}^2) = 1\,500 \text{ cm}^2$$

a)
$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = k_T A \frac{\Delta T}{L} = \left(1.0 \frac{\text{cal}}{\text{s}\cdot\text{cm}\cdot°\text{C}}\right)\frac{(1\,500 \text{ cm}^2)(80\,°\text{C})}{(0.100 \text{ cm})} = 1.2\times 10^6 \text{ cals/s}$$

b) En un minuto, el calor conducido desde el tubo es

$$\Delta Q = (1.2 \times 10^6 \text{ cal/s})(60 \text{ s}) = 72 \times 10^6 \text{ cal}$$

Para condensar 1.0 g de vapor a 100 °C se requieren 540 cal. Por tanto

$$\text{Vapor condensado por minuto} = \frac{72\times 10^6 \text{ cal}}{540 \text{ cal/g}} = 13.3 \times 10^4 \text{ g} = 1.3\times 10^2 \text{ kg}$$

En la práctica, varios factores reducirán considerablemente este valor teórico.

19.6 [I] *a*) Calcule el valor *R* para una pared constituida por las siguientes capas: bloque de concreto ($R = 1.93$), una tabla de aislante de 1.0 pulgada ($R = 4.3$) y una pared seca de 0.50 pulgadas ($R = 0.45$), todo en unidades usuales de Estados Unidos. *b*) Si la pared tiene un área de 15 m^2, calcule el flujo de calor por hora a través de la pared cuando la temperatura justo afuera es 20 °C menor que la del interior.

a)
$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_N = 1.93 + 4.3 + 0.45 = 6.7$$

expresado en unidades estadounidenses usuales. Usando el hecho de que 1 unidad estadounidense usual de $R = 0.176$ m^2 · K/W, se obtiene $R = 1.18$ m^2 · K/W.

b)
$$\Delta Q = \frac{A\,\Delta T}{R}(\Delta t) = \frac{(15 \text{ m}^2)(20\,°\text{C})}{1.18 \text{ m}^2\cdot\text{K/W}}(3\,600 \text{ s}) = 0.915 \text{ MJ} = 2.2\times 10^2 \text{ kcal}$$

19.7 [I] Un cuerpo esférico de 2.0 cm de diámetro se mantiene a 600 °C. Si supone que radia como si fuera un cuerpo negro, ¿a qué tasa (en watts) se radia energía desde la esfera?

$$A = \text{área de la superficie} = 4\pi r^2 = 4\pi(0.01 \text{ m})^2 = 1.26\times 10^{-3} \text{ m}^2$$
$$\text{P} = A\sigma T^4 = (1.26\times 10^{-3} \text{ m}^2)(5.67\times 10^{-8} \text{ W/m}^2\cdot\text{K}^4)(873 \text{ K})^4 = 41 \text{ W}$$

19.8 [I] Una persona desnuda cuyo cuerpo tiene un área superficial de 1.40 m^2 con una emisividad de 0.85 tiene una temperatura en la piel de 37 °C y está parada en una habitación a 20 °C. ¿Cuánta energía por minuto pierde la persona a través de la radiación?

Energía es potencia (P) multiplicada por el tiempo (Δt). De $P = \epsilon A\sigma(T^4 - T_e^4)$ se tiene la pérdida de energía

$$\epsilon A\sigma(T^4 - T_e^4)\Delta t = (0.85)(1.40\text{m}^2)(\sigma)(T^4 - T_e^4)(60 \text{ s})$$

Con $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W/m$^2 \cdot$ K^4, $T = 273 + 37 = 310$ K y $T_e = 273 + 20 = 293$ K, se obtiene una pérdida de energía de

$$7.6 \text{ kJ} = 1.80 \text{ kcal}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

19.9 [I] ¿Qué gradiente de temperatura debe existir en una barra de aluminio para que transmita 8.0 cal por segundo por cm^2 de sección transversal a lo largo de la barra? k_T para el aluminio es 210 W/K · m.
Resp. 16 °C/cm.

19.10 [I] En una casa, el vidrio de una ventana tiene en realidad capas de aire estancado en sus dos superficies. Pero si no existieran, ¿cuánto calor fluiría hacia afuera por una ventana de 80 cm × 40 cm × 3.0 mm cada hora, en un día cuando la temperatura exterior fuera precisamente de 0 °C y la del interior de 18 °C? Para el vidrio, k_T es 0.84 W/K · m. **Resp.** 1.4×10^3 kcal/h.

19.11 [I] ¿Cuántos gramos de agua a 100 °C se pueden evaporar por hora por cm^2 debido al calor transmitido a través de una placa de acero de 0.20 cm de espesor, si la diferencia de temperatura entre las caras de la placa es de 100 °C? Para el acero, k_T es 42 W/K · m. **Resp.** 0.33 kg/h · cm^2.

19.12 [II] Una ventana de doble bastidor consiste en dos hojas de vidrio, cada una de 80 cm × 80 cm × 0.30 cm, separadas por un espacio de 0.30 cm de aire estancado. La temperatura de la superficie interior es de 20 °C, mientras que la temperatura de la superficie exterior es de exactamente 0 °C. ¿Cuánto calor fluye a través de la ventana por segundo? $k_T = 0.84$ W/K · m para el vidrio y aproximadamente 0.080 W/K · m para el aire.
Resp. 69 cal/s.

19.13 [II] Un agujero pequeño en un horno actúa como un cuerpo negro. Su área es de 1.00 cm^2 y su temperatura es la misma que la del interior del horno, 1 727 °C. ¿Cuántas calorías se radian hacia fuera del agujero en cada segundo? **Resp.** 21.7 cal/s.

19.14 [I] El filamento de una lámpara incandescente tiene un área de 50 mm^2 y opera a una temperatura de 2127 °C. Suponga que toda la energía suministrada al bulbo es radiada por él. Si la emisividad del filamento es 0.83, ¿cuánta potencia se debe suministrar al bulbo cuando está en operación? **Resp.** 78 W.

19.15 [I] Una esfera de 3.0 cm de radio actúa como un cuerpo negro. Está en equilibrio con sus alrededores y absorbe 30 kW de la potencia radiada por los alrededores. ¿Cuál es la temperatura de la esfera?
Resp. 2.6×10^3 K.

19.16 [II] Una placa de bronce de 2.0 cm de espesor ($k_T = 105$ W/K · m) está sellada a una hoja de vidrio ($k_T = 0.80$ W/K · m). Ambas tienen la misma área. La cara expuesta de la placa de bronce está a 80 °C, mientras que la cara expuesta del vidrio está a 20 °C. ¿Cuál es el espesor del vidrio si la interfaz vidrio-bronce está a 65 °C?
Resp. 0.46 mm.

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA 20

CALOR (ΔQ) es la energía térmica que fluye de un cuerpo o sistema a otro, con el que está en contacto, debido a la diferencia de sus temperaturas. El calor siempre fluye del cuerpo más caliente al más frío (es decir, de la temperatura más alta a la temperatura más baja). Para que dos objetos en contacto estén en equilibrio térmico mutuo (es decir, para que no haya transferencia neta de calor de uno a otro), sus temperaturas deben ser la misma. Si cada uno de estos dos objetos está en equilibrio térmico con un tercero, entonces los dos están en equilibrio térmico entre sí. (A este hecho con frecuencia se le refiere como la **Ley Cero** de la termodinámica.)

LA ENERGÍA INTERNA (U) de un sistema es la energía total contenida en el sistema. Es la suma de todas las formas de energía que poseen los átomos y moléculas del sistema.

EL TRABAJO EFECTUADO POR UN SISTEMA (ΔW) es positivo si por ello el sistema pierde energía hacia sus alrededores. Cuando los alrededores efectúan trabajo *sobre* el sistema, de modo que le proporcionan energía, ΔW es una cantidad negativa. En una pequeña expansión ΔV, un fluido a presión constante P efectúa un trabajo dado por

$$\Delta W = P\Delta V$$

LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA es una afirmación de la ley de la conservación de la energía. Establece que, si una cantidad de calor ΔQ fluye dentro de un sistema, entonces esta energía debe aparecer como un incremento de la energía interna ΔU del sistema y/o como un trabajo ΔW efectuado por el sistema sobre sus alrededores. Representada en una ecuación, la primera ley es

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

UN PROCESO ISOBÁRICO es un proceso que se realiza a *presión constante*.

UN PROCESO ISOVOLUMÉTRICO es un proceso que se realiza a *volumen constante*. Cuando un gas experimenta dicho proceso,

$$\Delta W = P\Delta V = 0$$

y así la primera ley de la termodinámica se vuelve

$$\Delta Q = \Delta U$$

Cualquier calor que fluya dentro del sistema aparece como un incremento en la energía interna del sistema.

UN PROCESO ISOTÉRMICO es un proceso a *temperatura constante*. En el caso de un gas ideal donde los átomos o moléculas constituyentes no interactúan, $\Delta U = 0$ en un proceso isotérmico. Sin embargo, para muchos otros sistemas esta condición no se cumple. Por ejemplo, $\Delta U \neq 0$ cuando el hielo se funde a 0 ºC, aun cuando el proceso sea isotérmico.

Para un gas ideal, $\Delta U = 0$ en un cambio isotérmico y por consiguiente la primera ley de la termodinámica es

$$\Delta Q = \Delta W \quad \text{(gas ideal)}$$

Para un gas ideal que cambia isotérmicamente de (P_1, V_1) a (P_2, V_2), donde $P_1V_1 = P_2V_2$,

$$\Delta Q = \Delta W = P_1V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Aquí, ln es el logaritmo de base e.

UN PROCESO ADIABÁTICO es aquel en el que no se transfiere calor hacia o desde el sistema. Para este caso, $\Delta Q = 0$. Por consiguiente, en un proceso adiabático, la primera ley queda:

$$0 = \Delta U + \Delta W$$

Cualquier trabajo que el sistema realice se efectúa a expensas de su energía interna. Cualquier trabajo realizado sobre el sistema sirve para incrementar su energía interna.

Para un gas ideal que cambia sus condiciones de (P_1, V_1, T_1) a (P_2, V_2, T_2) en un proceso adiabático,

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma} \qquad \text{y} \qquad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

donde $\gamma = c_p/c_v$ se analiza más adelante.

CALOR ESPECÍFICO DE LOS GASES: Cuando un gas se calienta *a volumen constante*, el calor suministrado se traduce en un incremento de la energía interna de las moléculas del gas. Pero cuando un gas se calienta *a presión constante*, el calor suministrado no sólo aumenta la energía interna de las moléculas, sino que también efectúa trabajo mecánico al expandir el gas contra la presión constante que se le opone. De aquí que el calor específico de un gas a presión constante, c_p, sea mayor que su calor específico a volumen constante, c_v. Puede demostrarse que, para un gas ideal de masa molecular *M*,

$$c_p - c_v = \frac{R}{M} \qquad \text{(gas ideal)}$$

donde *R* es la constante universal de los gases. En el SI, $R = 8\,314$ J/kmol · K y *M* está en kg/kmol; entonces c_p y c_v deben estar en J/kg · K = J/kg · ºC. Algunas personas utilizan $R = 1.98$ cal/mol · ºC y *M* en g/mol, en cuyo caso c_p y c_v están en cal/g · ºC.

RAZÓN DE CALOR ESPECÍFICO ($\gamma = c_p/c_v$)**:** Como se vio anteriormente, esta razón es mayor que la unidad para un gas. La teoría cinética de los gases indica que, para gases monoatómicos (por ejemplo, He, Ne, Ar), $\gamma = 1.67$. Para los gases diatómicos (aquellos que están firmemente ligados como O_2 y N_2), $\gamma = 1.40$ a temperaturas ordinarias.

EL TRABAJO ESTÁ RELACIONADO CON EL ÁREA en un diagrama *P-V*. El trabajo efectuado por un fluido en una expansión es igual al área bajo la curva de expansión en un diagrama *P-V*.

En un proceso cíclico, el trabajo generado por cada ciclo efectuado por un fluido es igual al área encerrada por el diagrama *P-V* que representa al ciclo.

LA EFICIENCIA DE UNA MÁQUINA TÉRMICA se define como

$$\text{eficiencia} = \frac{\text{salida de trabajo}}{\text{entrada de calor}}$$

El **ciclo de Carnot** es el ciclo más eficiente posible para una máquina térmica. Una máquina que opera de acuerdo con este ciclo entre un depósito caliente (T_c) y un depósito frío (T_f) tiene una eficiencia

$$\text{Eficiencia}_{\text{máx}} = 1 \; \frac{T_f}{T_c}$$

En esta ecuación deben usarse temperaturas Kelvin.

PROBLEMAS RESUELTOS

20.1 [I] En cierto proceso, 8.00 kcal de calor se suministran a un sistema mientras éste efectúa un trabajo de 6.00 kJ. ¿En cuánto cambió la energía interna del sistema durante el proceso?

Se tiene

$$\Delta Q = (8\,000 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) = 33.5 \text{ kJ} \qquad \text{y} \qquad \Delta W = 6.00 \text{ kJ}$$

Por consiguiente, de la primera ley $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$,

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 33.5 \text{ kJ} - 6.00 \text{ kJ} = 27.5 \text{ kJ}$$

20.2 [I] El calor específico del agua es de 4 184 J/kg · K. ¿En cuántos joules cambia la energía interna de 50 g de agua cuando se calienta desde 21 ºC hasta 37 ºC? Suponga que la dilatación del agua es despreciable.

El calor añadido para aumentar la temperatura del agua es

$$\Delta Q = cm\,\Delta T = (4\,184 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(0.050 \text{ kg})(16 \text{ ºC}) = 3.4 \times 10^3 \text{ J}$$

Observe que ΔT en grados Celsius es igual a ΔT en kelvins. Si se desprecia la ligera dilatación del agua, ningún trabajo se realizó sobre los alrededores, por lo que $\Delta W = 0$. Entonces, la primera ley, $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, implica

$$\Delta U = \Delta Q = 3.4 \text{ kJ}$$

20.3 [I] ¿En cuánto cambia la energía interna de 5.0 g de hielo a exactamente 0 ºC al transformarse en agua a 0 ºC? Desprecie el cambio en el volumen.

El calor necesario para fundir el hielo es

$$\Delta Q = mL_f = (5.0 \text{ g})(80 \text{ cal/g}) = 400 \text{ cal}$$

El hielo no realiza trabajo al fundirse, por lo que $\Delta W = 0$. Entonces, de la primera ley, $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$, implica que

$$\Delta U = \Delta Q = (400 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) = 1.7 \text{ kJ}$$

20.4 [II] Un resorte ($k = 500$ N/m) soporta una masa de 400 g que está sumergida en 900 g de agua. El calor específico de la masa es de 450 J/kg · K. El resorte se estira 15 cm y, después de llegar al equilibrio térmico, la masa se libera de modo que vibra arriba y abajo. ¿Cuánto cambia la temperatura del agua cuando cesan las vibraciones?

La energía almacenada en el resorte se disipa por los efectos de fricción y calienta el agua y la masa. La energía almacenada en el resorte estirado es

$$\text{EP}_e = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(500 \text{ N/m})(0.15 \text{ m})^2 = 5.625 \text{ J}$$

Esta energía aparece como energía térmica que fluye dentro del agua y la masa. Al usar $\Delta Q = cm\,\Delta T$, se tiene

$$5.625 \text{ J} = (4\,184 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(0.900 \text{ kg})\,\Delta T + (450 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(0.40 \text{ kg})\,\Delta T$$

con lo cual

$$\Delta T = \frac{5.625 \text{ J}}{3\,950 \text{ J/K}} = 0.0014 \text{ K}$$

20.5 [II] Encuentre ΔW y ΔU para un cubo de hierro de 6.0 cm de lado, cuando se calienta de 20 ºC hasta 300 ºC a presión atmosférica. Para el hierro, $c = 0.11$ cal/g · ºC y el coeficiente volumétrico de dilatación térmica es de 3.6×10^{-5} ºC^{-1}. La masa del cubo es de 1 700 g.

Dado que $\Delta T = 300\text{ °C} - 20\text{ °C} = 280\text{ °C}$,

$$\Delta Q = cm\,\Delta T = (0.11 \text{ cal/g} \cdot \text{ºC})(1\,700 \text{ g})(280 \text{ ºC}) = 52 \text{ kcal}$$

Para encontrar el trabajo realizado por la expansión del cubo se necesita determinar ΔV.
El volumen del cubo es $V = (6.0 \text{ cm})^3 = 216 \text{ cm}^3$. Al usar $(\Delta V)/V = \beta\Delta T$ se obtiene

$$\Delta V = V\beta\Delta T = (216 \times 10^{-6} \text{ m}^3)(3.6 \times 10^{-5} \text{ ºC}^{-1})(280 \text{ ºC}) = 2.18 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

Entonces, si supone que la presión atmosférica es de 1.0×10^5 Pa, se tiene

$$\Delta W = P\Delta V = (1.0 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(2.18 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.22 \text{ J}$$

Pero la primera ley establece que

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (52\ 000 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) - 0.22 \text{ J}$$
$$= 218\ 000 \text{ J} - 0.22 \text{ J} \approx 2.2 \times 10^5 \text{ J}$$

Observe cuán pequeño es el trabajo de expansión que se realiza contra la atmósfera en comparación con ΔU y ΔQ. Cuando se trata con líquidos y sólidos, con frecuencia ΔW puede despreciarse.

20.6 [II] Un motor suministra una potencia de 0.4 hp para agitar 5 kg de agua. Si supone que todo el trabajo calienta el agua por pérdidas de fricción, ¿cuánto tiempo tomará aumentar la temperatura del agua 6 ºC?

El calor requerido para calentar el agua es

$$\Delta Q = mc\,\Delta T = (5\ 000 \text{ g})(1 \text{ cal/g}\cdot\text{ºC})(6 \text{ ºC}) = 30 \text{ kcal}$$

Esto en realidad lo suministra el trabajo de la fricción, así que

$$\text{Trabajo efectuado por la fricción} = \Delta Q = (30 \text{ kcal})(4.184 \text{ J/cal}) = 126 \text{ kJ}$$

y esto iguala el trabajo hecho por el motor. Pero

$$\text{Trabajo realizado por el motor en un tiempo } t = (\text{potencia})(t) = (0.4 \text{ hp} \times 746 \text{ W/hp})(t)$$

Al igualar esto con el valor previo del trabajo efectuado, se obtiene

$$t = \frac{1.26 \times 10^5 \text{ J}}{(0.4 \times 746) \text{ W}} = 420 \text{ s} = 7 \text{ min}$$

20.7 [I] En cada una de las siguientes situaciones, determine el cambio en la energía interna del sistema. *a*) Un sistema absorbe 500 cal de calor y al mismo tiempo realiza un trabajo de 400 J. *b*) Un sistema absorbe 300 cal mientras sobre él se efectúa un trabajo de 420 J. *c*) Mil doscientas calorías se eliminan de un gas que se mantiene a volumen constante. Proporcione sus respuestas en kilojoules.

a) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (500 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) - 400 \text{ J} = 1.69 \text{ kJ}$$

b) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (300 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) - (-420 \text{ J}) = 1.68 \text{ kJ}$$

c) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = (-1\ 200 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal}) - 0 = -5.02 \text{ kJ}$$

Observe que ΔQ es positivo cuando se añade calor al sistema y ΔW es positivo cuando el sistema realiza un trabajo. En los casos opuestos, ΔQ y ΔW se deben tomar como negativos.

20.8 [I] Para cada uno de los siguientes procesos adiabáticos, determine el cambio en la energía interna. *a*) Un gas efectúa un trabajo de 5 J mientras se expande adiabáticamente. *b*) Durante una compresión adiabática, se realiza un trabajo de 80 J sobre un gas.

Durante un proceso adiabático no hay transferencia de calor hacia o desde el sistema.

a) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 0 - 5\text{J} = -5 \text{ J}$$

b) $$\Delta U = \Delta Q - \Delta W = 0 - (-80 \text{ J}) = +80 \text{ J}$$

20.9 [III] La temperatura de 5.00 kg de gas nitrógeno se eleva desde 10.0 ºC hasta 130.0 ºC. Si esto se realiza a volumen constante, determine el aumento en energía interna ΔU. De manera alternativa, si el mismo cambio de temperatura ahora ocurre a presión constante, determine tanto ΔV como el trabajo externo ΔW que realiza el gas. Para gas N_2, $c_v = 0.177$ cal/g · ºC y $c_p = 0.248$ cal/g · ºC.

Si el gas se calienta a volumen constante, entonces no se realiza trabajo durante el proceso. En ese caso $\Delta W = 0$, y la primera ley dice que $(\Delta Q)_v = \Delta U$. Dado que $(\Delta Q)_v = c_v m\,\Delta T$, se obtiene

$$\Delta U = (\Delta Q)_v = (0.177 \text{ cal/g}\cdot\text{ºC})(5\ 000 \text{ g})(120 \text{ ºC}) = 106 \text{ kcal} = 443 \text{ kJ}$$

El cambio en la temperatura es una manifestación del cambio en la energía interna.

Cuando el gas se calienta 120 ºC a presión constante, ocurre el mismo cambio en la energía interna. Sin embargo, además se realiza trabajo. Entonces la primera ley se convierte en

$$(\Delta Q)_p = \Delta U + \Delta W = 443 \text{ kJ} + \Delta W$$

Pero

$$(\Delta Q)_p = c_p m\,\Delta T = (0.248 \text{ cal/g} \cdot ºC)(5\,000 \text{ g})(120\ ºC)$$
$$= 149 \text{ kcal} = 623 \text{ kJ}$$

Por tanto

$$\Delta W = (\Delta Q)_p - \Delta U = 623 \text{ kJ} - 443 \text{ kJ} = 180 \text{ kJ}$$

20.10 [II] Un kilogramo de vapor a 100 ºC y 101 kPa ocupa 1.68 m^3. *a*) ¿Qué fracción del calor de vaporización del agua observado se considera para la expansión del agua en vapor? *b*) Determine el aumento en energía interna de 1.00 kg de agua cuando se vaporiza a 100 ºC.

a) Un kilogramo de agua se expande de 1 000 cm^3 a 1.68 m^3, así que $\Delta V = 1.68 - 0.001 \approx 1.68$ m^3. Por tanto, el trabajo realizado en la expansión es de

$$\Delta W = P\Delta V = (101 \times 10^3 \text{ N/m}^2)(1.68 \text{ m}^3) = 169 \text{ kJ}$$

El calor de vaporización del agua es de 540 cal/g, es decir, 2.26 MJ/kg. Entonces la fracción requerida es

$$\frac{\Delta W}{mL_v} = \frac{169 \text{ kJ}}{(1.00 \text{ kg})(2\,260 \text{ kJ/kg})} = 0.0748$$

b) De la primera ley, $\Delta U = \Delta Q - \Delta W$, por tanto

$$\Delta U = 2.26 \times 10^6 \text{ J} - 0.169 \times 10^6 \text{ J} = 2.07 \text{ MJ}$$

20.11 [I] Para el gas nitrógeno, $c_v = 740$ J/kg · K. Si supone que se comporta como un gas ideal, determine su calor específico a presión constante. (La masa molecular del gas nitrógeno es 28.0 kg/kmol.)

Método 1

$$c_p = c_v + \frac{R}{M} = \frac{740 \text{ J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} + \frac{8\,314 \text{ J/kmol} \cdot \text{K}}{28.0 \text{ kg/kmol}} = 1.04 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$$

Método 2

Dado que N_2 es un gas diatómico, y puesto que $\gamma = c_p/c_v = 1.40$ para tal gas,

$$c_p = 1.40c_v = 1.40(740 \text{ J/kg} \cdot \text{K}) = 1.04 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$$

20.12 [I] ¿Cuánto trabajo realiza un gas ideal al expandirse isotérmicamente desde un volumen inicial de 3.00 litros a 20.0 atm, hasta un volumen final de 24.0 litros?

Para la expansión isotérmica de un gas ideal,

$$\Delta W = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$
$$= (20.0 \times 1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(3.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3) \ln\left(\frac{24.0}{3.00}\right) = 12.6 \text{ kJ}$$

20.13 [I] El diagrama *P-V* de la figura 20-1 se aplica a un gas que experimenta un cambio cíclico en un sistema pistón-cilindro. ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas *a*) en la porción *AB* del ciclo? *b*) ¿En la porción *BC*? *c*) ¿En la porción *CD*? *d*) ¿En la porción *DA*?

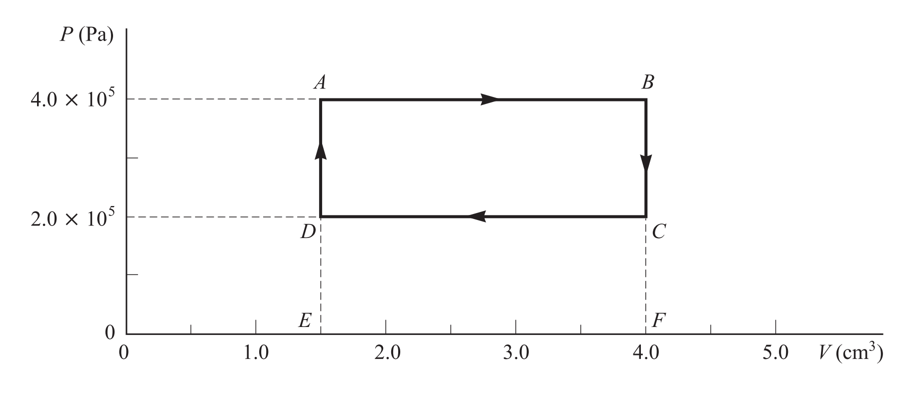


Figura 20-1

En una expansión, el trabajo efectuado es igual al área bajo la porción pertinente de la curva *P-V*. En contracciones, el trabajo es numéricamente igual al área, pero es negativo.

a) $$\text{Trabajo} = \text{área } ABFEA = [(4.0 - 1.5) \times 10^{-6}\ \text{m}^3](4.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2) = 1.0\ \text{J}$$

b) $$\text{Trabajo} = \text{área bajo } BC = 0$$

En la porción *BC*, el volumen no cambia; por tanto $P\Delta V = 0$.

c) Ésta es una contracción, ΔV es negativo y por tanto el trabajo es negativo:

$$\text{Trabajo} = -(\text{área } CDEFC) = -(2.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)(2.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2) = -0.50\ \text{J}$$

d) $$\text{Trabajo} = 0$$

20.14[I] Para el ciclo termodinámico que se muestra en la figura 20-1, determine *a*) el trabajo neto generado por el gas durante el ciclo y *b*) el flujo neto de calor hacia el interior del gas por ciclo.

Método 1

a) Del problema 20.13, el trabajo neto efectuado es 1.0 J − 0.50 J = 0.5 J.

Método 2

El trabajo neto efectuado es igual al área encerrada por el diagrama *P-V*:

$$\text{Trabajo} = \text{área } ABCDA = (2.0 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(2.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^3) = 0.50\ \text{J}$$

b) Suponga que el ciclo inicia en el punto *A*. El gas regresa a este punto al final del ciclo, así que no hay diferencia en el gas en sus puntos inicial y final. Por tanto, para un ciclo completo, ΔU es cero. Si se aplica la primera ley de la termodinámica al ciclo completo, se tiene

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 0 + 0.50\ \text{J} = 0.50\ \text{J} = 0.12\ \text{cal}$$

20.15 [I] ¿Cuál es el trabajo neto generado por ciclo para el ciclo termodinámico que se muestra en la figura 20-2?

Se sabe que el trabajo neto producido por ciclo es igual al área encerrada por el diagrama *P-V*. Se estima que en el área *ABCA* hay 22 cuadrados, cada uno de área

$$(0.5 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(0.1\ \text{m}^3) = 5\ \text{kJ}$$

Por tanto,

$$\text{Área encerrada por ciclo} \approx (22)(5\ \text{kJ}) = 1 \times 10^2\ \text{kJ}$$

De donde el trabajo neto generado por ciclo es igual a 1×10^2 kJ.

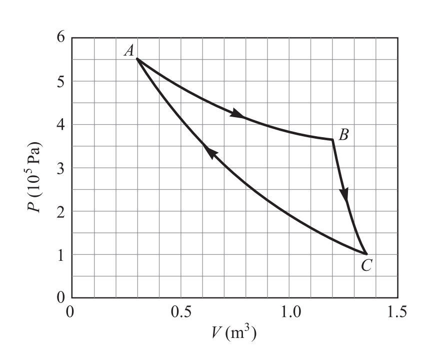


Figura 20-2

20.16 [II] Veinte centímetros cúbicos de un gas monoatómico a 12 ºC y 100 kPa se comprimen súbita y adiabáticamente a 0.50 cm^3. Suponga que se trata de un gas ideal. ¿Cuáles son sus nuevas presión y temperatura?

Para un cambio adiabático que afecta a un gas ideal $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$, donde $\gamma = 1.67$ para un gas monoatómico. En consecuencia

$$P_2 = P_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\gamma = (1.00 \times 10^5\ \text{N/m}^2)\left(\frac{20}{0.50}\right)^{1.67} = 4.74 \times 10^7\ \text{N/m}^2 = 47\ \text{MPa}$$

Para calcular la temperatura final podría usarse $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$. En vez de ello, se usará

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

o

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = (285\ \text{K})\left(\frac{20}{0.50}\right)^{0.67} = (285\ \text{K})(11.8) = 3.4 \times 10^3\ \text{K}$$

A modo de verificación,

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

$$\frac{(1 \times 10^5\ \text{N/m}^2)(20\ \text{cm}^3)}{285\ \text{K}} = \frac{(4.74 \times 10^7\ \text{N/m}^2)(0.50\ \text{cm}^3)}{3\,370\ \text{K}}$$

$$7000 = 7\,000\ ✓$$

20.17 [I] Calcule la máxima eficiencia posible de una máquina térmica que opera entre las temperaturas límite de 100 ºC y 400 ºC.

Recuerde que las ecuaciones termodinámicas se expresan en términos de temperatura absoluta. La máquina más eficiente es la de Carnot, para la cual

$$\text{Eficiencia} = \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{373\ \text{K}}{673\ \text{K}} = 0.446 = 44.6\%$$

20.18 [II] Una máquina de vapor que opera entre una temperatura de caldera de 220 ºC y una temperatura de condensador de 35.0 ºC desarrolla una potencia de 8.00 hp. Si su eficiencia es de 30.0% de la de una máquina de Carnot que opera entre esos límites de temperatura, ¿cuántas calorías por segundo absorbe la caldera? ¿Cuántas calorías se eliminan del condensador cada segundo?

$$\text{Eficiencia real} = (0.30)(\text{eficiencia de Carnot}) = (0.300)\left(1 - \frac{308\ \text{K}}{493\ \text{K}}\right) = 0.113$$

Se puede determinar el calor de entrada a partir de la relación para la eficiencia

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{calor de entrada}}$$

y por tanto cada segundo

$$\text{Calor de entrada/s} = \frac{\text{trabajo de salida/s}}{\text{eficiencia}} = \frac{(8.00\ \text{hp})(746\ \text{W/hp})\left(\frac{1.00\ \text{cal/s}}{4.184\ \text{W}}\right)}{0.113} = 12.7\ \text{kcal/s}$$

Para calcular la energía eliminada por el condensador, se aplica la ley de conservación de la energía

$$\text{energía de entrada} = (\text{trabajo generado}) + (\text{energía eliminada})$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\text{energía eliminada/s} &= (\text{energía de entrada/s}) - (\text{trabajo generado/s})\\ &= (\text{energía de entrada})/\text{s} - (\text{energía de entrada/s})(\text{eficiencia})\\ &= (\text{energía de entrada/s})[1 - (\text{eficiencia})]\\ &= (12.7\ \text{kcal/s})(1 - 0.113) = 11.3\ \text{kcal/s}\end{aligned}$$

20.19 [II] Tres kilomoles (6.00 kg) de gas hidrógeno a TPE se expanden isobáricamente al doble de su volumen. *a*) ¿Cuál es la temperatura final del gas? *b*) ¿Cuál es el trabajo de expansión efectuado por el gas? *c*) ¿Cuánto cambió la energía interna del gas? *d*) ¿Cuánto calor entró al gas durante la expansión? Para el H_2, $c_v = 10.0 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$. Suponga que el hidrógeno se comportará como un gas ideal.

a) A partir de $P_1V_1/T_1 = P_2V_2/T_2$ con $P_1 = P_2$,

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = (273 \text{ K})(2.00) = 546 \text{ K}$$

b) Puesto que 1 kmol a TPE ocupa 22.4 m^3, se tiene $V_1 = 67.2 \text{ m}^3$. Entonces

$$\Delta W = P\Delta V = P(V_2 - V_1) = (1.01 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(67.2 \text{ m}^3) = 6.8 \text{ MJ}$$

c) Para elevar la temperatura de este gas ideal por 273 K a volumen constante se requiere

$$\Delta Q = c_v m \,\Delta T = (10.0 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K})(6.00 \text{ g})(273 \text{ K}) = 16.4 \text{ MJ}$$

Como aquí el volumen es constante, no hay trabajo y ΔQ es igual a la energía interna que debe agregarse a los 6.00 kg de H_2 para cambiar su temperatura de 273 K a 546 K. Por tanto, $\Delta U = 16.4$ MJ.

d) El sistema obedece la primera ley durante el proceso y, en consecuencia,

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = 16.4 \text{ MJ} + 6.8 \text{ MJ} = 23.2 \text{ MJ}$$

20.20 [II] Un cilindro que contiene un gas ideal está cerrado por un pistón móvil de 8.00 kg (área = 60.0 cm^2), como se muestra en la figura 20-3. La presión atmosférica es de 100 kPa. Cuando el gas se calienta desde 30.0 ºC hasta 100.0 ºC, el pistón se eleva 20.0 cm. Entonces el pistón se asegura en ese lugar y el gas se enfría nuevamente a 30.0 ºC. Sea ΔQ_1 el calor agregado al gas en el proceso de calentamiento y ΔQ_2 el calor perdido durante el enfriamiento. Encuentre la diferencia entre ΔQ_1 y ΔQ_2.

Durante el proceso de calentamiento, la energía interna cambia por ΔU_1, y se efectúa un trabajo ΔW_1. La presión absoluta del gas fue

$$P = \frac{mg}{A} + P_A$$

$$P = \frac{(8.00)(9.81) \text{ N}}{60.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2} + 1.00 \times 10^5 \text{ N/m}^2 = 1.13 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

Por tanto,

$$\Delta Q_1 = \Delta U_1 + \Delta W_1 = \Delta U_1 + P\,\Delta V$$
$$= \Delta U_1 + (1.13 \times 10^5 \text{ N/m}^2)(0.200 \times 60.0 \times 10^{-4} \text{ m}^3) = \Delta U_1 + 136 \text{ J}$$

Durante el proceso de enfriamiento, $\Delta W = 0$ y en consecuencia (ya que ΔQ_2 es *pérdida* de calor)

$$-\Delta Q_2 = \Delta U_2$$

Pero el gas ideal regresa a su temperatura original, y por ello su energía interna es la misma que al principio. Por consiguiente, $\Delta U_2 = -\Delta U_1$, o $\Delta Q_2 = \Delta U_1$. Así pues, ΔQ_1 excede a ΔQ_2 por 136 J = 32.5 cal.

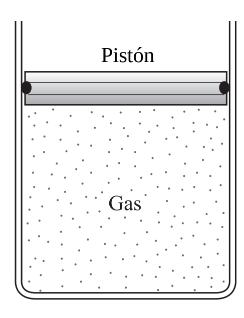


Figura 20-3

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

20.21 [I] Un bloque metálico de 2.0 kg ($c = 0.137$ cal/g · ºC) se calienta de 15 ºC a 90 ºC. ¿En cuánto cambió su energía interna? **Resp.** 86 kJ.

20.22 [I] ¿En cuánto cambia la energía interna de 50 g de aceite ($c = 0.32$ cal/g · ºC) cuando el aceite se enfría de 100 ºC a 25 ºC? **Resp.** −1.2 kcal.

20.23 [II] Un bloque metálico de 70 g que se mueve a 200 cm/s resbala sobre la superficie de una mesa a lo largo de una distancia de 83 cm antes de alcanzar el reposo. Si supone que 75% de la energía térmica producida por la fricción va hacia el bloque, ¿en cuánto se eleva la temperatura del bloque? Para el metal, $c = 0.106$ cal/g · ºC. **Resp.** 3.4×10^{-3} ºC.

20.24 [II] Si cierta masa de agua cae una distancia de 854 m y toda la energía se aprovecha para calentar el agua, ¿cuál será el aumento de temperatura del agua? **Resp.** 2.00 ºC.

20.25 [II] ¿Cuántos joules de calor por hora produce un motor con una eficiencia de 75.0% y que requiere de una potencia de 0.250 hp para funcionar? *Resp*. 168 KJ.

20.26 [II] Una bala de 100 g ($c = 0.030$ cal/g · ºC) está inicialmente a 20 ºC. Se dispara en línea recta hacia arriba con una rapidez de 420 m/s, y en su regreso al punto de partida choca con un bloque de hielo a 0 ºC. ¿Cuánto hielo se funde? Desprecie la fricción con el aire. **Resp.** 26 g.

20.27 [II] Para determinar el calor específico de un aceite, un calentador eléctrico en forma helicoidal se coloca dentro de un calorímetro con 380 g de aceite a 10 ºC. El calentador consume energía (y disipa calor) a razón de 84 W. Después de 3.0 min, la temperatura del aceite es de 40 ºC. Si el equivalente de agua del calorímetro y del calentador es de 20 g, ¿cuál es el calor específico del aceite? **Resp.** 0.26 cal/g · ºC.

20.28 [I] ¿Cuánto trabajo externo realiza un gas ideal cuando se expande de un volumen de 3.0 litros a uno de 30.0 litros contra una presión constante de 2.0 atm? **Resp.** 5.5 kJ.

20.29 [I] Conforme se calientan 3.0 litros de gas ideal a 27 ºC, se expande a una presión constante de 2.0 atm. ¿Cuánto trabajo realiza el gas conforme su temperatura cambia de 27 ºC a 227 ºC? **Resp.** 0.40 kJ.

20.30 [I] Un gas ideal se expande adiabáticamente hasta tres veces su volumen inicial. Para hacerlo, el gas efectúa un trabajo de 720 J. *a*) ¿Cuánto calor fluye desde el gas? *b*) ¿Cuál es el cambio en energía interna del gas? *c*) ¿Su temperatura sube o baja? **Resp.** *a*) no fluye calor; *b*) −720 J; *c*) baja la temperatura.

20.31 [I] Un gas ideal se expande a presión constante de 240 cmHg desde 250 cm^3 hasta 780 cm^3. Luego se le permite enfriarse a volumen constante hasta su temperatura inicial. ¿Cuál es el flujo neto de calor hacia el gas durante el proceso completo? **Resp.** 40.5 cal.

20.32 [I] Conforme un gas ideal se comprime isotérmicamente, el agente compresor realiza 36 J de trabajo sobre el gas. ¿Cuánto calor fluye desde el gas durante el proceso de compresión? **Resp.** 8.6 cal.

20.33 [II] El calor específico del aire a volumen constante es de 0.175 cal/g · ºC. *a*) ¿Cuál será el cambio de energía interna de 5.0 g de aire cuando se calienta de 20 ºC a 400 ºC? *b*) Suponga que 5.0 g de aire se comprimen adiabáticamente de tal forma que su temperatura aumenta de 20 ºC a 400 ºC. ¿Cuánto trabajo debe realizarse sobre el aire para comprimirlo? **Resp.** *a*) 0.33 kcal; *b*) 1.4 kJ o, puesto que el trabajo realizado sobre el sistema es negativo, −1.4 kJ.

20.34 [II] El agua hierve a 100 ºC y 1.0 atm. Bajo estas condiciones, 1.0 g de agua ocupa 1.0 cm^3, 1.0 g de vapor ocupa 1 670 cm^3 y $L_v = 540$ cal/g. Encuentre *a*) el trabajo externo efectuado cuando se forma 1.0 g de vapor a 100 ºC y *b*) el incremento en energía interna. **Resp.** *a*) 0.17 kJ; *b*) 0.50 kcal.

20.35 [II] La temperatura de 3.0 kg de gas criptón se eleva de −20 ºC a 80 ºC. *a*) Si esto se efectúa a volumen constante, calcule el calor agregado, el trabajo realizado y el cambio en energía interna. *b*) Repita el cálculo si el proceso de calentamiento se realiza a presión constante. Para el gas monoatómico Kr, c_v = 0.0357 cal/g · ºC y c_p = 0.059 5 cal/g · ºC. **Resp.** *a*) 11 kcal, 0, 45 kJ; *b*) 18 kcal, 30 kJ, 45 kJ.

20.36 [I] *a*) Calcule c_v para el gas monoatómico argón, dados c_p = 0.125 cal/g · ºC y γ = 1.67. *b*) Calcule c_p para el gas diatómico óxido nítrico (NO), dados c_p = 0.166 cal/g · ºC y γ = 1.40. **Resp.** *a*) 0.0749 cal/g · ºC; *b*) 0.232 cal/g · ºC

20.37 [I] Calcule el trabajo realizado en una compresión isotérmica de 30 litros de gas ideal a 1.0 atm, hasta un volumen de 3.0 litros. **Resp.** 7.0 kJ.

20.38 [II] Cinco moles de gas neón a 2.00 atm y 27 ºC se comprimen adiabáticamente a un tercio de su volumen inicial. Encuentre la presión y temperatura finales y el trabajo externo efectuado sobre el gas. Para el neón, γ =1.67, c_v = 0.148 cal/g · ºC y *M* = 20.18 kg/kmol. **Resp.** 1.27 MPa, 626 K, 20.4 kJ.

20.39 [II] Determine el trabajo efectuado por el gas al ir de *A* a *B* en el ciclo termodinámico que se muestra en la figura 20-2. Repita para la porción *CA*. Proporcione sus respuestas a una cifra significativa. **Resp.** 0.4 MJ, −0.3 MJ.

20.40 [II] Encuentre el trabajo neto efectuado por el ciclo termodinámico de la figura 20-4. Proporcione sus respuestas a dos cifras significativas. **Resp.** 2.1 kJ.

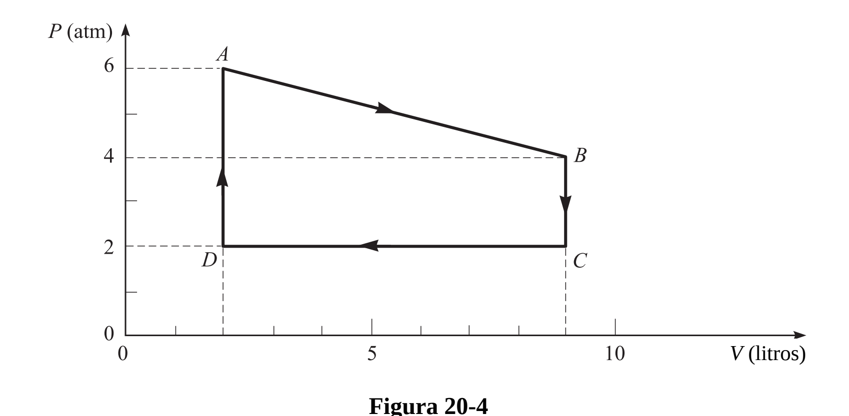


Figura 20-4

20.41 [II] Cuatro gramos de gas, confinados en un cilindro, realizan el ciclo que se muestra en la figura 20-4. En *A* la temperatura del gas es de 400 ºC. *a*) ¿Cuál es su temperatura en *B*? *b*) Si, en la porción de *A* a *B*, fluyen hacia el gas 2.20 kcal, ¿cuál será c_v para el gas? Proporcione sus respuestas a dos cifras significativas.
Resp. *a*) 2.0×10^3 K; *b*) 0.25 cal/g · ºC.

20.42 [II] La figura 20-4 es el diagrama *P*-*V* para 25.0 g de un gas ideal encerrado. En el punto *A* la temperatura del gas es de 200 ºC. El valor de c_v para el gas es de 0.150 cal/g · ºC. *a*) ¿Cuál es la temperatura del gas en el punto *B*? *b*) Determine ΔU para la porción del ciclo de *A* a *B*. *c*) Encuentre ΔW para esta misma porción. *d*) Determine ΔQ para esta misma porción. **Resp.** *a*) 1.42×10^3 K; *b*) 3.55 kcal = 14.9 kJ; *c*) 3.54 kJ; *d*) 18.4 kJ.

ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY

21

LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA se puede establecer de tres formas diferentes:

1) El calor fluye espontáneamente desde un objeto más caliente hacia uno más frío, pero no en sentido inverso.
2) Ninguna máquina térmica que trabaja en ciclos continuamente puede cambiar toda la energía consumida en trabajo útil.
3) Si un sistema experimenta cambios espontáneos, cambiará en tal forma que su entropía aumentará o, en el mejor de los casos, permanecerá constante.

La segunda ley establece la manera en que ocurrirá un cambio espontáneo, mientras que la primera Ley dice si es posible o no un cambio. La primera ley se refiere a la conservación de la energía; la segunda se refiere a la dispersión de la energía.

LA ENTROPÍA (S) es una *variable de estado* para un sistema en equilibrio. Con esto se quiere dar a entender que S siempre es la misma para un sistema que se encuentra en un determinado estado de equilibrio. Como P, V y U, la entropía es una característica del sistema en equilibrio.

Cuando una cantidad de calor ΔQ entra a un sistema a una temperatura absoluta T, se define el cambio de la entropía del sistema como

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$$

siempre y cuando el sistema cambie en forma reversible. La unidad para la entropía en el SI es J/K.

Un **cambio reversible** (o proceso) es aquel en el cual los valores de P, V, T y U están bien definidos durante el cambio. Si el proceso se invierte, entonces P, V, T y U tomarán sus valores originales cuando el sistema regrese a donde comenzó. Para considerarse reversible, un proceso por lo general debe ser lento y el sistema debe estar muy próximo al equilibrio durante todo el cambio.

Otra definición de entropía, completamente equivalente, se puede dar a partir de un cuidadoso análisis molecular del sistema. Si un sistema puede llegar al mismo estado (esto es, alcanzar los mismos valores de P, V, T y U) en Ω (omega) formas diferentes (por ejemplo, distintos arreglos de las moléculas), entonces la entropía de dicho estado es

$$S = k_B \ln \Omega$$

donde ln es el logaritmo en base e y k_B es la constante de Boltzmann, 1.38×10^{-23} J/K.

LA ENTROPÍA ES UNA MEDIDA DEL DESORDEN: Un estado que sólo puede ocurrir de una forma (por ejemplo, un único arreglo de sus moléculas) es un estado altamente ordenado. Pero un estado que puede ocurrir de muchas maneras es un estado más desordenado. Una forma de asociar un número con el desorden, es tomar el desorden de un estado como proporcional a Ω, que es el número de formas en que puede ocurrir un estado. Como $S = k_B \ln \Omega$, la entropía es una medida del desorden.

En un sistema que contiene muchas moléculas, los procesos espontáneos siempre ocurren en una dirección de

$$\begin{pmatrix}\text{estado que puede existir}\\ \text{en sólo unas pocas formas}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\text{estado que puede existir}\\ \text{en muchas formas}\end{pmatrix}$$

Por consiguiente, cuando los sistemas se abandonan a sí mismos retienen su estado original de orden o aumentan su desorden.

EL ESTADO MÁS PROBABLE de un sistema es el estado con la entropía más grande. También es el estado con el mayor desorden y el estado que puede ocurrir en el mayor número de maneras.

PROBLEMAS RESUELTOS

21.1 [I] Veinte gramos de hielo a precisamente 0 °C se funden en agua a 0 °C. ¿Cuánto cambia la entropía de los 20 g en el proceso?

Al agregar calor lentamente al hielo, se le puede derretir de una manera reversible. El calor requerido es

$$\Delta Q = mL_f = (20 \text{ g})(80 \text{ cal/g}) = 1\,600 \text{ cal}$$

de donde
$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{1\,600 \text{ cal}}{273 \text{ K}} = 5.86 \text{ cal/K} = 25 \text{ J/K}$$

Note que la entropía (y el desorden) aumentan conforme se derrite el hielo; el hielo es más ordenado que el agua.

21.2 [I] Como se muestra en la figura 21-1, un gas ideal en un cilindro está confinado por un pistón. El pistón se empuja hacia abajo lentamente de tal forma que la temperatura permanece constante a 20 °C. Durante la compresión, sobre el gas se realiza un trabajo de 730 J. Calcule el cambio de entropía del gas.

La primera ley dice que

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Como el proceso fue isotérmico, la energía interna del gas ideal no cambió. Por lo mismo, $\Delta U = 0$ y

$$\Delta Q = \Delta W = -730 \text{ J}$$

(Puesto que el gas se comprimió, éste hizo un trabajo negativo, de aquí el signo menos. En otras palabras, el trabajo realizado sobre el gas es negativo.) Ahora se puede escribir

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{-730 \text{ J}}{293 \text{ K}} = -2.49 \text{ J/K}$$

Note que el cambio de entropía es negativo. El desorden del gas disminuye conforme se comprime a un volumen más pequeño.

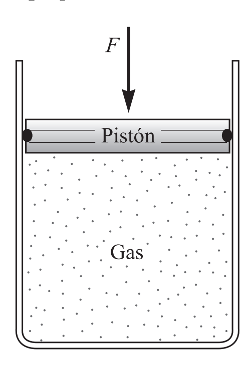


Figura 21-1

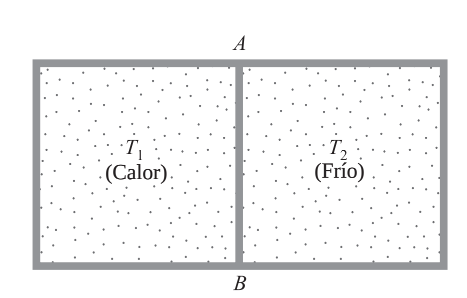


Figura 21-2

21.3 [II] Como se muestra en la figura 21-2, un recipiente está dividido en dos compartimientos de igual volumen. Los dos compartimientos contienen masas iguales del mismo gas, 0.740 g en cada uno, y c_v para el gas es de 745 J/kg · K. Al empezar, el gas caliente se encuentra a 67.0 °C, mientras que el gas frío está a 20.0 °C. No puede entrar o salir calor de los compartimientos excepto lentamente a través de la partición *AB*. Calcule el cambio de entropía de cada compartimiento conforme el gas caliente se enfría desde 67.0 °C hasta 65.0 °C.

El calor perdido por el gas caliente durante el proceso es

$$\Delta Q = mc_v \Delta T = (0.000740 \text{ kg})(745 \text{ J/kg} \cdot \text{K})(-2.0 \text{ °C}) = -1.10 \text{ J}$$

Para el gas caliente (aproximadamente a 66 °C),

$$\Delta S_c = \frac{\Delta Q}{T_c} \approx \frac{-1.10 \text{ J}}{(273 + 66) \text{ K}} = -3.2 \times 10^{-3} \text{ J/K}$$

Para el gas frío, como éste ganará 1.10 J,

$$\Delta S_f = \frac{\Delta Q}{T_f} \approx \frac{1.10 \text{ J}}{(273 + 21) \text{ K}} = 3.8 \times 10^{-3} \text{ J/K}$$

Como puede ver, los cambios de entropía fueron diferentes para los dos compartimientos; se ganó más de lo que se perdió. La entropía total del universo aumentó como resultado de este proceso.

21.4 [II] El gas ideal en el cilindro de la figura 21-1 está inicialmente en las condiciones P_1, V_1, T_1. Lentamente se expande a temperatura constante al permitir que el pistón se eleve. Sus condiciones finales son P_2, V_2, T_1, donde $V_2 = 3V_1$. Calcule el cambio de entropía del gas durante la expansión. La masa del gas es de 1.5 g y $M = 28$ kg/kmol para él.

Recuerde del capítulo 20 que, para una expansión isotérmica de un gas ideal (donde $\Delta U = 0$),

$$\Delta W = \Delta Q = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Consecuentemente,
$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{m}{M} R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

donde se usó la ley de los gases ideales. Al sustituir los datos se obtiene

$$\Delta S = \left(\frac{1.5 \times 10^{-3} \text{ kg}}{28 \text{ kg/kmol}}\right)\left(8\,314 \frac{\text{J}}{\text{kmol} \cdot \text{K}}\right)(\ln 3) = 0.49 \text{ J/K}$$

21.5 [I] Dos tanques de agua, uno a 87 °C y el otro a 14 °C, están separados por una placa metálica. Si el calor fluye a través de la placa a razón de 35 cal/s, ¿cuál es el cambio en entropía del sistema que ocurre en un segundo?

El tanque con la temperatura más alta pierde entropía, mientras que el más frío gana entropía:

$$\Delta S_c = \frac{\Delta Q}{T_c} = \frac{(-35 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal})}{360 \text{ K}} = -0.41 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_f = \frac{\Delta Q}{T_f} = \frac{(35 \text{ cal})(4.184 \text{ J/cal})}{287 \text{ K}} = 0.51 \text{ J/K}$$

Por tanto, 0.51 J/K − 0.41 J/K = 0.10 J/K.

21.6 [I] Un sistema consiste en 3 monedas en las que puede salir águila o sol. ¿De cuántas maneras diferentes el sistema puede tener *a*) todas águilas, *b*) todas soles, *c*) un sol y dos águilas, *d*) dos soles y un águila?

a) Sólo hay una manera en que todas las monedas salgan águila: cada moneda debe salir águila.

b) Aquí, también, sólo existe una forma.

c) Hay tres maneras, que corresponden a las tres posibilidades de que la moneda muestre sol.

d) Por simetría con *c*), hay tres maneras.

21.7 [I] Calcule la entropía del sistema de tres monedas descrito en el problema 21.6 si *a*) todas las monedas deben salir águila y *b*) dos monedas tienen que ser águila.

Se usa la relación de Boltzmann $S = k_B \ln \Omega$, donde Ω es el número de maneras en que un estado puede ocurrir y $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J/K.

a) Como este estado sólo puede ocurrir en una forma,

$$S = k_B \ln 1 = (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K})(0) = 0$$

b) Como el estado puede ocurrir de tres modos,

$$S = (1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}) \ln 3 = 1.52 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

21.8 [I] Calcule el cambio de entropía de 5.00 g de agua a 100 °C conforme cambia a vapor a 100 °C bajo presión estándar. **Resp.** 7.24 cal/K = 30.3 J/K.

21.9 [I] ¿Cuánto cambia la entropía de 300 g de un metal ($c = 0.093$ cal/g · °C) conforme se enfría de 90 °C a 70 °C? Puede hacer la aproximación $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$. **Resp.** −6.6 J/K.

21.10 [II] Un gas ideal se expande lentamente desde 2.00 m^3 hasta 3.00 m^3 a una temperatura constante de 30 °C. El cambio de entropía del gas fue de +47 J/K durante el proceso. *a*) ¿Cuánto calor se agregó al gas durante el proceso? *b*) ¿Cuánto trabajo hizo el gas durante el proceso? **Resp.** *a*) 3.4 kcal; *b*) 14 kJ.

21.11 [II] Iniciando con condiciones estándar, 3.0 kg de un gas ideal ($M = 28$ kg/kmol) se comprimen isotérmicamente a un quinto de su volumen original. Calcule el cambio de entropía del gas. **Resp.** −1.4 kJ/K.

21.12 [I] Cuatro fichas de póker tienen color rojo en una cara y blanco en la otra. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden *a*) sacar tres fichas con cara roja; *b*) sacar dos fichas con cara roja? **Resp.** *a*) 4; *b*) 6.

21.13 [II] Cuando se arrojan 100 monedas, sólo hay una manera en la que todas pueden salir águila. Existen 100 formas en las que sólo sale un sol. Hay aproximadamente 1×10^{29} maneras en las que 50 pueden salir águila. Se colocan 100 monedas en una caja con únicamente un águila hacia arriba. Se agitan y entonces aparecen 50 águilas. ¿Cuál fue el cambio de entropía en las monedas debido a que fueron agitadas? **Resp.** 9×10^{-22} J/K.

MOVIMIENTO ONDULATORIO 22

UNA ONDA QUE SE PROPAGA es una perturbación autosostenida de un medio que viaja de un punto a otro, llevando energía y cantidad de movimiento. Las ondas mecánicas son fenómenos agregados que surgen del movimiento de las partículas constituyentes. La onda avanza, pero las partículas del medio sólo oscilan en su lugar. En la cuerda de la figura 22-1 se genera una onda mediante la vibración sinusoidal de la mano que está en uno de sus extremos. La energía es transportada por la onda desde la fuente hacia la derecha, a lo largo de la cuerda. Esta dirección, la de transporte de energía, se llama *dirección* (o *línea*) *de propagación* de la onda.

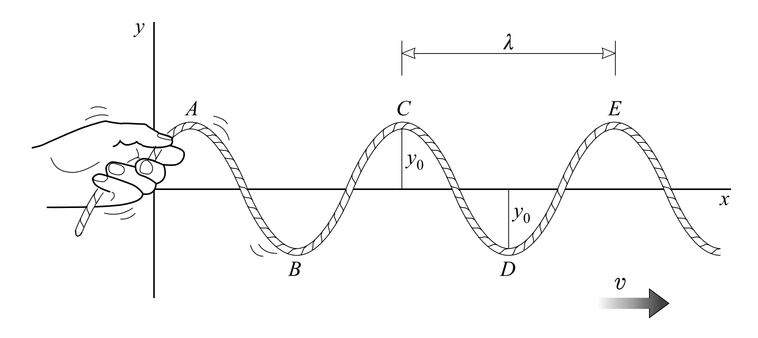


Figura 22-1

Cada partícula de la cuerda (como la que se encuentra en el punto *C*) vibra de arriba abajo, perpendicular a la línea de propagación. Toda onda en la que la dirección de vibración sea perpendicular a la dirección de propagación se denomina **onda transversal**. Ondas transversales típicas, además de las ondas sobre cuerdas, son las ondas electromagnéticas (por ejemplo, las ondas de radio y de luz). Sin embargo, en las ondas sonoras la dirección de vibración es paralela a la dirección de propagación, como se verá en el capítulo 23. A tal tipo de onda se le denomina **onda longitudinal** (o *de compresión*).

TERMINOLOGÍA ONDULATORIA: El **periodo** (T) de una onda es el tiempo que tarda la onda en ir a través de un ciclo completo. Es el tiempo que le toma a una partícula, como la del punto *A*, para moverse a través de una vibración o ciclo completo, bajar desde el punto *A* y regresar al mismo. El periodo es el número de segundos por ciclo. La **frecuencia** (f) de una onda es el número de ciclos por segundo. Entonces,

$$f = \frac{1}{T}$$

Si T está en segundos, entonces f se encuentra en hertz (Hz), donde 1 Hz $=$ 1 s^{-1}. El periodo y la frecuencia de la onda son iguales al periodo y la frecuencia de la vibración.

Las partes superiores de la onda, como los puntos *A* y *C*, se llaman *crestas.* Las partes inferiores, como los puntos *B* y *D*, se denominan *valles*. Al pasar el tiempo, las crestas y los valles se mueven a la derecha con una rapidez v, que es la rapidez de la onda.

La **amplitud** de una onda es la máxima perturbación experimentada durante un ciclo de vibración, la distancia y_0 en la figura 22-1.

La longitud de onda (λ) es la distancia a lo largo de la dirección de propagación entre puntos correspondientes de la onda, por ejemplo, la distancia *AC*. En un tiempo T, una cresta que se mueve con rapidez v recorrerá una distancia λ hacia la derecha. Por consiguiente, $s = vt$ produce

$$\lambda = vT = \frac{v}{f}$$

y

$$v = f\lambda$$

Esta relación es válida para todas las ondas, no sólo para las ondas en una cuerda.

LAS VIBRACIONES EN FASE existen en dos puntos de la onda si dichos puntos experimentan vibraciones simultáneas en la misma dirección. Por ejemplo, las partículas de la cuerda en los puntos *A* y *C* de la figura 22-1 vibran ***en fase***, pues se mueven juntas arriba y abajo. Las vibraciones están en fase si la separación de los puntos es un múltiplo entero de longitudes de onda. Los segmentos de la cuerda en *A* y *B* vibran en forma opuesta uno del otro; se dice que ahí las vibraciones están ***fuera de fase*** 180° o medio ciclo.

LA RAPIDEZ DE UNA ONDA TRANSVERSAL en una cuerda o alambre tenso es

$$v = \sqrt{\frac{\text{tensión en la cuerda}}{\text{masa por longitud unitaria de la cuerda}}}$$

ONDAS ESTACIONARIAS: A ciertas frecuencias de vibración, un sistema puede experimentar resonancia. Es decir, puede absorber energía eficientemente desde una fuente impulsora en su entorno que oscile a dicha frecuencia (figura 22-2). Éstos y patrones de vibración similares se conocen como **ondas estacionarias**, en comparación con la propagación de ondas consideradas arriba. Sería mejor no llamar a éstas ondas, pues no transportan energía ni cantidad de movimiento. Los puntos estacionarios (como *B* y *D*) se llaman **nodos**; los puntos de mayor movimiento (como *A*, *C* y *E*) se conocen como **antinodos**. La distancia entre nodos (o antinodos) adyacentes es $\frac{1}{2}\lambda$. La porción de la cuerda entre nodos adyacentes se llama *segmento*, y la longitud de un segmento también equivale a $\frac{1}{2}\lambda$.

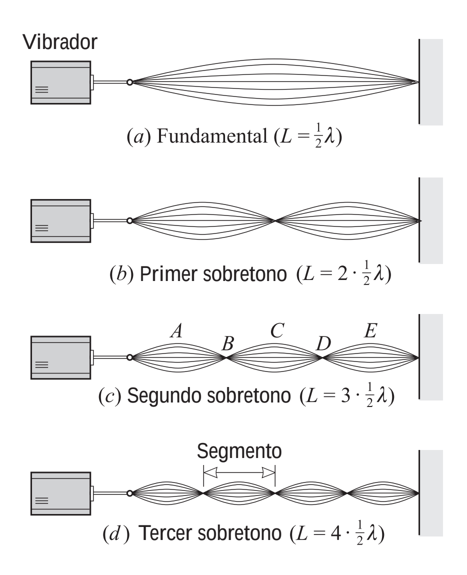


Figura 22-2

CONDICIONES PARA LA RESONANCIA: Una cuerda resonará sólo si la longitud de onda de la vibración tiene ciertos valores especiales: la longitud de onda debe ser tal que un número entero de segmentos de onda (cada uno de $\frac{1}{2}\lambda$ de longitud) se ajuste exactamente a la cuerda. Un ajuste adecuado ocurre cuando los nodos y los antinodos se encuentran en posiciones demandadas por las restricciones sobre la cuerda. En particular, los extremos fijos de la cuerda deben ser nodos. Entonces, como se muestra en la figura 22-2, la relación entre la longitud de onda λ y la longitud L de una cuerda en resonancia es $L = n(\frac{1}{2}\lambda)$, donde n es un número entero. Ya que $\lambda = vT = v/f$, entre más corta sea la longitud del segmento, mayor será la frecuencia de resonancia. Si a la frecuencia fundamental de resonancia se le llama f_1, entonces la figura 22-2 muestra que las mayores frecuencias de resonancia están dadas por $f_n = nf_1$.

LAS ONDAS LONGITUDINALES (O DE COMPRESIÓN) ocurren cuando se hace vibrar a lo largo una columna de aire, una barra sólida o algo similar. En resonancia, los nodos existen en puntos fijos, tales como el extremo cerrado de una columna de aire en un tubo o la posición de la sujeción de la barra. Los diagramas como los de la figura 22-2 se utilizan para mostrar la resonancia de ondas longitudinales, así como de ondas transversales. Sin embargo, para ondas longitudinales, los diagramas son sobre todo esquemáticos y se usan para indicar la ubicación de

los nodos y antinodos. Al analizar dichos diagramas, se usa el hecho de que la distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\frac{1}{4}\lambda$.

PROBLEMAS RESUELTOS

22.1 [I] Suponga que la figura 22-1 representa una onda de 50 Hz sobre una cuerda. Tome la distancia y_0 de 3.0 mm y la distancia *AE* de 40 cm. Encuentre para la onda lo siguiente: *a*) amplitud, *b*) longitud de onda y *c*) rapidez.

a) Por definición, la amplitud es la distancia y_0 y es de 3.0 mm.

b) La distancia entre crestas adyacentes es la longitud de onda, así que $\lambda = 20$ cm.

c) $$v = \lambda f = (0.20\text{ m})(50\text{ s}^{-1}) = 10\text{ m/s}$$

22.2 [I] Experimentalmente se encuentra que la longitud de onda de una onda sonora en cierto material es de 18.0 cm. La frecuencia de la onda es de 1 900 Hz. ¿Cuál es la rapidez de la onda sonora?

De $\lambda = vT = v/f$, que es aplicable a todo tipo de ondas,

$$v = \lambda f = (0.180\text{ m})(1\,900\text{ s}^{-1}) = 342\text{ m/s}$$

22.3 [I] Una cuerda horizontal tiene 5.00 m de longitud y una masa de 1.45 g. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si la longitud de onda de una onda de 120 Hz sobre ella es de 60.0 cm? ¿De qué magnitud debe ser la masa que cuelgue en uno de sus extremos (por decir, a través de una polea) para darle esa tensión?

Se sabe que la rapidez de una onda en una cuerda depende tanto de la tensión como de la masa por unidad de longitud. Más aún,

$$v = \lambda f = (0.600\text{ m})(120\text{ s}^{-1}) = 72.0\text{ m/s}$$

Además, ya que $$v = \sqrt{(\text{tensión})/(\text{masa por unidad de longitud})}$$

$$\text{Tensión} = (\text{masa por unidad de longitud})(v^2) = \left(\frac{1.45\times 10^{-3}\text{ kg}}{5.00\text{ m}}\right)(72.0\text{ m/s})^2 = 1.50\text{ N}$$

La tensión en la cuerda equilibra el peso de la masa que cuelga de su extremo. Por tanto,

$$F_T = mg \qquad \text{o} \qquad m = \frac{F_T}{g} = \frac{1.50\text{ N}}{9.81\text{ m/s}^2} = 0.153\text{ kg}$$

22.4 [II] Un cable flexible uniforme de 20 m de longitud tiene una masa de 5.0 kg. Cuelga verticalmente bajo su propio peso y vibra desde su extremo superior con una frecuencia de 7.0 Hz. *a*) Encuentre la rapidez de una onda transversal sobre el cable en su punto medio. *b*) ¿Cuáles son la longitud de onda y la frecuencia en su punto medio?

a) Se utilizará $v = \sqrt{(\text{tensión})/(\text{masa por unidad de longitud})}$. El punto medio del cable soporta la mitad de su peso, así que la tensión en este punto es

$$F_T = \tfrac{1}{2}(5.0\text{ kg})(9.81\text{ m/s}^2) = 24.5\text{ N}$$

Por otro lado $$\text{Masa por unidad de longitud} = \frac{5.0\text{ kg}}{20\text{ m}} = 0.25\text{ kg/m}$$

así que $$\sqrt{\frac{24.5\text{ N}}{0.25\text{ kg/m}}} = 9.9\text{ m/s}$$

b) Ya que las crestas de una onda no se acumulan en un punto a lo largo de la cuerda o cable, el número de crestas que pasa por un punto debe ser el mismo que el que pase por cualquier otro punto. Por tanto, la frecuencia, 7.0 Hz, es la misma en todos los puntos.

Para calcular la longitud de onda en el punto medio se debe usar la rapidez que se encontró para ese punto, 9.9 m/s. Esto da

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{9.9 \text{ m/s}}{7.0 \text{ Hz}} = 1.4 \text{ m}$$

22.5 [II] Suponga que en la figura 22-2 se muestran ondas estacionarias sobre una cuerda metálica tensada con 88.2 N. Su longitud es de 50.0 cm y su masa de 0.500 g. *a*) Calcule v para las ondas transversales sobre la cuerda. *b*) Determine las frecuencias de su fundamental, primer sobretono y segundo sobretono.

a) $$v = \sqrt{\frac{\text{tensión}}{\text{masa por unidad de longitud}}} = \sqrt{\frac{88.2 \text{ N}}{(5.00 \times 10^{-4} \text{ kg})/(0.500 \text{ m})}} = 297 \text{ m/s}$$

b) Recuerde que la longitud del segmento es $\lambda/2$ y utilice $\lambda = v/f$. Para la fundamental:

$$\lambda = 1.00 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{297 \text{ m/s}}{1.00 \text{ m}} = 297 \text{ Hz}$$

Para el primer sobretono:

$$\lambda = 0.500 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{297 \text{ m/s}}{0.500 \text{ m}} = 594 \text{ Hz}$$

Para el segundo sobretono:

$$\lambda = 0.333 \text{ m} \qquad \text{y} \qquad f = \frac{297 \text{ m/s}}{0.333 \text{ m}} = 891 \text{ Hz}$$

22.6 [II] Una cuerda de 2.0 m de largo está accionada por un vibrador de 240 Hz colocado en uno de sus extremos. La cuerda resuena en cuatro segmentos formando un patrón de onda estacionaria. ¿Cuál es la rapidez de una onda transversal sobre tal cuerda?

Primero se determina la longitud de onda de la onda a partir del inciso *d*) de la figura 22-2. Ya que cada segmento tiene una longitud de $\lambda/2$, se tiene

$$4\left(\frac{\lambda}{2}\right) = L \qquad \text{o} \qquad \lambda = \frac{L}{2} = \frac{2.0 \text{ m}}{2} = 1.0 \text{ m}$$

Entonces, al usar $\lambda = vT = v/f$, se tiene

$$v = f\lambda = (240 \text{ s}^{-1})(1.0 \text{ m/s}) = 0.24 \text{ km/s}$$

22.7 [II] Una cuerda de banjo de 30 cm de largo oscila en un patrón de onda estacionaria. Resuena en su modo fundamental a 256 Hz. ¿Cuál es la tensión en la cuerda si 80 cm de ésta tienen una masa de 0.75 g?

Primero se debe encontrar v y después la tensión. Se sabe que la cuerda vibra en un segmento cuando $f = 256$ Hz. Por consiguiente, de la figura 22-2*a*,

$$\frac{\lambda}{2} = L \qquad \text{o} \qquad \lambda = (0.30 \text{ m})(2) = 0.60 \text{ m}$$

y $$v = f\lambda = (256 \text{ s}^{-1})(0.60 \text{ m}) = 154 \text{ m/s}$$

La masa por unidad de longitud de la cuerda es

$$\frac{0.75 \times 10^{-3} \text{ kg}}{0.80 \text{ m}} = 9.4 \times 10^{-4} \text{ kg/m}$$

Entonces, de $v = \sqrt{(\text{tensión})/(\text{masa por unidad de longitud})}$,

$$F_T = (154 \text{ m/s})^2(9.4 \times 10^{-4} \text{ kg/m}) = 22 \text{ N}$$

22.8 [II] Una cuerda vibra en cinco segmentos a una frecuencia de 460 Hz. *a*) ¿Cuál es su frecuencia fundamental? *b*) ¿Qué frecuencia ocasionará que vibre en tres segmentos?

Método detallado

Si la cuerda tiene n segmentos de largo, entonces de la figura 22-2 se tiene $n(\frac{1}{2}\lambda) = L$. Pero $\lambda = v/f_n$, de modo que $L = n(v/2f_n)$. Al despejar f_n se obtiene

$$f_n = n\left(\frac{v}{2L}\right)$$

Se sabe que $f_5 = 460$ Hz, por tanto

$$460\text{ Hz} = 5\left(\frac{v}{2L}\right) \qquad \text{o} \qquad \frac{v}{2L} = 92.0\text{ Hz}$$

Al sustituir esto en la relación anterior se tiene

$$f_n = (n)(92.0\text{ Hz})$$

a) $f_1 = 92.0$ Hz.

b) $f_3 = (3)(92\text{ Hz}) = 276$ Hz

Método alternativo

Recuerde que para una cuerda atada en ambos extremos, $f_n = nf_1$. Al saber que $f_5 = 460$ Hz, se encuentra $f_1 = 92.0$ Hz y $f_3 = 276$ Hz.

22.9 [II] Una cuerda sujeta por ambos extremos resuena a 420 Hz y 490 Hz y no hay frecuencias resonantes entre ellas. Determine su frecuencia fundamental de resonancia.

En general, $f_n = nf_1$. Se sabe que $f_n = 420$ Hz y $f_{n+1} = 490$ Hz. Por tanto,

$$420\text{ Hz} = nf_1 \qquad \text{y} \qquad 490\text{ Hz } (n+1)f_1$$

Si se resta la primera ecuación de la segunda, se obtiene $f_1 = 70.0$ Hz.

22.10 [II] Una cuerda de violín resuena a su frecuencia fundamental de 196 Hz. ¿Dónde debe colocar su dedo, a lo largo de la cuerda, para que la frecuencia fundamental sea de 440 Hz?

En la frecuencia fundamental, $L = \frac{1}{2}\lambda$. Ya que $\lambda = v/f$, se tiene que $f_1 = v/2L$. Originalmente, la cuerda de longitud L_1 resonaba a una frecuencia de 196 Hz, así que

$$196\text{ Hz} = \frac{v}{2L_1}$$

Se quiere que resuene a 440 Hz, por consiguiente

$$440\text{ Hz} = \frac{v}{2L_2}$$

Al eliminar v de las ecuaciones simultáneas se obtiene

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{196\text{ Hz}}{440\text{ Hz}} = 0.445$$

Para obtener la resonancia deseada, el dedo debe acortar la longitud de la cuerda hasta 0.445 de su longitud inicial.

22.11 [II] Una barra de 60 cm de longitud, sujetada por su parte media, vibra longitudinalmente por una fuerza alternada en uno de sus extremos. (Vea la figura 22-3.) Su frecuencia fundamental de resonancia es de 3.0 kHz. ¿Cuál es la rapidez de las ondas longitudinales en la barra?

Ya que sus extremos están libres, la barra debe tener antinodos ahí. El punto de sujeción en el centro de la barra debe ser un nodo. Por tanto, la resonancia fundamental es como se muestra en la figura 22-3. Puesto que la distancia de nodo a antinodo siempre es $\frac{1}{4}\lambda$, se ve que $L = 2(\frac{1}{4}\lambda)$. Como $L = 0.60$ m, se encuentra $\lambda = 1.20$ m.

Entonces, de la relación básica (pág. 188) $\lambda = v/f$, se obtiene

$$v = \lambda f = (1.20\text{ m})(3.0\text{ kHz}) = 3.6\text{ km/s}$$

22.12 [II] A través de un tubo lleno de aire de 90 cm y cerrado en uno de sus extremos se envían ondas de compresión (ondas sonoras). El tubo resuena a varias frecuencias, la más baja de ellas es de 95 Hz. Encuentre la rapidez de las ondas sonoras en el aire.

En la figura 22-4 se muestran el tubo y algunas de sus formas de resonancia. Recuerde que la distancia entre un nodo y un antinodo adyacente es $\lambda/4$. En este caso se aplica el modo de resonancia superior, pues para ella los segmentos son los más largos y su frecuencia, por consiguiente, es la más baja. Para dicha forma, $L = \lambda/4$, de modo que

$$\lambda = 4L = 4(0.90 \text{ m}) = 3.6 \text{ m}$$

Al usar $\lambda = \upsilon T = \upsilon/f$ se obtiene

$$\upsilon = \lambda f = (3.6 \text{ m})(95 \text{ s}^{-1}) = 0.34 \text{ km/s}$$

22.13 [II] ¿A qué otras frecuencias resonará el tubo descrito en el problema 22.12?

Algunas de las primeras frecuencias de resonancia se muestran en la figura 22-4. Se observa que, en la resonancia,

$$L = n(\tfrac{1}{4}\lambda_n)$$

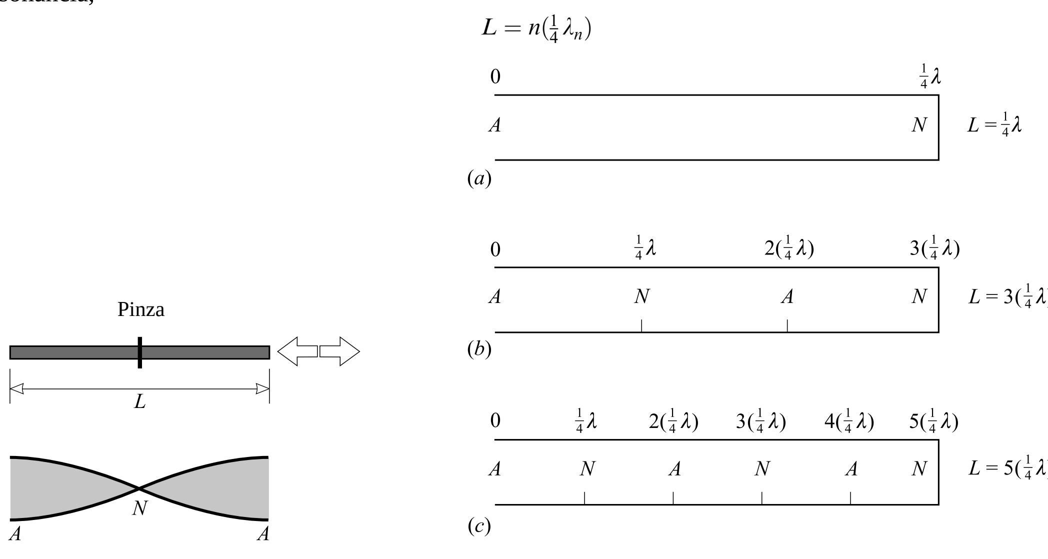


Figura 22-3

Figura 22-4

donde $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$, es un número entero impar y λ_n es la longitud de onda resonante. Pero $\lambda_n = \upsilon/f_n$, así que

$$L = n\frac{\upsilon}{4f_n} \qquad \text{o} \qquad f_n = n\frac{\upsilon}{4L} = nf_1$$

de donde, del problema 22.12, $f_1 = 95$ Hz. Por tanto, algunas de las primeras frecuencias de resonancia son 95 Hz, 0.29 kHz, 0.48 kHz, . . .

22.14 [II] Una barra metálica de 40 cm de largo se deja caer verticalmente sobre un piso de madera y rebota en el aire. Por este motivo se establecen en la barra ondas de compresión de muchas frecuencias. Si la rapidez de las ondas de compresión en la barra es de 5 500 m/s, ¿cuál será la frecuencia más baja de las ondas de compresión con la que resonará la barra cuando rebote?

Ambos extremos de la barra están libres, por lo que en ellos habrá antinodos. En el modo de resonancia más bajo (es decir, el de segmentos más largos), sólo existirá un nodo en la barra, en su centro, como se muestra en la figura 22-5. Entonces se tiene

$$L = 2\left(\frac{\lambda}{4}\right) \qquad \text{o} \qquad \lambda = 2L = 2(0.40 \text{ m}) = 0.80 \text{ m}$$

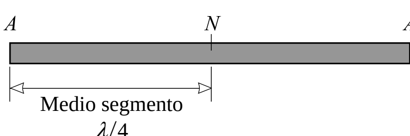


Figura 22-5

Por consiguiente, de $\lambda = \upsilon T = \upsilon/f$,

$$f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{5\,500 \text{ m/s}}{0.80 \text{ m}} = 6\,875 \text{ Hz} = 6.9 \text{ kHz}$$

22.15 [II] Una barra de 200 cm de largo está sujeta a 50 cm de uno de sus extremos, como se muestra en la figura 22-6. Mediante un mecanismo electromotriz colocado en uno de sus extremos se transmite a la barra una vibración longitudinal. El mecanismo aumenta la frecuencia de vibración desde un valor muy bajo y se determina que la barra resuena por primera vez a 3 kHz. ¿Cuál es la rapidez del sonido (onda de compresión) en la barra?

El punto de sujeción permanece estacionario y por consiguiente ahí existe un nodo. Puesto que los extremos están libres, ahí existen antinodos. La frecuencia más baja de resonancia ocurre cuando la barra vibra en sus segmentos más largos posibles. En la figura 22-6 se muestra la forma de vibración que corresponde a esta condición. Ya que un segmento es la longitud desde un nodo al siguiente, entonces la longitud de A a N en la figura es la mitad de un segmento. Por tanto, la barra tiene una longitud de dos segmentos. Esta forma de resonancia satisface las restricciones acerca de las posiciones de los nodos y los antinodos, así como la condición de que la barra vibra en los segmentos más largos posibles. Ya que el segmento tiene $\lambda/2$ de longitud,

$$L = 2(\lambda/2) \qquad \text{o} \qquad \lambda = L = 200 \text{ cm}$$

Entonces, a partir de $\lambda = vT = v/f$,

$$v = \lambda f = (2.00 \text{ m})(3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}) = 6 \text{ km/s}$$

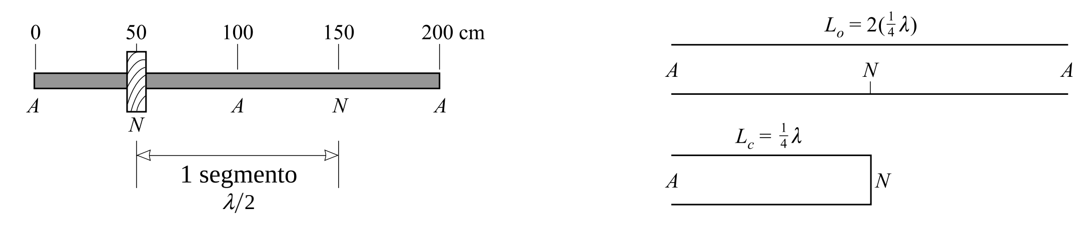


Figura 22-6 **Figura 22-7**

22.16 [II] *a*) Determine la menor longitud de un tubo cerrado en uno de sus extremos a la que resonará el aire cuando se active mediante una fuente sonora de 160 Hz de frecuencia. Considere que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s. *b*) Repita el cálculo para un tubo abierto en ambos extremos.

a) En este caso se aplica la figura 22-4*a*. El tubo más corto tendrá una longitud $\lambda/4$. Por tanto,

$$L = \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{4}\left(\frac{v}{f}\right) = \frac{340 \text{ m/s}}{4(160 \text{ s}^{-1})} = 0.531 \text{ m}$$

b) En este caso, el tubo tiene antinodos en ambos extremos y un nodo en su centro. Entonces,

$$L = 2\left(\frac{1}{4}\lambda\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{v}{f}\right) = \frac{340 \text{ m/s}}{2(160 \text{ s}^{-1})} = 1.06 \text{ m}$$

22.17 [II] Un tubo de 90 cm de longitud está abierto por ambos extremos. ¿De qué longitud debe ser un segundo tubo, cerrado en uno de sus extremos, si debe tener la misma frecuencia de resonancia fundamental del tubo abierto?

En la figura 22-7 se muestran los dos tubos en sus resonancias fundamentales. Como se ve,

$$L_o = 2(\tfrac{1}{4}\lambda) \qquad L_c = \tfrac{1}{4}\lambda$$

de donde $L_c = \frac{1}{2}L_o = 45$ cm.

22.18 [II] Un tubo de vidrio de 70.0 cm de longitud está abierto en ambos extremos. Determine las frecuencias a las que resonará cuando se active mediante ondas sonoras que tienen una rapidez de 340 m/s.

Un tubo abierto en ambos extremos debe tener un antinodo en cada extremo. Por ende, resonará como se muestra en la figura 22-8. Se observa que las longitudes de onda para la resonancia λ_n están dadas por

$$L = n\left(\frac{\lambda_n}{2}\right) \qquad \text{o} \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

donde n es un número entero. Pero $\lambda_n = v/f_n$, así que

$$f_n = \left(\frac{n}{2L}\right)(v) = (n)\left(\frac{340 \text{ m/s}}{2 \times 0.700 \text{ m}}\right) = 243n \text{ Hz}$$

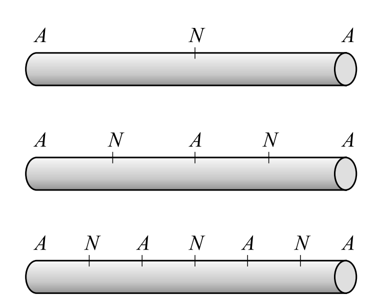


Figura 22-8

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

22.19 [I] Una persona promedio puede oír sonidos que varían en frecuencia de aproximadamente 20 a 20 000 Hz. Determine las longitudes de onda en estos límites, si la rapidez del sonido es de 340 m/s. **Resp.** 17 m, 1.7 cm.

22.20 [I] La estación de radio WJR transmite a 760 kHz. La rapidez de las ondas de radio es de 3.00×10^8 m/s. ¿Cuál es la longitud de onda de las ondas de la WJR? **Resp.** 395 m.

22.21 [I] Desde un transmisor se emiten ondas de radar con una longitud de onda de 3.4 cm. Su rapidez es de 3×10^8 m/s. ¿Cuál es su frecuencia? **Resp.** 8.8×10^9 Hz = 8.8 GHz.

22.22 [I] Cuando se activa un vibrador de 120 Hz, por una cuerda viajan ondas transversales de 31 cm de longitud de onda. *a*) ¿Cuál es la rapidez de las ondas sobre la cuerda? *b*) Si la tensión en la cuerda es de 1.20 N, ¿cuál es la masa de 50 cm de la cuerda? **Resp.** *a*) 37 m/s; *b*) 0.43 g.

22.23 [I] La onda que se muestra en la figura 22-9 la emite un vibrador de 60 ciclos/s. Determine lo siguiente para la onda: *a*) amplitud, *b*) frecuencia, *c*) longitud de onda, *d*) rapidez, *e*) periodo. **Resp.** *a*) 3.00 mm; *b*) 60 Hz; *c*) 2.00 cm; *d*) 1.2 m/s; *e*) 0.017 s.

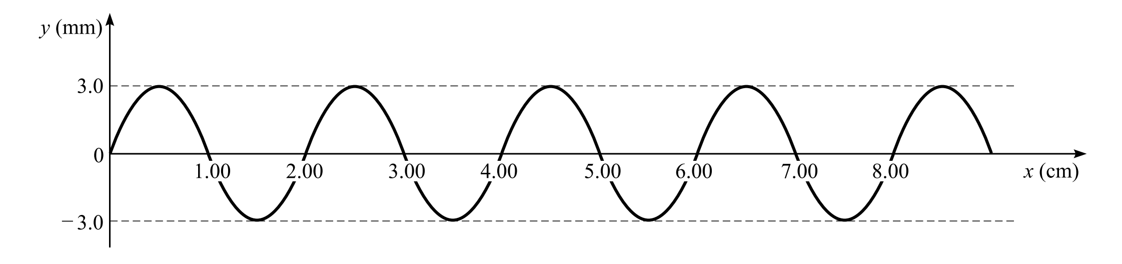


Figura 22-9

22.24 [II] Un alambre de cobre de 2.4 mm de diámetro tiene 3.0 m de longitud y se usa para suspender una masa de 2.0 kg de una viga. Si se envía una perturbación transversal a lo largo del alambre golpeándolo ligeramente con un lápiz, ¿con qué rapidez viajará la perturbación? La densidad del cobre es de 8 920 kg/m^3. **Resp.** 22 m/s.

22.25 [II] Una cuerda de 180 cm de longitud resuena en una onda estacionaria que tiene tres segmentos cuando se le envía una vibración de 270 Hz. ¿Cuál es la rapidez de las ondas en el alambre? **Resp.** 324 m/s.

22.26 [II] Una cuerda resuena en tres segmentos a una frecuencia de 165 Hz. ¿Qué frecuencia se debe usar para que resuene en cuatro segmentos? **Resp.** 220 Hz.

22.27 [II] Un cable flexible, de 30 m de longitud y 70 N de peso, se estira con una fuerza de 2.0 kN. Si el cable se golpea lateralmente por uno de sus extremos, ¿cuánto tiempo tardará la onda transversal en viajar al otro extremo y regresar? **Resp.** 0.65 s.

22.28 [II] Un alambre tenso vibra con una frecuencia fundamental de 256 Hz. ¿Cuál sería la frecuencia fundamental si el alambre tuviera la mitad de largo, el doble de grueso y estuviera sometido a un cuarto de la tensión? **Resp.** 128 Hz.

22.29 [II] Dos alambres de acero y plata, del mismo diámetro y longitud, se estiran con idéntica fuerza. Sus densidades son 7.80 g/cm^3 y 10.6 g/cm^3, respectivamente. ¿Cuál es la frecuencia fundamental del alambre de plata, si la del acero es de 200 Hz? **Resp.** 172 Hz.

22.30 [II] Una cuerda tiene una longitud de 60 cm y una masa de 3.0 gramos. ¿Cuál debe ser la tensión de modo que, cuando vibra transversalmente, su primer sobretono tiene una frecuencia de 200 Hz? **Resp.** 72 N.

22.31 [II] *a*) ¿En qué punto se debe sujetar una cuerda tensa para hacer que su tono fundamental sea más intenso? *b*) ¿En qué punto se tiene que sujetar y luego en qué punto tiene que tocarse para hacer su primer sobretono más marcado? *c*) ¿Y para hacer su segundo sobretono más intenso? **Resp.** *a*) centro; *b*) sujeta a una distancia de $1/4$ de su longitud medida desde uno de sus extremos, después tocada en su centro; *c*) sujeta a $1/6$ de su longitud desde uno de sus extremos, después tocada a $1/3$ de su longitud desde ese extremo.

22.32 [II] ¿Cuál debe ser la longitud de una barra de hierro que tiene la frecuencia fundamental de 320 Hz cuando se sujeta por su centro? Suponga vibración longitudinal con una rapidez de 5.00 km/s. **Resp.** 7.81 m.

22.33 [II] Una barra de 120 cm de longitud se sujeta por el centro y se golpea de tal modo que emite su primer sobretono. Haga un dibujo que muestre la ubicación de los nodos y los antinodos, y determine en qué otros puntos se puede fijar la barra y todavía emitir el mismo tono. **Resp.** 20.0 cm desde cualquier extremo.

22.34 [II] Una barra metálica de 6.0 m de longitud, fija en su centro y que vibra longitudinalmente de tal manera que emite su primer sobretono, vibra al unísono con un diapasón marcado a 1 200 vibraciones/s. Calcule la rapidez del sonido en el metal. **Resp.** 4.8 km/s.

22.35 [II] Determine la longitud de la columna de aire más corta en un recipiente cilíndrico que reforzará fuertemente el sonido de un diapasón que vibra a 512 Hz. Utilice $v = 340$ m/s para la rapidez del sonido en el aire. **Resp.** 16.6 cm.

22.36 [II] Un tubo largo y angosto, cerrado en uno de sus extremos, no resuena con un diapasón que tiene una frecuencia de 300 Hz sino hasta que la columna de aire alcanza 28 cm. *a*) ¿Cuál es la rapidez del sonido en el aire a la temperatura ambiente existente? *b*) ¿Cuál es la siguiente longitud de la columna que resonará con el diapasón? **Resp.** *a*) 0.34 km/s; *b*) 84 cm.

22.37 [II] Un tubo de órgano, cerrado en uno de sus extremos, tiene 61.0 cm de longitud. ¿Cuáles son las frecuencias de los tres primeros sobretonos, si v para el sonido es 342 m/s? **Resp.** 420 Hz, 700 Hz, 980 Hz.

SONIDO 23

LAS ONDAS SONORAS son ***ondas de compresión longitudinales*** en un medio material como el aire, el agua o el acero. Cuando las compresiones y rarefacciones de las ondas inciden sobre el tímpano del oído, dan como resultado la sensación de sonido, siempre y cuando la frecuencia de las ondas esté entre los 20 Hz y los 20 000 Hz. Las ondas con frecuencias superiores a los 20 kHz se llaman ondas *ultrasónicas*. Aquellas con frecuencias inferiores a los 20 Hz se conocen como ondas *infrasónicas*.

ECUACIÓN PARA CALCULAR LA RAPIDEZ DEL SONIDO: En un gas ideal de masa molecular M y temperatura absoluta T, la rapidez del sonido v está dada por

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad \text{(gas ideal)}$$

donde R es la constante de los gases y γ es la razón de los calores específicos c_p/c_v. γ tiene un valor de aproximadamente 1.67 para los gases monoatómicos (He, Ne, Ar) y de aproximadamente 1.40 para los gases diatómicos (N_2, O_2, H_2).

La rapidez de las ondas de compresión en otros materiales está dada por

$$v = \sqrt{\frac{\text{módulo}}{\text{densidad}}}$$

Si el material tiene la forma de una barra sólida, se usa el módulo de Young Y. En los líquidos se debe utilizar el módulo volumétrico.

LA RAPIDEZ DEL SONIDO EN EL AIRE a 0 °C es de 331 m/s. La rapidez aumenta con la temperatura en aproximadamente 0.61 m/s por cada °C que aumente. En particular, la relación entre las rapideces v_1 y v_2 a temperaturas absolutas T_1 y T_2 respectivamente está dada por

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

La rapidez del sonido en esencia es independiente de la presión, la frecuencia y la longitud de onda.

LA INTENSIDAD (I) de cualquier onda es la energía por unidad de área, por unidad de tiempo; en la práctica, es la potencia promedio transportada por la onda a través de un área unitaria perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Suponga que en un tiempo Δt una cantidad de energía ΔE atraviesa el área ΔA que es perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Entonces

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta A\ \Delta t} = \frac{P_{prom}}{\Delta A}$$

Se puede demostrar que, para una onda sonora con amplitud a_0 y frecuencia f, que viaja con rapidez v en un medio material de densidad ρ,

$$I = 2\pi^2 f^2 \rho v a_0^2$$

Si f está en Hz, ρ en kg/m^3, v en m/s y a_0 (el desplazamiento máximo de los átomos o moléculas del medio) en m, entonces I está en W/m^2. Observe que $I \propto a_0^2$ y que la clase de relación es verdadera para todo tipo de ondas.

LA INTENSIDAD ACÚSTICA es una medida de la percepción del sonido por el oído humano. Aunque una onda sonora de alta intensidad se percibe con mayor estrépito que una onda con menor intensidad, su relación está muy lejos de ser lineal. La sensación de sonido es más o menos proporcional al logaritmo de la intensidad sonora. Pero la relación exacta entre sensación auditiva e intensidad es muy compleja y no es la misma para cada individuo.

EL NIVEL DE INTENSIDAD (O VOLUMEN SONORO) (β) se define con una escala arbitraria que corresponde aproximadamente a la sensación de sonoridad. El cero en esta escala ocurre cuando $I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/m^2, que corresponde más o menos al sonido audible más débil. El nivel de intensidad, en decibeles, se define entonces como

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Observe que, cuando $I = I_0$, el nivel de sonido es igual a cero. El **decibel** (dB) es una unidad adimensional. El oído normal puede distinguir entre intensidades que difieren aproximadamente en 1 dB.

PULSACIONES (O LATIDOS): Las alternaciones de intensidad máxima y mínima que se producen debido a la superposición de dos ondas con frecuencias ligeramente diferentes se llaman **pulsaciones**. El número de pulsaciones por segundo es igual a la diferencia entre las frecuencias de las dos ondas sonoras que se combinaron.

EFECTO DOPPLER: Suponga que una fuente sonora en movimiento emite un sonido de frecuencia f_s. Sea v la rapidez del sonido y v_s la rapidez con la que la fuente sonora se aproxima a un observador, relativa al medio de propagación del sonido. Suponga además que el observador se dirige hacia la fuente con una rapidez v_0, también medida respecto al medio. El observador oirá un sonido de frecuencia f_0 dada por $f_0 = f_s\,[(v + v_0)/(v - v_s)]$. En general

$$f_0 = f_s \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s}$$

Dibuje una flecha del observador a la fuente; es decir, la dirección positiva. Cuando la velocidad de la fuente está en dicha dirección se usa el signo más enfrente de v_s. Lo mismo es cierto para v_0 y el observador.

Cuando la fuente y el observador se acercan una al otro, más crestas de onda inciden sobre el oído cada segundo en comparación con cuando ambos están en reposo. Esto ocasiona que el oído perciba una frecuencia más alta que la emitida por la fuente. Cuando los dos se apartan, ocurre lo contrario: la frecuencia parece ser más baja.

EFECTOS DE INTERFERENCIA: Dos ondas sonoras de la misma frecuencia y amplitud pueden dar origen a efectos de interferencia fácilmente observables en un punto por donde pasan ambas. Si la cresta de una onda coincide con la cresta de la otra, se dice que las ondas están *en fase*. En este caso se refuerzan mutuamente y ocasionan una intensidad más alta en dicho punto.

Sin embargo, si la cresta de una onda coincide con el valle de la otra, las dos ondas se cancelarán entre sí. No se escuchará sonido alguno en este punto. Se dice que las ondas están *fuera de fase* 180° (o media longitud de onda).

Se observan efectos intermedios si las ondas no están ni en fase ni fuera de fase 180°, pero tienen una relación de fase fija en algún punto intermedio.

PROBLEMAS RESUELTOS

23.1 [I] Ocurre una explosión a una distancia de 6.00 km de una persona. ¿Cuánto tiempo transcurre después de la explosión antes de que la persona la pueda escuchar? Suponga que la temperatura es de 14.0 °C.

Como la rapidez del sonido se incrementa en 0.61 m/s por cada 1.0 °C, se tiene

$$v = 331 \text{ m/s} + (0.61)(14) \text{ m/s} = 340 \text{ m/s}$$

Al usar $s = vt$, se encuentra que el tiempo transcurrido es

$$t = \frac{s}{v} = \frac{6\,000 \text{ m}}{340 \text{ m/s}} = 17.6 \text{ s}$$

23.2 [I] Para calcular cuán lejos se produjo un relámpago, se considera la siguiente regla: “Divida entre tres el tiempo en segundos que transcurre entre el destello y el sonido percibido. El resultado es igual a la distancia en km al relámpago”. Justifique esta suposición.

La rapidez del sonido es $v \approx 333$ m/s $\approx \frac{1}{3}$ km/s, así que la distancia al relámpago es

$$s = vt \approx \frac{t}{3}$$

donde t, el tiempo que viaja el sonido, está en segundos y s en kilómetros. La luz emitida por el relámpago viaja muy rápido, 3×10^8 m/s, que llega al observador casi de manera instantánea. Por tanto, t es prácticamente igual al tiempo entre *ver* el relámpago y oír el trueno. De aquí la regla.

23.3 [I] Calcule la rapidez del sonido en gas neón a 27.0 °C. Para el neón, $M = 20.18$ kg/kmol.

El neón, por ser un gas monoatómico, tiene $\gamma \approx 1.67$. En consecuencia, al recordar que T es la temperatura absoluta,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{(1.67)(8\,314 \text{ J/kmol}\cdot\text{K})(300 \text{ K})}{20.18 \text{ kg/kmol}}} = 454 \text{ m/s}$$

23.4 [II] Calcule la rapidez del sonido en un gas diatómico ideal que tiene una densidad de 3.50 kg/m^3 y una presión de 215 kPa.

Se sabe que $v = \sqrt{\gamma RT/M}$ y que se puede encontrar la temperatura a partir de la presión. De la ley de los gases $PV = (m/M)RT$, y de este modo

$$\frac{RT}{M} = P\frac{V}{m}$$

Pero como $\rho = m/V$, la expresión para la rapidez se convierte en

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1.40)(215 \times 10^3 \text{ Pa})}{3.50 \text{ kg/m}^3}} = 293 \text{ m/s}$$

Se usa el hecho de que $\gamma \approx 1.40$ para un gas diatómico ideal.

23.5 [II] Una barra metálica de 60 cm de longitud está prensada en su centro. Entra en resonancia a su frecuencia fundamental debido a ondas longitudinales que se propagan dentro de ella a 3.00 kHz. ¿Cuál es el módulo de Young para el material de la barra? La densidad del metal es de 8 700 kg/m^3.

Esta misma barra se discutió en el problema 22.11. Ahí se encontró que la rapidez de las ondas longitudinales es de 3.6 km/s. Se sabe que $v = \sqrt{Y/\rho}$, y entonces

$$Y = \rho v^2 = (8\,700 \text{ kg/m}^3)(3\,600 \text{ m/s})^2 = 1.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

23.6 [I] ¿Cuál es la rapidez de las ondas de compresión (ondas sonoras) en el agua? El módulo volumétrico del agua es de 2.2×10^9 N/m^2.

$$v = \sqrt{\frac{\text{módulo volumétrico}}{\text{densidad}}} = \sqrt{\frac{2.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2}{1\,000 \text{ kg/m}^3}} = 1.5 \text{ km/s}$$

23.7 [I] Un diapasón vibra en el aire a 284 Hz. Calcule la longitud de onda del tono emitido a 25 °C.

Al recordar que la rapidez del sonido aumenta 0.61 m/s por cada incremento de 1 °C, a 25 °C,

$$v = 331 \text{ m/s} + (0.61)(25) \text{ m/s} = 346 \text{ m/s}$$

Al usar $\lambda = vT = v/f$ se obtiene

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{346 \text{ m/s}}{284 \text{ s}^{-1}} = 1.22 \text{ m}$$

23.8 [II] El tubo de un órgano cuya longitud permanece constante resuena a una frecuencia de 224.0 Hz cuando la temperatura del aire es de 15 °C. ¿Cuál será la frecuencia de resonancia cuando la temperatura del aire sea de 24 °C?

La longitud de onda de resonancia debe tener el mismo valor para las dos temperaturas, ya que sólo depende de la longitud del tubo. (Los nodos y antinodos deben distribuirse apropiadamente dentro del tubo.) Pero $\lambda = v/f$, y por consiguiente v/f debe tener el mismo valor a las dos temperaturas. Entonces se tiene

$$\frac{v_1}{224 \text{ Hz}} = \frac{v_2}{f_2} \qquad \text{o} \qquad f_2 = (224 \text{ Hz})\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

A temperaturas cercanas a la del ambiente, $v = (331 + 0.61T_c)$ m/s, donde T_c es la temperatura en grados Celsius. Entonces se tiene

$$f_2 = (224.0 \text{ Hz})\left[\frac{331 + (0.61)(24)}{331 + (0.61)(15)}\right] = 0.228 \text{ kHz}$$

23.9 [I] Un sonido fuerte y desagradable puede tener una intensidad de 0.54 W/m². Calcule el máximo desplazamiento de las moléculas del aire en una onda sonora si su frecuencia es de 800 Hz. Considere que la densidad del aire es de 1.29 kg/m³ y que la rapidez del sonido es de 340 m/s.

Se proporcionan I, f, ρ y v, y se tiene que encontrar a_0.
De la ecuación $I = 2\pi^2 f^2 \rho v a_0^2$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi f}\sqrt{\frac{I}{2\rho v}} = \frac{1}{(800 \text{ s}^{-1}\pi)}\sqrt{\frac{0.54 \text{ W/m}^2}{(2)(1.29 \text{ kg/m}^3)(340 \text{ m/s})}} = 9.9 \times 10^{-6} \text{ m} = 9.9 \ \mu\text{m}$$

23.10 [I] Un sonido tiene una intensidad de 3.00×10^{-8} W/m². ¿Cuál es el nivel del sonido en dB?

El nivel del sonido es β, donde $I_0 = 1.00 \times 10^{-12}$ W/m².

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2}\right)$$
$$= 10 \log_{10}\left(\frac{3.00 \times 10^{-8}}{1.00 \times 10^{-12}}\right) = 10 \log_{10} (3.00 \times 10^4) = 10(4 + \log_{10} 3.00)$$
$$= 10(4 + 0.477) = 44.8 \text{ dB}$$

23.11 [II] Un medidor de nivel de ruido da una lectura de 85 dB en el nivel de sonido en una habitación. ¿Cuál es la intensidad del sonido en la habitación?

$$\beta = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2}\right) = 85.0 \text{ dB}$$
$$\log_{10}\left(\frac{I}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2}\right) = \frac{85.0}{10} = 8.50$$
$$\frac{I}{1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2} = \text{antilog}_{10}\ 8.50 = 3.16 \times 10^8$$
$$I = (1.00 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2)(3.16 \times 10^8) = 3.16 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$$

23.12 [II] Las intensidades de dos ondas sonoras son 10 y 500 μW/cm². ¿Cuál es la diferencia en sus niveles de intensidad?

Sea el sonido A igual a 10 μW/cm², y B el otro. Entonces

$$\beta_A = 10 \log_{10}\left(\frac{I_A}{I_0}\right) = 10(\log_{10} I_A - \log_{10} I_0)$$
$$\beta_B = 10 \log_{10}\left(\frac{I_B}{I_0}\right) = 10(\log_{10} I_B - \log_{10} I_0)$$

Al restar se obtiene

$$\beta_B - \beta_A = 10(\log_{10} I_B - \log_{10} I_A) = 10 \log_{10}\left(\frac{I_B}{I_A}\right)$$
$$= 10 \log_{10}\left(\frac{500}{10}\right) = 10 \log_{10} 50 = (10)(1.70)$$
$$= 17 \text{ dB}$$

23.13 [II] Calcule la razón de intensidades de dos sonidos si uno es 8.0 dB más intenso que el otro.

En el problema 23.12 se vio que

$$\beta_B - \beta_A = 10 \log_{10}\left(\frac{I_B}{I_A}\right)$$

En el presente caso la ecuación se convierte en

$$8.0 = 10 \log_{10}\left(\frac{I_B}{I_A}\right) \qquad \text{o} \qquad \frac{I_B}{I_A} = \text{antilog}_{10}\ 0.80 = 6.3$$

23.14 [II] Una fuente sonora puntual emite un sonido uniformemente en todas direcciones. El nivel de intensidad a una distancia de 2.0 m es de 100 dB. ¿Cuál es la potencia sonora de la fuente emisora?

Se puede considerar que la energía emitida por la fuente puntual fluye a través de una superficie esférica en cuyo centro se localiza la fuente sonora. Por tanto, si se encuentra la tasa de flujo a través de tal superficie, será igual al flujo emitido por la fuente. Tome una esfera concéntrica de 2.0 m de radio. Se sabe que el nivel sonoro en su superficie es de 100 dB. Se puede demostrar que esto corresponde a $I = 0.010\ \text{W/m}^2$. Por ende, la energía que fluye cada segundo a través de cada m^2 de superficie es 0.010 W. Entonces, el flujo de energía total a través de la superficie esférica es $I(4\pi r^2)$, donde $I = 0.010\ \text{W/m}^2$ y $r = 2.0$ m:

$$\text{Potencia emitida por la fuente} = (0.010\ \text{W/m}^2)(4\pi)(2\ \text{m})^2 = 0.50\ \text{W}$$

Note cuán poca potencia se emite como sonido a partir incluso de una fuente tan intensa.

23.15 [III] Un mecanógrafo que escribe enérgicamente en una habitación origina un nivel sonoro promedio de 60.0 dB. ¿Cuál será el nivel de intensidad en decibeles cuando trabajan tres mecanógrafos igualmente ruidosos?

Si cada mecanógrafo emite la misma cantidad de energía sonora, entonces la intensidad sonora final I_f debe ser tres veces la intensidad inicial I_i. Se tiene

$$\beta_f = \log_{10}\left(\frac{I_f}{I_0}\right) = \log_{10} I_f - \log_{10} I_0$$

y

$$\beta_i = \log_{10} I_i - \log_{10} I_0$$

Restar las dos ecuaciones produce

$$\beta_f - \beta_i = \log_{10} I_f - \log_{10} I_i$$

de donde

$$\beta_f = \beta_i + \log_{10}\left(\frac{I_f}{I_i}\right) = 60.0\ \text{dB} + \log 3 = 60.5\ \text{dB}$$

El nivel de intensidad sonora, al ser una medida logarítmica, se eleva muy lentamente con el número de mecanógrafos.

23.16 [I] Un automóvil que se mueve a 30.0 m/s se acerca a la sirena de una fábrica que tiene una frecuencia de 500 Hz. *a*) Si la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s, ¿cuál es la frecuencia aparente de la sirena que escucha el conductor? *b*) Repita para el caso de un automóvil que se aleja de la fábrica con la misma rapidez.

Éste es un problema de corrimiento Doppler donde el observador se mueve en la dirección positiva y $v_s = 0$. Por tanto se usa $+v_o$ en esta primera parte. Y así

a)

$$f_o = f_s \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} = (500\ \text{Hz}) \frac{340\ \text{m/s} + 30.0\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} - 0} = 544\ \text{Hz}$$

Cuando el automóvil se aleja en dirección negativa usamos $-v_o$ y

b)

$$f_o = f_s \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} = (500\ \text{Hz}) \frac{340\ \text{m/s} - 30.0\ \text{m/s}}{340\ \text{m/s} - 0} = 456\ \text{Hz}$$

23.17 [I] Un automóvil que se mueve a 20 m/s haciendo sonar el claxon ($f = 1\,200$ Hz) persigue a otro automóvil que se mueve a 15 m/s en la misma dirección. ¿Cuál es la frecuencia aparente del claxon que escucha el conductor perseguido? Tome la rapidez del sonido como 340 m/s.

En este problema de efecto Doppler tanto la fuente como el observador se mueven en dirección negativa. En consecuencia, se usa $-v_o$ y $-v_s$.

$$f_o = f_s \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} = (1\ 200\ \text{Hz}) \frac{340 - 15}{340 - 20} = 1.22\ \text{kHz}$$

23.18 [I] Cuando dos diapasones vibran simultáneamente producen una pulsación cada 0.30 s. *a*) ¿Cuál es la diferencia entre sus frecuencias? *b*) Un pedazo de goma de mascar se pega a uno de los brazos de un diapasón. Ahora se tiene una pulsación cada 0.40 s. ¿A cuál de los diapasones se le pegó la goma de mascar: al de baja o al de alta frecuencia?

El número de pulsaciones por segundo es igual a la diferencia de frecuencias.

a) $$\text{Diferencia de frecuencias} = \frac{1}{0.30\ \text{s}} = 3.3\ \text{Hz}$$

b) $$\text{Diferencia de frecuencias} = \frac{1}{0.40\ \text{s}} = 2.5\ \text{Hz}$$

Al pegar la goma de mascar al diapasón se incrementa su masa y en consecuencia disminuye su frecuencia de vibración. Esta disminución en la frecuencia ocasiona que su valor se aproxime al de la frecuencia del otro diapasón. Por tanto, el diapasón en cuestión tiene la frecuencia más alta.

23.19 [II] Un diapasón con una frecuencia de 400 Hz se aleja de un observador y al mismo tiempo se acerca a una pared plana con una rapidez de 2.0 m/s. ¿Cuál es la frecuencia aparente *a*) de las ondas sonoras no reflejadas que van directamente al observador y *b*) la de las ondas sonoras que van al observador después de reflejarse? *c*) ¿Cuántas pulsaciones por segundo se escuchan? Suponga que la rapidez del sonido en el aire es de 340 m/s.

a) El diapasón, la fuente, se aleja del observador en la dirección positiva y por ende se usa $+v_s$. No importa cuál sea el signo asociado con v_o, pues $v_o = 0$.

$$f_o = f_s \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} = (400\ \text{Hz}) \frac{340\ \text{m/s} + 0}{340\ \text{m/s} + 2.0\ \text{m/s}} = 397.7\ \text{Hz} = 398\ \text{Hz}$$

b) Las crestas de las ondas que llegan a la pared están más juntas que lo normal porque el diapasón se mueve hacia la pared. Por tanto, la onda reflejada parece venir de una fuente que se aproxima.

$$f_o = f_s \frac{v \pm v_o}{v \mp v_s} = (400\ \text{Hz}) \frac{340\ \text{m/s} + 0}{340\ \text{m/s} - 2.0\ \text{m/s}} = 402.4\ \text{Hz} = 402\ \text{Hz}$$

c) Pulsaciones por segundo = diferencia entre frecuencias = (402.4 − 397.7) Hz = 4.7 pulsaciones por segundo.

23.20 [I] En la figura 23-1, S_1 y S_2 son dos fuentes sonoras idénticas. La emisión de las crestas de las ondas es simultánea (las fuentes están en fase). ¿Para qué valores de $L_1 - L_2$ se obtendrá interferencia constructiva y se escuchará un sonido fuerte en el punto *P*?

Si $L_1 = L_2$, las ondas provenientes de las dos fuentes tardarán el mismo tiempo en llegar al punto *P*. Las crestas de una onda llegan ahí al mismo tiempo que las crestas de la otra onda. En consecuencia, las ondas estarán en fase en *P* y darán por resultado máxima interferencia.

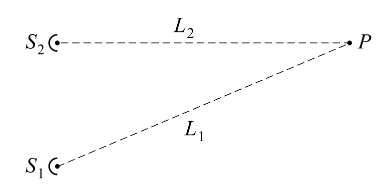


Figura 23-1

Si $L_1 = L_2 + \lambda$, entonces las ondas provenientes de S_1 estarán retrasadas una longitud de onda respecto de las ondas emitidas por S_2 cuando lleguen a *P*. Pero como las ondas se repiten cada longitud de onda, una cresta proveniente de S_1 todavía alcanzará el punto *P* al mismo tiempo que lo hace una cresta proveniente de S_2. Una vez más las ondas están en fase en *P* y habrá máxima interferencia.

En general, en *P* se escuchará un sonido intenso cuando $L_1 - L_2 = \pm n\lambda$, donde *n* es un entero.

23.21 [II] Las dos fuentes sonoras de la figura 23-1 vibran en fase. En P se escucha un sonido intenso cuando $L_1 = L_2$. Conforme L_1 aumenta lentamente, el sonido más débil se escucha cuando $L_1 - L_2$ tiene los valores de 20.0 cm, 60.0 cm y 100 cm. ¿Cuál es la frecuencia de la fuente sonora si la rapidez del sonido es de 340 m/s?

El sonido más débil se escuchará en P cuando una cresta proveniente de S_1 y un valle proveniente de S_2 lleguen ahí al mismo tiempo. Esto sucederá si $L_1 - L_2$ es $\frac{1}{2}\lambda$, o $\lambda + \frac{1}{2}\lambda$ o $2\lambda + \frac{1}{2}\lambda$ y así sucesivamente. Por tanto, el incremento en L_1 entre los sonidos más débiles es λ, y a partir de los datos se ve que $\lambda = 0.400$ m. Entonces, de $\lambda = v/f$,

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{0.400 \text{ m}} = 850 \text{ Hz}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

23.22 [I] Tres segundos después de que se dispara una pistola, la persona que disparó escuchó un eco. ¿Qué tan lejos se encontraba la superficie que reflejó el sonido del disparo? Use 340 m/s como la rapidez del sonido.
Resp. 510 m.

23.23 [I] ¿Cuál es la rapidez del sonido en el aire cuando la temperatura es de 31 °C? **Resp.** 0.35 km/s.

23.24 [II] El impacto de un proyectil disparado a un blanco que se encuentra a 800 m de distancia se escucha 5.0 s después de salir de la pistola. Calcule la velocidad horizontal promedio del proyectil. La temperatura del aire es de 20 °C. **Resp.** 0.30 km/s.

23.25 [II] En un experimento para determinar la rapidez del sonido, dos observadores, A y B, estaban apostados a 5.00 km uno del otro. Cada uno tenía una pistola y un cronómetro. El observador A escucha el disparo de B 15.5 s después de ver el flamazo. Más tarde, A dispara su pistola y B escucha el disparo 14.5 s después de ver el flamazo. Determine la rapidez del sonido y la componente de la rapidez del viento a lo largo de la línea que une a los observadores. **Resp.** 334 m/s, 11.1 m/s.

23.26 [II] Un disco tiene 40 hoyos a lo largo de su circunferencia y gira a razón de 1 200 rpm. Determine la frecuencia y la longitud de onda del tono producido por el disco cuando un chorro de aire sopla sobre él. La temperatura es de 15 °C. **Resp.** 0.80 kHz, 0.43 m.

23.27 [II] Determine la rapidez del sonido en dióxido de carbono ($M = 44$ kg/kmol, $\gamma = 1.30$) a una presión de 0.50 atm y una temperatura de 400 °C. **Resp.** 0.41 km/s.

23.28 [II] Calcule la masa molecular M de un gas para el cual $\gamma = 1.40$ y la rapidez del sonido en él es de 1260 m/s a 0 °C. **Resp.** 2.00 kg/kmol (hidrógeno).

23.29 [II] En TPE, la rapidez del sonido en el aire es de 331 m/s. Determine la rapidez del sonido en hidrógeno a TPE si la densidad relativa del hidrógeno respecto al aire es 0.0690 y $\gamma = 1.40$ para ambos gases.
Resp. 1.26 km/s.

23.30 [II] El helio es un gas monoatómico que tiene una densidad de 0.179 kg/m^3 a una presión de 76.0 cm de mercurio y una temperatura de 0 °C. Calcule la rapidez de las ondas de compresión (sonido) en helio a esta temperatura y presión. **Resp.** 972 m/s.

23.31 [II] Una barra cuyas dimensiones son 1.00 cm^2 $\times$ 200 cm y masa de 2.00 kg está prensada en su centro. Cuando vibra longitudinalmente emite su tono fundamental en unísono con un diapasón que oscila a 1 000 vibraciones/s. ¿Cuánto se alargará la barra si, estando sujeta de un extremo, se aplica en el otro extremo una fuerza de 980 N? **Resp.** 0.123 m.

23.32 [I] Encuentre la rapidez de una onda de compresión que se propaga en una barra metálica cuyo material tiene un módulo de Young de 1.20×10^{10} N/m^2 y una densidad de 8 920 kg/m^3. **Resp.** 1.16 km/s.

23.33 [II] Un incremento de 100 kPa en la presión ocasiona que cierto volumen de agua disminuya en 5×10^{-3} por ciento de su volumen original. *a*) ¿Cuál es el módulo volumétrico del agua? *b*) ¿Cuál es la rapidez del sonido (ondas de compresión) en el agua? **Resp.** *a*) 2×10^9 N/m^2; *b*) 1 km/s.

23.34 [I] Un sonido tiene una intensidad de 5.0×10^{-7} W/m². ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibeles? **Resp.** 57 dB.

23.35 [I] Una persona que maneja una cortadora de hierba puede estar sujeta a un sonido de 2.00×10^{-2} W/m² de intensidad. ¿Cuál es el nivel de intensidad en decibeles al que está sujeta la persona? **Resp.** 103 dB.

23.36 [I] Una banda de rock puede producir fácilmente en una habitación un nivel sonoro de 107 dB. A dos cifras significativas, ¿cuál es la intensidad sonora a 107 dB? **Resp.** 0.0500 W/m².

23.37 [II] Un susurro tiene un nivel de intensidad de aproximadamente 15 dB. ¿Cuál es la intensidad correspondiente del sonido? **Resp.** 3.2×10^{-11} W/m².

23.38 [II] ¿Qué sonido tiene un nivel de intensidad de 3.0 dB mayor que un sonido cuya intensidad es de 10 μW/cm²? **Resp.** 20 μW/cm².

23.39 [II] Calcule la intensidad de una onda sonora en aire a 0 °C y a 1.00 atm si su amplitud es de 0.0020 mm y su longitud de onda es de 66.2 cm. La densidad del aire a TPE es de 1.293 kg/m³. **Resp.** 8.4 mW/m².

23.40 [II] ¿Cuál es la amplitud de vibración en un haz sonoro de 8 000 Hz si su nivel de intensidad es de 62 dB? Suponga que el aire está a 15 °C y su densidad es de 1.29 kg/m³. **Resp.** 1.7×10^{-9} m.

23.41 [II] Un sonido tiene un nivel de intensidad de 75.0 dB, mientras que un segundo tiene un nivel de 72.0 dB. ¿Cuál es el nivel de intensidad cuando los dos sonidos se combinan? **Resp.** 76.8 dB.

23.42 [II] Cierto tubo de órgano está afinado para emitir una frecuencia de 196.00 Hz. Cuando éste y la cuerda de sol de un violín suenan juntos, se escuchan 10 pulsaciones en un tiempo de exactamente 8 s. Las pulsaciones se hacen más lentas a medida que la cuerda del violín se tensa lentamente. ¿Cuál era la frecuencia original de la cuerda de violín? **Resp.** 194.75 Hz.

23.43 [I] Una locomotora que se mueve a 30.0 m/s se aproxima y pasa a una persona que se encuentra parada a un lado de la vía. Su silbato emite un tono de 2.00 kHz de frecuencia. ¿Qué frecuencia escuchará la persona *a*) conforme el tren se aproxima y *b*) al alejarse? La rapidez del sonido es de 340 m/s. **Resp.** *a*) 2.19 kHz; *b*) 1.84 kHz.

23.44 [II] Dos carros que viajan en direcciones opuestas se aproximan entre sí con la misma rapidez. El claxon de uno de los automóviles suena ($f = 3.0$ kHz) y las personas en el otro automóvil escuchan que tiene una frecuencia de 3.4 kHz. Calcule la rapidez a la que cada auto se mueve si la rapidez del sonido es de 340 m/s. **Resp.** 21 m/s.

23.45 [II] Para determinar la rapidez de un oscilador armónico, se envía un haz de sonido a lo largo de la línea de movimiento del oscilador. El sonido, emitido a una frecuencia de 8 000.0 Hz, se refleja sobre su misma trayectoria y llega a un sistema de detección. El detector observa que el haz reflejado varía en frecuencia entre los límites 8 003.1 Hz y 7 996.9 Hz. ¿Cuál es la máxima rapidez del oscilador? Tome la rapidez del sonido como 340 m/s. **Resp.** 0.132 m/s.

23.46 [II] En la figura 23-1 se muestran dos fuentes sonoras idénticas que emiten ondas hacia el punto *P*. Ellas envían crestas de ondas simultáneamente (están en fase) y la longitud de onda de la onda es de 60 cm. Si $L_2 = 200$ cm, calcule los valores de L_1 para los cuales *a*) se escucha un sonido máximo en *P* y *b*) se oye un sonido mínimo en *P*. **Resp.** *a*) $(200 \pm 60n)$ cm, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$; *b*) $(230 \pm 60n)$ cm, donde $n = 0, 1, 2, \ldots$

23.47 [II] Las dos fuentes que se muestran en la figura 23-2 emiten haces sonoros idénticos ($\lambda = 80$ cm) de una hacia la otra. Ambas emiten una cresta al mismo tiempo (las fuentes están en fase). El punto *P* es una posición de intensidad máxima. A medida que una persona se mueve de *P* hacia *Q*, el sonido disminuye en intensidad, *a*) ¿A qué distancia de *P* se escuchará primero un sonido mínimo? *b*) ¿A qué distancia de *P* se escuchará nuevamente un sonido máximo? **Resp.** *a*) 20 cm; *b*) 40 cm.

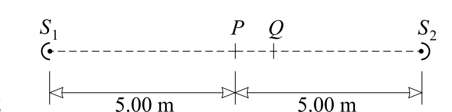


Figura 23-2

LEY DE COULOMB Y CAMPOS ELÉCTRICOS

24

LEY DE COULOMB: Suponga que dos cargas puntuales, $q_{\bullet}$ y $q'_{\bullet}$, están separadas una distancia r en el vacío. *Si* $q_{\bullet}$ y $q'_{\bullet}$ tienen el mismo signo, las dos cargas se repelen mutuamente; si poseen signos opuestos, se atraen una a la otra. La fuerza que experimenta una carga debido a la otra se conoce como **fuerza de Coulomb** o **eléctrica** y está dada por la **ley de Coulomb**,

$$F_E = k\frac{q_{\bullet}q'_{\bullet}}{r^2} \qquad \text{(en el vacío)}$$

Como siempre en el SI, las distancias se miden en metros y las fuerzas en newtons. En el SI, la unidad de carga es el *coulomb* (C). La constante k de la ley de Coulomb tiene el valor

$$k = 8.988 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$$

que suele aproximarse a $9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. A menudo k se reemplaza por $1/4\pi\epsilon_0$, donde $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2$ se llama la **permisividad del espacio libre**. Entonces la ley de Coulomb se convierte en

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{\bullet}q'_{\bullet}}{r^2} \qquad \text{(en el vacío)}$$

Cuando el medio circundante no es el vacío, las fuerzas generadas por las cargas inducidas en el material reducen la fuerza entre las cargas puntuales. Si el material tiene una **constante dieléctrica** K, entonces ϵ_0 en la ley de Coulomb se debe sustituir por $K\epsilon_0 = \epsilon$, donde ϵ se llama *permisividad del material*. Entonces

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_{\bullet}q'_{\bullet}}{r^2} = \frac{k}{K}\frac{q_{\bullet}q'_{\bullet}}{r^2}$$

Para el vacío, $K = 1$; para el aire, $K = 1.0006$.

La ley de Coulomb también se aplica a esferas y cascarones esféricos conductores cargados, así como a esferas uniformes de carga. Esto es cierto siempre que todas éstas sean lo suficientemente pequeñas, en comparación con sus separaciones, de modo que la distribución de carga sobre cada una no se vuelva asimétrica cuando dos o más de ellas interactúen. En dicho caso, r, la distancia entre los centros de las esferas, debe ser mucho mayor que la suma de los radios de las dos esferas.

LA CARGA ESTÁ CUANTIZADA: La magnitud de la carga más pequeña en el universo se denota por e (llamada **cuanto de carga**), donde $e = 1.60218 \times 10^{-19}$ C. Todas las cargas libres, aquellas que se pueden aislar y medir, son múltiplos enteros de e. El electrón tiene una carga de $-e$, mientras que la del protón es $+e$. Aunque existen buenas razones para creer que los quarks portan cargas con magnitudes de $e/3$ y $2e/3$, sólo existen en sistemas ligados que tienen una carga neta igual a un múltiplo entero de e.

CONSERVACIÓN DE LA CARGA: La suma algebraica de las cargas en el universo es constante. Cuando se crea una partícula con carga $+e$, en la vecindad inmediata se crea simultáneamente una partícula con carga $-e$. Cuando una partícula con carga $+e$ desaparece, una partícula con carga $-e$ también desaparece en la vecindad inmediata. Por tanto, la carga neta del universo permanece constante.

EL CONCEPTO DE CARGA DE PRUEBA: Una **carga de prueba** es una carga muy pequeña que se puede usar al hacer mediciones en un sistema eléctrico. Se supone que tal carga, que es pequeña tanto en magnitud como en tamaño físico, tiene un efecto despreciable sobre su medio ambiente.

UN CAMPO ELÉCTRICO existe en cualquier punto del espacio donde una carga de prueba, al colocarse en dicho punto, experimenta una fuerza eléctrica. La dirección del campo eléctrico en un punto es la misma que la dirección de la fuerza experimentada por una carga de prueba *positiva* colocada en el punto.

Se pueden usar líneas de campo eléctrico para esbozar campos eléctricos. La línea a través de un punto tiene la misma dirección que el campo eléctrico en dicho lugar. Donde las líneas de campo están más juntas unas de otras,

la intensidad del campo eléctrico es mayor. Las líneas de campo salen de las cargas positivas (ya que éstas repelen la carga de prueba positiva) y llegan a las cargas negativas (porque éstas atraen a la carga de prueba positiva).

LA INTENSIDAD DEL CAMPO ELÉCTRICO ($\vec{\mathbf{E}}$) en un punto es igual a la fuerza experimentada por una carga de prueba positiva unitaria colocada en dicho punto. Dado que la intensidad del campo eléctrico es una fuerza por unidad de carga, se trata de una cantidad vectorial. Las unidades de $\vec{\mathbf{E}}$ son N/C o (vea el capítulo 25) V/m.

Si una carga q se coloca en un punto donde el campo eléctrico debido a otras cargas es $\vec{\mathbf{E}}$, la carga experimentará una fuerza $\vec{\mathbf{F}}_E$ dada por

$$\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$$

Si q es negativa, entonces $\vec{\mathbf{F}}_E$ será opuesta en sentido a $\vec{\mathbf{E}}$.

CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL. Para calcular E (la magnitud asignada a $\vec{\mathbf{E}}$) debida a una carga puntual $q_\bullet$, se usa la ley de Coulomb. Si una carga puntual $q'_\bullet$ se coloca a una distancia r de la carga $q_\bullet$, experimentará una fuerza

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_\bullet q'_\bullet}{r^2} = q'_\bullet\left(\frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_\bullet}{r^2}\right)$$

Pero si la carga puntual $q'_\bullet$ se coloca en una posición donde el campo eléctrico es E, entonces la fuerza sobre $q'_\bullet$ es

$$F_E = q'_\bullet E$$

Al comparar estas dos expresiones para F_E se observa que el ***campo eléctrico de una carga puntual $q_\bullet$*** es

$$E_\bullet = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{q_\bullet}{r^2}$$

La misma relación se aplica a puntos afuera de una pequeña carga esférica q. Para q positiva, E es positivo y $\vec{\mathbf{E}}$ se dirige radialmente hacia afuera desde q; para q negativa, E es negativo y $\vec{\mathbf{E}}$ se dirige radialmente hacia adentro.

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN: La fuerza experimentada por una carga debido a otras cargas es la suma vectorial de las fuerzas coulombianas que actúan sobre ella debido a esas otras cargas. Similarmente, la intensidad eléctrica $\vec{\mathbf{E}}$ en un punto debida a varias cargas es la suma vectorial de las intensidades debidas a las cargas individuales.

PROBLEMAS RESUELTOS

24.1 [I] Dos esferas pequeñas tienen una separación centro a centro de 1.5 m. Portan cargas idénticas. ¿Aproximadamente cuán grande es la carga sobre cada una si cada esfera experimenta una fuerza de 2 N?

Los diámetros de las esferas son pequeños comparados con la separación de 1.5 m. Por tanto, se puede suponer que las esferas son cargas puntuales. La ley de Coulomb, $F_E = (k/K)q_{\bullet 1}q_{\bullet 2}/r^2$, da (con K aproximada como 1.00)

$$q_{\bullet 1}q_{\bullet 2} = q^2 = \frac{F_E r^2}{k} = \frac{(2\ \text{N})(1.5\ \text{m})^2}{9\times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2} = 5\times 10^{-10}\ \text{C}^2$$

de donde $q = 2\times 10^{-5}$ C.

24.2 [I] Repita el problema 24.1 si la separación entre las esferas es de 1.5 m y se encuentran dentro de una gran tina de agua. La constante dieléctrica del agua es de aproximadamente 80.

De la ley de Coulomb,

$$F_E = \frac{k}{K}\frac{q^2}{r^2}$$

donde K, la constante dieléctrica, ahora es 80. Entonces,

$$q = \sqrt{\frac{F_E r^2 K}{k}} = \sqrt{\frac{(2\ \text{N})(1.5\ \text{m})^2(80)}{9\times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}} = 2\times 10^{-4}\ \text{C}$$

24.3 [I] Un núcleo de helio tiene una carga de $+2e$ y uno de neón de $+10e$, donde e es el cuanto de carga, 1.60×10^{-19} C. Encuentre la fuerza de repulsión ejercida sobre una por la otra cuando están separadas 3.0 nanómetros (1 nm $= 10^{-9}$ m). Suponga que el sistema está en el vacío.

Los núcleos tienen radios del orden de 10^{-15} m. En este caso puede considerarse a los núcleos como cargas puntuales. Entonces

$$F_E = k\frac{q_{\bullet}q'_{\bullet}}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2)(10)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(3.0 \times 10^{-9} \text{ m})^2} = 5.1 \times 10^{-10} \text{ N} = 0.51 \text{ nN}$$

24.4 [II] En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, un electrón ($q = -e$) circunda a un protón ($q' = e$) en una órbita de 5.3×10^{-11} m de radio. La atracción del protón por el electrón aporta la fuerza centrípeta necesaria para mantener al electrón en órbita. Encuentre *a*) la fuerza de atracción eléctrica entre las partículas y *b*) la rapidez del electrón. La masa del electrón es de 9.1×10^{-31} kg.

El electrón y el protón son esencialmente cargas puntuales. Por consiguiente,

a)
$$F_E = k\frac{q_{\bullet}q'_{\bullet}}{r^2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{ N} = 82 \text{ nN}$$

b) La fuerza encontrada en *a*) es la fuerza centrípeta, mv^2/r. Por tanto,

$$8.2 \times 10^{-8} \text{ N} = \frac{mv^2}{r}$$

de la cual

$$v = \sqrt{\frac{(8.2 \times 10^{-8} \text{ N})(r)}{m}} = \sqrt{\frac{(8.2 \times 10^{-8} \text{ N})(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 2.2 \times 10^6 \text{ m/s}$$

24.5 [II] Tres cargas puntuales se colocan sobre el eje x como se muestra en la figura 24-1. Determine la fuerza neta sobre la carga de $-5\ \mu$C debida a las otras dos cargas.

Ya que cargas diferentes se atraen, las fuerzas sobre la carga de $-5\ \mu$C son como se muestra. Las *magnitudes* de $\vec{\mathbf{F}}_{E3}$ y de $\vec{\mathbf{F}}_{E8}$ están dadas por la ley de Coulomb:

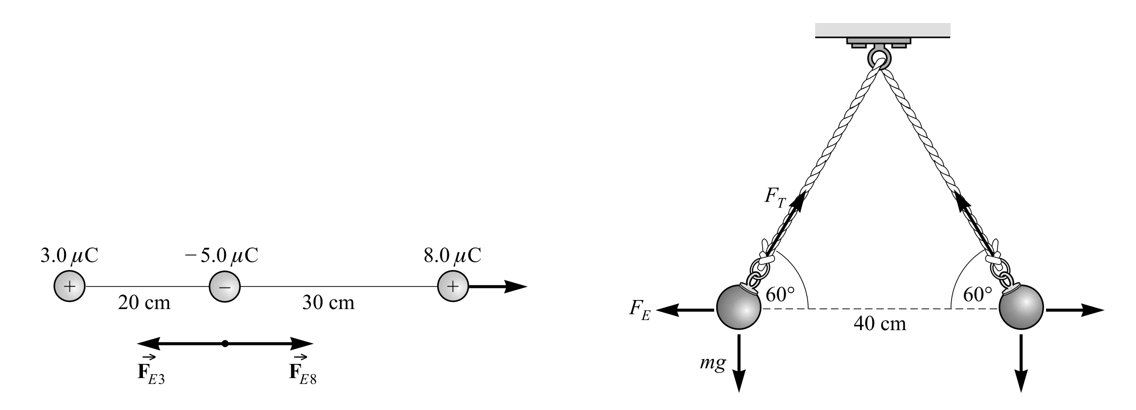


Figura 24-1 **Figura 24-2**

$$F_{E3} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3.0 \times 10^{-6} \text{ C})(5.0 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.20 \text{ m})^2} = 3.4 \text{ N}$$

$$F_{E8} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(8.0 \times 10^{-6} \text{ C})(5.0 \times 10^{-6} \text{ C})}{(0.30 \text{ m})^2} = 4.0 \text{ N}$$

Note dos cosas acerca de los cálculos: 1) deben usarse las unidades apropiadas (metros y coulombs). 2) Puesto que sólo se desean las magnitudes de las fuerzas, *no se consideraron los signos de las cargas*. (Es decir, se

utilizaron sus valores absolutos.) La dirección de cada fuerza está dada en el diagrama, la cual se obtuvo a partir de la inspección de la situación.

Del diagrama, la fuerza resultante sobre la carga del centro es

$$F_E = F_{E8} - F_{E3} = 4.0 \text{ N} - 3.4 \text{ N} = 0.6 \text{ N}$$

y está en la dirección $+x$.

24.6 [II] Determine la razón de la fuerza eléctrica de Coulomb F_E a la fuerza gravitacional F_G entre dos electrones en el vacío.

De la ley de Coulomb y la ley de Newton de gravitación,

$$F_E = k\frac{q_\bullet^2}{r^2} \qquad \text{y} \qquad F_G = G\frac{m^2}{r^2}$$

Por tanto,

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{kq_\bullet^2/r^2}{Gm^2/r^2} = \frac{kq_\bullet^2}{Gm^2}$$

$$= \frac{(9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})^2} = 4.2 \times 10^{42}$$

Como se ve, la fuerza eléctrica es mucho más intensa que la fuerza gravitacional.

24.7 [II] Como se muestra en la figura 24-2, dos bolas idénticas, cada una de 0.10 g de masa, portan cargas idénticas y están suspendidas por dos hilos de igual longitud. En el equilibrio, se colocan ellas mismas como se muestra. Encuentre la carga sobre cada bola.

Considere la bola de la izquierda. Está en equilibrio bajo la acción de tres fuerzas: 1) la tensión F_T de la cuerda; 2) la fuerza de gravedad,

$$mg = (1.0 \times 10^{-4} \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9.8 \times 10^{-4} \text{ N}$$

y 3) la fuerza de repulsión de Coulomb F_E.

Al escribir $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ para la bola de la izquierda, se obtiene

$$F_T \cos 60° - F_E = 0 \qquad \text{y} \qquad F_T \text{ sen } 60° - mg = 0$$

De la segunda ecuación,

$$F_T = \frac{mg}{\text{sen } 60°} = \frac{9.8 \times 10^{-4} \text{ N}}{0.866} = 1.13 \times 10^{-3} \text{ N}$$

Al sustituir en la primera ecuación se obtiene

$$F_E = F_T \cos 60° = (1.13 \times 10^{-3} \text{ N})(0.50) = 5.7 \times 10^{-4} \text{ N}$$

Pero ésta es la fuerza de Coulomb, kqq'/r^2. Por tanto,

$$qq' = q^2 = \frac{F_E r^2}{k} = \frac{(5.7 \times 10^{-4} \text{ N})(0.40 \text{ m})^2}{9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}$$

de donde $q = 0.10\ \mu\text{C}$.

24.8 [II] Las cargas que se muestran en la figura 24-3 son estacionarias. Encuentre la fuerza sobre la carga de 4.0 μC, debida a las otras dos cargas.

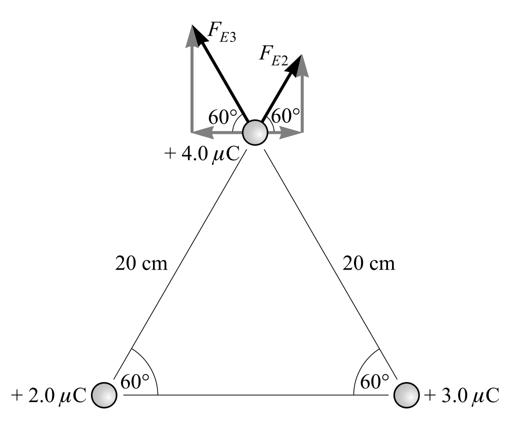


Figura 24-3

De la ley de Coulomb se tiene

$$F_{E2} = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.20\ \text{m})^2} = 1.8\ \text{N}$$
$$F_{E3} = k\frac{qq'}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(3.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(4.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.20\ \text{m})^2} = 2.7\ \text{N}$$

Las componentes de la fuerza resultante sobre la carga de 4 μC son

$$F_{Ex} = F_{E2} \cos 60° - F_{E3} \cos 60° = (1.8 - 2.7)(0.50)\text{N} = -0.45\ \text{N}$$
$$F_{Ey} = F_{E2} \operatorname{sen} 60° + F_{E3} \operatorname{sen} 60° = (1.8 + 2.7)(0.866)\ \text{N} = 3.9\ \text{N}$$

de modo que $$F_E = \sqrt{F_{Ex}^2 + F_{Ey}^2} = \sqrt{(0.45)^2 + (3.9)^2}\ \text{N} = 3.9\ \text{N}$$

La resultante forma un ángulo de $\tan^{-1}(0.45/3.9) = 7°$ con el eje y positivo, es decir, $\theta = 97°$.

24.9 [II] Dos pequeñas esferas cargadas se colocan sobre el eje x: $+3.0\ \mu$C en $x = 0$ y $-5.0\ \mu$C en $x = 40$ cm. ¿Dónde se debe colocar una tercera carga q si la fuerza que experimenta debe ser cero?

La situación se muestra en la figura 24-4. Se sabe que q se debe colocar en alguna parte sobre el eje x. (¿Por qué?) Suponga que q es positiva. Cuando se coloca en el intervalo BC, las dos fuerzas sobre ella están en la misma dirección y no se pueden cancelar. Cuando se coloca a la derecha de C, la fuerza de atracción desde la carga de $-5.0\ \mu$C siempre es mayor que la repulsión de la carga de $+3.0\ \mu$C. Por tanto, la fuerza sobre q no puede ser cero en esa región. Sólo en la región a la izquierda de B es posible que ocurra una cancelación. (¿Puede demostrar que esto también es cierto si q es negativa?)

Para q colocada como se muestra, cuando la fuerza neta sobre ella es cero, se tiene $F_3 = F_5$ y, por tanto, para distancias en metros,

$$k\frac{q(3.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{d^2} = k\frac{q(5.0 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(0.40\ \text{m} + d)^2}$$

Después de cancelar k, q y 10^{-6} C de cada lado, se multiplica en cruz para obtener

$$5d^2 = 3.0(0.40 + d)^2 \qquad \text{o} \qquad d^2 - 1.2d - 0.24 = 0$$

Al usar la fórmula cuadrática se encuentra

$$d = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1.2 \pm \sqrt{1.44 + 0.96}}{2} = 0.60 \pm 0.775\ \text{m}$$

Por tanto, se tienen dos valores para d: 1.4 m y -0.18 m. La primera es la respuesta correcta; la segunda proporciona el punto en BC donde las dos fuerzas tienen la misma magnitud pero no se cancelan.

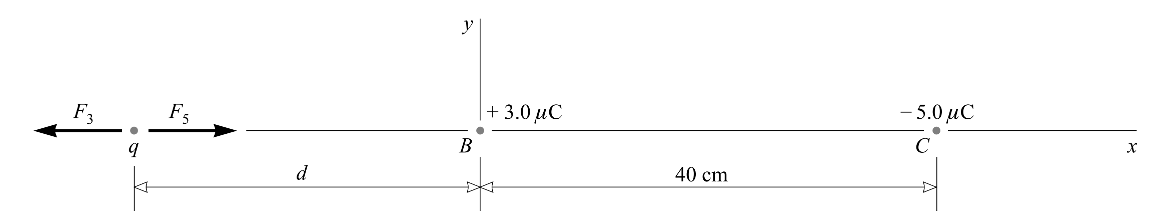


Figura 24-4

24.10 [II] Calcule *a*) el campo eléctrico E en el aire a una distancia de 30 cm de una carga puntual $q_{\bullet 1} = 5.0 \times 10^{-9}$ C. *b*) la fuerza sobre una carga $q_{\bullet 2} = 4.0 \times 10^{-10}$ C colocada a 30 cm de $q_{\bullet 1}$ y *c*) la fuerza sobre una carga $q_{\bullet 3} = -4.0 \times 10^{-10}$ C colocada a 30 cm de $q_{\bullet 1}$ (en ausencia de $q_{\bullet 2}$).

a) $$E = k\frac{q_{\bullet 1}}{r^2} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{5.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{(0.30\ \text{m})^2} = 0.50\ \text{kN/C}$$

dirigida hacia afuera de $q_{\bullet 1}$.

b) $$F_E = Eq_{\bullet 2} = (500 \text{ N/C})(4.0 \times 10^{-10} \text{ C}) = 2.0 \times 10^{-7} \text{ N} = 0.20 \ \mu\text{N}$$

dirigida hacia afuera de $q_{\bullet 1}$.

c) $$F_E = Eq_{\bullet 3} = (500 \text{ N/C})(-4.0 \times 10^{-10} \text{ C}) = -0.20 \ \mu\text{N}$$

Esta fuerza está dirigida hacia $q_{\bullet 1}$.

24.11 [III] La situación que se muestra en la figura 24-5 representa dos pequeñas esferas cargadas. Encuentre *a*) el campo eléctrico E en el punto P, *b*) la fuerza sobre una carga de -4.0×10^{-8} C colocada en P y *c*) el lugar donde el campo eléctrico sería cero (en ausencia de la carga -4.0×10^{-8} C).

Figura 24-5

a) Una carga de prueba positiva colocada en P será repelida hacia la derecha por la carga positiva q_1 y atraída hacia la derecha por la carga negativa q_2. En virtud de que $\vec{\mathbf{E}}_1$ y $\vec{\mathbf{E}}_2$ tienen la misma dirección, se pueden sumar sus magnitudes para obtener la magnitud del campo resultante:

$$E = E_1 + E_2 = k\frac{|q_1|}{r_1^2} + k\frac{|q_2|}{r_2^2} = \frac{k}{r_1^2}(|q_1| + |q_2|)$$

donde $r_1 = r_2 = 0.05$ m, y $|q_1|$ y $|q_2|$ son los valores absolutos de q_1 y q_2. Por tanto,

$$E = \frac{9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2}{(0.050 \text{ m})^2}(25 \times 10^{-8} \text{ C}) = 9.0 \times 10^5 \text{ N/C}$$

dirigido hacia la derecha.

b) Una carga q colocada en P experimentará una fuerza Eq. En consecuencia,

$$F_E = Eq = (9.0 \times 10^5 \text{ N/C})(-4.0 \times 10^{-8} \text{ C}) = -0.036 \text{ N}$$

El signo negativo indica que la fuerza se dirige hacia la izquierda. Esto es correcto porque el campo eléctrico representa la fuerza sobre una carga positiva. La fuerza sobre una carga negativa es en sentido opuesto al campo.

c) Al razonar como en el problema 24.9 se concluye que el campo será cero en algún lugar a la derecha de la carga de -5.0×10^{-8} C. Sea d la distancia a dicho punto desde la carga de -5.0×10^{-8} C. En dicho punto,

$$E_1 - E_2 = 0$$

puesto que el campo debido a la carga positiva es hacia la derecha, mientras el campo de la carga negativa es hacia la izquierda. Por ende

$$k\left(\frac{|q_1|}{r_1^2} - \frac{|q_2|}{r_2^2}\right) = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left[\frac{20 \times 10^{-8} \text{ C}}{(d + 0.10 \text{ m})^2} - \frac{5.0 \times 10^{-8} \text{ C}}{d^2}\right] = 0$$

Al simplificar se obtiene

$$3d^2 - 0.2d - 0.01 = 0$$

lo cual da $d = 0.10$ m y -0.03 m. Sólo el signo más tiene significado y por consiguiente $d = 0.10$ m. El punto en cuestión está a 10 cm hacia la derecha de la carga negativa.

24.12 [II] Tres cargas están colocadas sobre tres esquinas de un cuadrado, como se muestra en la figura 24-6. Cada lado del cuadrado es de 30.0 cm. Calcule $\vec{\mathbf{E}}$ en la cuarta esquina. ¿Cuál sería la fuerza sobre una carga de 6.00 μC situada en la esquina libre?

Las contribuciones de las tres cargas al campo en la esquina libre son como se indica. Observe en particular las direcciones de cada una. Sus magnitudes están dadas por $E = kq/r^2$ y son:

$$E_4 = 4.00 \times 10^5 \text{ N/C} \qquad E_8 = 4.00 \times 10^5 \text{ N/C}$$
$$E_5 = 5.00 \times 10^5 \text{ N/C}$$

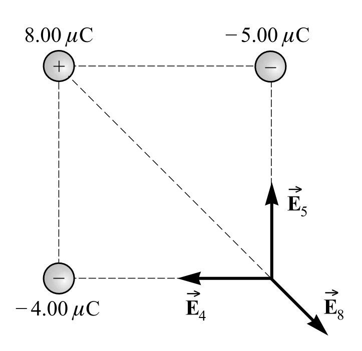


Figura 24-6

Ya que el vector E_8 hace un ángulo de 45.0° con la horizontal, se tiene

$$E_x = E_8 \cos 45.0° - E_4 = -1.17 \times 10^5 \text{ N/C}$$
$$E_y = E_5 - E_8 \cos 45.0° = 2.17 \times 10^5 \text{ N/C}$$

Al usar $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$ y $\tan\theta = E_y/E_x$, se encuentra que $E = 2.47 \times 10^5$ N a 118°.

La fuerza sobre una carga colocada en la esquina vacía simplemente sería $F_E = Eq$. Ya que $q = 6.00$ 10^{-6} C, se tiene $F_E = 1.48$ N a un ángulo de 118°.

24.13 [III] Dos placas metálicas cargadas en el vacío están separadas 15 cm, como se muestra en la figura 24-7. El campo eléctrico entre las placas es uniforme y tiene una intensidad $E = 3\,000$ N/C. Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) se libera desde el reposo en el punto P justo afuera de la placa negativa. *a*) ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar la otra placa? *b*) ¿Cuál será la rapidez a la que viajará justo antes de golpearla?

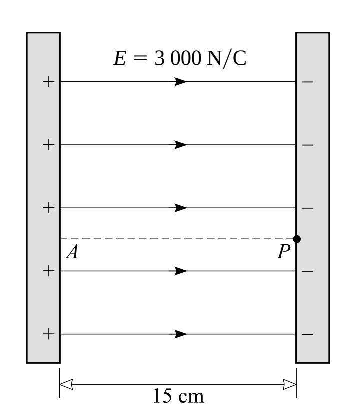


Figura 24-7

Las líneas del campo eléctrico muestran la fuerza sobre una carga positiva. (Una carga positiva sería repelida hacia la derecha por la placa positiva y atraída en la misma dirección por la placa negativa.) Un electrón, por ser negativo, experimentará una fuerza en sentido opuesto, hacia la izquierda, de magnitud

$$F_E = |q|\,E = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(3\,000 \text{ N/C}) = 4.8 \times 10^{-16} \text{ N}$$

Debido a esta fuerza, el electrón experimenta una aceleración hacia la izquierda dada por

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{4.8 \times 10^{-16} \text{ N}}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 5.3 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$$

En el problema de movimiento para el electrón que se libera desde la placa negativa y viaja hacia la placa positiva se tiene

$$v_i = 0 \qquad x = 0.15 \text{ m} \qquad a = 5.3 \times 10^{14} \text{ m/s}^2$$

a) De $x = v_i t + \frac{1}{2}at^2$ se tiene

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{(2)(0.15 \text{ m})}{5.3 \times 10^{14} \text{ m/s}^2}} = 2.4 \times 10^{-8} \text{ s}$$

b) $$v = v_i + at = 0 + (5.3 \times 10^{14} \text{ m/s}^2)(2.4 \times 10^{-8} \text{ s}) = 1.30 \times 10^7 \text{ m/s}$$

Como se verá en el capítulo 41, los efectos relativistas empiezan a ser importantes para una rapidez superior a esta. Por tanto, este tratamiento se debe modificar para partículas muy rápidas.

24.14 [I] Suponga en la figura 24-7 que un electrón se dispara en línea recta hacia arriba desde el punto P con una rapidez de 5×10^6 m/s. ¿A qué distancia sobre el punto A golpea la placa positiva?

Este es un problema de proyectiles. (Dado que la fuerza gravitacional es muy pequeña comparada con la fuerza eléctrica, se puede ignorar la gravedad.) La única fuerza que actúa sobre el electrón después de que se libera es la fuerza eléctrica horizontal. En el problema 24.13*a* se encontró que, bajo la acción de esta fuerza, el electrón tiene un tiempo de vuelo de 2.4×10^{-8} s. El desplazamiento vertical en ese tiempo es

$$(5.0 \times 10^6 \text{ m/s})(2.4 \times 10^{-8} \text{ s}) = 0.12 \text{ m}$$

El electrón golpea la placa positiva 12 cm arriba del punto A.

24.15 [II] En la figura 24-7 un protón ($q_{\bullet} = +e$, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se dispara con una rapidez de 2.00×10^5 m/s desde A hacia P. ¿Cuál será su rapidez justo antes de golpear la placa en el punto P?

Primero se calcula la aceleración al conocer el campo eléctrico y a partir de ella la fuerza:

$$a = \frac{F_E}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(3\,000\ \text{N/C})}{1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 2.88 \times 10^{11}\ \text{m/s}^2$$

Para el problema del movimiento horizontal se tiene

$$v_i = 2.00 \times 10^5\ \text{m/s} \qquad x = 0.15\ m \qquad a = 2.88 \times 10^{11}\ \text{m/s}^2$$

Se usa $v_f^2 = v_i^2 + 2ax$ para encontrar

$$v_f = \sqrt{v_i^2 + 2ax} = \sqrt{(2.00 \times 10^5\ \text{m/s})^2 + (2)(2.88 \times 10^{11}\ \text{m/s}^2)(0.15\ \text{m})} = 356\ \text{km/s}$$

24.16 [II] Dos pequeñas pelotas metálicas idénticas tienen cargas q_1 y q_2. La fuerza repulsiva que una ejerce sobre la otra cuando están separadas 20 cm es de 1.35×10^{-4} N. Después de que las bolas se tocan y luego se vuelven a separar a 20 cm, se encuentra que la fuerza repulsiva es de 1.406×10^{-4} N. Determine q_1 y q_2.

Dado que la fuerza es repulsiva, q_1 y q_2 son del mismo signo. Después que las pelotas se tocan, comparten carga igualmente, de modo que cada una tiene una carga de $\frac{1}{2}(q_1 + q_2)$. Al escribir la ley de Coulomb para las dos situaciones descritas, se tiene

$$0.000135\ \text{N} = k\frac{q_1 q_2}{0.040\ \text{m}^2}$$

y

$$0.0001406\ \text{N} = k\frac{[\frac{1}{2}(q_1 + q_2)]^2}{0.040\ \text{m}^2}$$

Después de sustituir k, estas ecuaciones se reducen a

$$q_1 q_2 = 6.00 \times 10^{-16}\ \text{C}^2 \qquad \text{y} \qquad q_1 + q_2 = 5.00 \times 10^{-8}\ \text{C}$$

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente se obtiene $q_1 = 20$ nC y $q_2 = 30$ nC (o viceversa). Alternativamente, ambas cargas podrían haber sido negativas.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

24.17 [I] ¿Cuántos electrones están contenidos en 1.0 C de carga? ¿Cuál es la masa de los electrones en 1.0 C de carga? **Resp.** 6.2×10^{18} electrones, 5.7×10^{-12} kg.

24.18 [I] Si dos cargas puntuales iguales de 1 C están separadas en aire por una distancia de 1 km, ¿cuál sería la fuerza entre ellas? **Resp.** 9 kN de repulsión.

24.19 [I] Determine la fuerza entre dos electrones libres separados 1.0 angstrom (10^{-10} m) en el vacío. **Resp.** 23 nN de repulsión.

24.20 [I] ¿Cuál es la fuerza de repulsión entre dos núcleos de argón que están separados 1.0 nm (10^{-9} m) en el vacío? La carga de un núcleo de argón es de $+18e$. **Resp.** 75 nN.

24.21 [I] Dos pequeñas bolas igualmente cargadas están separadas 3 cm en el aire y se repelen con una fuerza de 40 μN. Calcule la carga de cada bola. **Resp.** 2 nC.

24.22 [II] Tres cargas puntuales se colocan en los siguientes puntos sobre el eje x: $+2.0\ \mu$C en $x = 0$, $-3.0\ \mu$C en $x =$ 40 cm y $-5.0\ \mu$C en $x = 120$ cm. Encuentre la fuerza *a*) sobre la carga de $-3.0\ \mu$C, *b*) sobre la carga de $-5.0\ \mu$C. **Resp.** *a*) -0.55 N; *b*) 0.15 N.

24.23 [II] Cuatro cargas puntuales iguales de $+3.0\ \mu$C se colocan en las cuatro esquinas de un cuadrado cuyo lado es de 40 cm. Determine la fuerza sobre cualquiera de las cargas. **Resp.** 0.97 N hacia afuera a lo largo de la diagonal.

24.24 [II] Cuatro cargas puntuales de igual magnitud (3.0 μC) se colocan en las esquinas de un cuadrado de 40 cm de lado. Dos, diagonalmente opuestas, son positivas y las otras dos son negativas. Determine la fuerza sobre una de las cargas negativas. **Resp.** 0.46 N hacia adentro a lo largo de la diagonal.

24.25 [II] Cargas de +2.0, + 3.0 y −8.0 μC se colocan en los vértices de un triángulo equilátero cuyo lado es de 10 cm. Calcule la magnitud de la fuerza que actúa sobre la carga de −8.0 μC debida a las otras dos cargas. **Resp.** 31 N.

24.26 [II] Un carga de (+5.0 μC) se coloca en $x = 0$ y una segunda carga (+7.0 μC) en $x = 100$ cm. ¿Dónde se puede colocar una tercera carga para que la fuerza neta que experimente debida a las otras dos sea cero? **Resp.** en $x = 46$ cm.

24.27 [II] Dos diminutas bolas metálicas idénticas portan cargas de +3 nC y −12 nC. Están separadas 3 cm. *a*) Calcule la fuerza de atracción. *b*) Ahora las bolas se juntan y después se separan a 3 cm. Describa las fuerzas que ahora actúan sobre ellas. **Resp.** *a*) 4×10^{-4} N de atracción; *b*) 2×10^{-4} N de repulsión.

24.28 [II] En cierto punto del espacio, una carga de +6.0 μC experimenta una fuerza de 2.0 mN en la dirección +*x*. *a*) ¿Cuál era el campo eléctrico en ese punto antes de que la carga se colocara ahí? *b*) Describa la fuerza que experimentaría una carga de −2.0 μC si se usara en lugar de la carga de +6.0 μC **Resp.** *a*) 0.33 kN/C en la dirección +*x*; *b*) 0.67 mN en la dirección −*x*.

24.29 [I] Una carga puntual de -3.0×10^{-5} C se coloca en el origen de coordenadas. Encuentre el campo eléctrico en el punto $x = 5.0$ m sobre el eje *x*. **Resp.** 11 kN/C en la dirección −*x*.

24.30 [III] Cuatro cargas de igual magnitud (4.0 μC) se colocan en las cuatro esquinas de un cuadrado de 20 cm de lado. Determine el campo eléctrico en el centro del cuadrado *a*) si todas las cargas son positivas, *b*) si los signos de las cargas se alternan alrededor del perímetro del cuadrado, *c*) si las cargas tienen la siguiente secuencia alrededor del cuadrado: más, más, menos, menos. **Resp.** *a*) cero; *b*) cero; *c*) 5.1 mN/C hacia el lado negativo.

24.31 [II] Una bola de 0.200 g cuelga de un hilo en un campo eléctrico vertical uniforme de 3.00 kN/C dirigido hacia arriba. ¿Cuál es la carga sobre la bola si la tensión en el hilo es *a*) cero y *b*) 4.00 mN? **Resp.** *a*) +653 nC; *b*) −680 nC.

24.32 [II] Determine la aceleración de un protón ($q = +e$, $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) en un campo eléctrico de 0.50 kN/C de intensidad. ¿Cuántas veces es más grande esta aceleración que la debida a la gravedad? **Resp.** 4.8×10^{10} m/s^2, 4.9×10^9.

24.33 [II] Una pequeña bola de 0.60 g tiene una carga de 8.0 μC de magnitud. Está suspendida por un hilo vertical en un campo eléctrico descendente de 300 N/C. ¿Cuál es la tensión en el hilo si la carga de la bola es *a*) positiva, *b*) negativa? **Resp.** *a*) 8.3 mN; *b*) 3.5 mN.

24.34 [III] La pequeña bola en el extremo del hilo de la figura 24-8 tiene una masa de 0.60 g y está en un campo eléctrico horizontal de 700 N/C de intensidad. Se encuentra en equilibrio en la posición mostrada. ¿Cuáles son la magnitud y el signo de la carga de la bola? **Resp.** −3.1 μC.

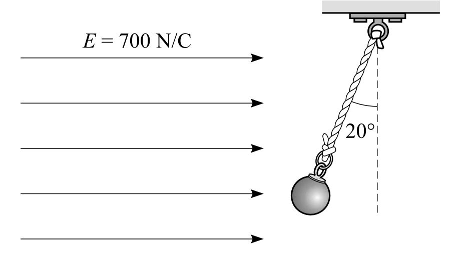


Figura 24-8

24.35 [III] Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg) se proyecta hacia afuera a lo largo del eje +*x* con una rapidez inicial de 3.0×10^6 m/s. Se mueve 45 cm y se detiene debido a un campo eléctrico uniforme en la región. Encuentre la magnitud y dirección del campo. **Resp.** 57 N/C en la dirección +*x*.

24.36 [III] Una partícula de masa *m* y carga −*e* se proyecta con rapidez horizontal v en un campo eléctrico (*E*) dirigido hacia abajo. Encuentre *a*) las componentes horizontal y vertical de su aceleración, a_x y a_y; *b*) sus desplazamientos horizontal y vertical, *x* y *y*, después de un tiempo *t*; *c*) la ecuación de su trayectoria. **Resp.** *a*) $a_x = 0$, $a_y = Ee/m$; *b*) $x = vt$, $y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}(Ee/m)t^2$; *c*) $y = \frac{1}{2}(Ee/mv^2)x^2$ (una parábola).

POTENCIAL ELÉCTRICO Y CAPACITANCIA

25

LA DIFERENCIA DE POTENCIAL entre un punto A y un punto B es el trabajo que se hace contra la fuerza eléctrica para llevar una carga de prueba positiva *unitaria* desde A hasta B. La diferencia de potencial entre A y B se representa por $V_B - V_A$ o por V. Sus unidades son de trabajo por carga (joules/coulomb) y se llaman **volts** (V):

$$1 \text{ volt (V)} = 1 \text{ J/C}$$

Ya que el trabajo es una cantidad escalar, la diferencia de potencial también lo es. Lo mismo que el trabajo, la diferencia de potencial puede ser positiva o negativa.

El trabajo W que se hace para mover una carga q de un punto A a un segundo punto B es

$$W = q(V_B - V_A) = qV$$

donde se debe dar a la carga los signos apropiados (+ o −). Si tanto $(V_B - V_A)$ como q son positivos (o negativos), el trabajo realizado es positivo. Si $(V_B - V_A)$ y q tienen signos opuestos, el trabajo efectuado es negativo.

POTENCIAL ABSOLUTO: El potencial absoluto en un punto es el trabajo que se hace contra la fuerza eléctrica para llevar una carga de prueba positiva unitaria desde el infinito hasta dicho punto. Por consiguiente, el potencial absoluto en un punto B es la diferencia de potencial desde $A = \infty$ hasta B.

Considere una carga puntual q en el vacío y un punto P que se encuentra a una distancia r de la carga puntual. El potencial absoluto en P debido a la carga q es

$$V = k\frac{q}{r}$$

donde $k = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$ es la constante de Coulomb. El potencial absoluto en el infinito (en $r = \infty$) es cero.

Por el principio de superposición y la naturaleza escalar de la diferencia de potencial, el potencial absoluto en un punto debido a un número de cargas puntuales es

$$V = k\sum\frac{q_i}{r_i}$$

donde r_i son las distancias desde las cargas q_i al punto de referencia. Las cargas negativas q contribuyen con términos negativos al potencial, mientras que las cargas positivas q aportan términos positivos.

El potencial absoluto debido a una esfera cargada uniformemente en puntos *fuera* de la esfera o *sobre* su superficie es $V = kq/r$, donde q es la carga de la esfera. Este potencial es el mismo que el producido por una carga puntual q colocada en el centro de la esfera.

ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA (EP_E)**:** Para llevar una carga q desde el infinito hasta un punto donde el potencial absoluto es V, sobre la carga se debe realizar un trabajo qV. Este trabajo aparece como energía potencial eléctrica (EP_E) almacenada en la carga.

De manera similar, cuando se lleva una carga a través de una **diferencia de potencial** V, sobre la carga se debe realizar un trabajo qV. Este trabajo da como resultado un cambio de qV en la EP_E de la carga. Para una *subida* en el potencial, V será positivo y la EP_E aumentará si q es positiva. Pero en el caso de una *caída* de potencial, V será negativo y la EP_E de la carga disminuirá si q es positiva.

RELACIÓN ENTRE V **Y** E**:** Suponga que en cierta región el campo eléctrico es uniforme y está en la dirección x. Sea E_x su magnitud. Puesto que E_x es la fuerza sobre una carga de prueba positiva unitaria, el trabajo que se hace para mover dicha carga una distancia x es (de la ecuación $W = F_x x$)

$$V = E_x x$$

El campo entre dos grandes placas metálicas paralelas con cargas opuestas es uniforme. Por tanto, se puede usar esta ecuación para relacionar el campo eléctrico E entre las placas con la separación de las placas d y con su diferencia de potencial V. Para placas paralelas,

$$V = Ed$$

ELECTRÓN VOLT, UNA UNIDAD DE ENERGÍA: El trabajo realizado para llevar una carga $+e$ (coulombs) a través de una subida en el potencial de exactamente 1 volt se define como 1 **electrón volt** (eV). Por tanto,

$$1 \text{ eV} = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

De manera equivalente,

$$\text{Trabajo o energía (en eV)} = \frac{\text{trabajo (en joules)}}{e}$$

UN CAPACITOR o *condensador* es un dispositivo que almacena carga. Con frecuencia, aunque ciertamente no siempre, consiste en dos conductores separados por un aislante o dieléctrico. La **capacitancia** (C) de un capacitor se define como

$$\text{Capacitancia} = \frac{\text{magnitud de la carga } q \text{ en cualquier conductor}}{\text{magnitud de la diferencia de potencial } V \text{ entre los conductores}}$$

Para q en coulombs y V en volts, C está en **farads** (F).

CAPACITOR DE PLACAS PARALELAS: En un capacitor de placas paralelas, cada área A y separadas una distancia d, su capacitancia está dada por

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d}$$

donde $K = \epsilon/\epsilon_0$ es la constante dieléctrica adimensional (vea el capítulo 24) del material no conductor (el *dieléctrico*) entre las placas, y

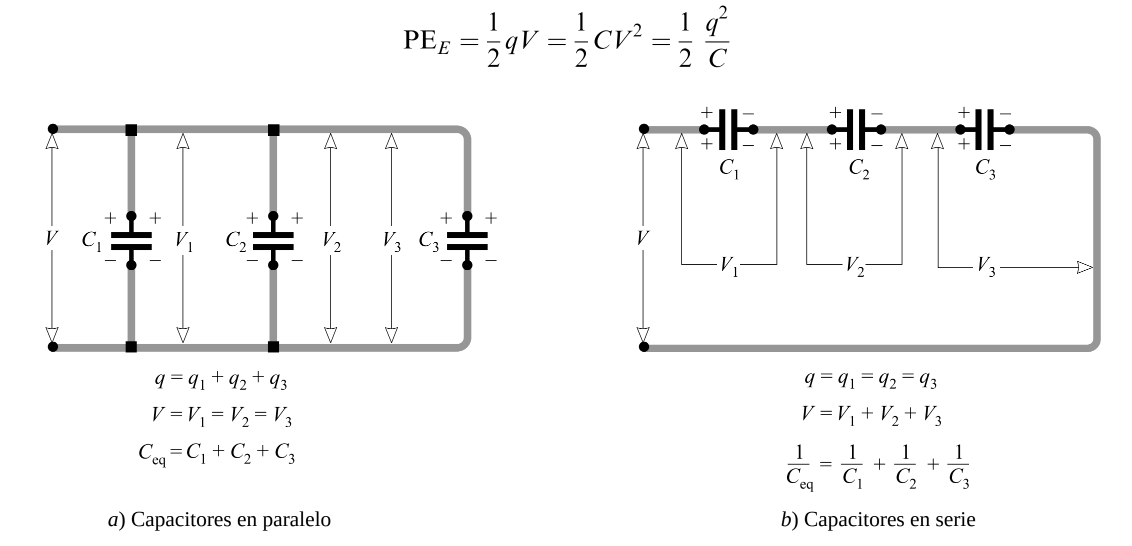
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

Para el vacío, $K = 1$, de modo que un capacitor de placas paralelas lleno con un dieléctrico tiene una capacitancia K veces mayor que el mismo capacitor con vacío entre sus placas. Este resultado es válido para todo tipo de capacitores, sin importar su geometría.

CAPACITORES EN PARALELO Y EN SERIE: Como se muestra en la figura 25-1, las capacitancias se suman para capacitores en paralelo, mientras que para capacitores en serie se suman las capacitancias recíprocas.

ENERGÍA ALMACENADA EN UN CAPACITOR: La energía (EP_E) almacenada en un capacitor de capacitancia C que tiene una carga q y una diferencia potencial V es

$$PE_E = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$



a) Capacitores en paralelo

b) Capacitores en serie

Figura 25-1

PROBLEMAS RESUELTOS

25.1 [I] En la figura 25-2, la diferencia de potencial entre las placas metálicas es de 40 V. *a*) ¿Qué placa tiene el mayor potencial? *b*) ¿Cuánto trabajo se debe hacer para llevar una carga de +3.0 C desde *B* hasta *A*? ¿Desde *A* hasta *B*? *c*) ¿Cómo se sabe que el campo eléctrico está en la dirección indicada? *d*) Si la separación de las placas es de 5.0 mm, ¿cuál es la magnitud de $\vec{\mathbf{E}}$?

a) Una carga de prueba positiva entre las placas es repelida por *A* y atraída por *B*. La carga de prueba positiva se moverá de *A* hacia *B*, y por tanto *A* está a un potencial más alto.

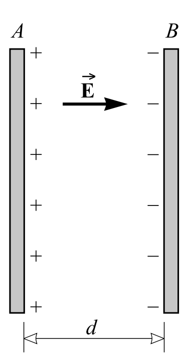


Figura 25-2

b) La magnitud del trabajo realizado para llevar la carga *q* a través de una diferencia de potencial *V* es *qV*. En consecuencia, la magnitud del trabajo efectuado en la situación presente es

$$W = (3.0\ \text{C})(40\ \text{V}) = 0.12\ \text{kJ}$$

Puesto que una carga positiva en medio de las placas es repelida por *A* se debe hacer un trabajo positivo (+120 J) para arrastrar la carga de +3.0 C desde *B* hasta *A*. Para retener la carga conforme se mueve de *A* hasta *B*, se efectúa trabajo negativo (−120 J).

c) Una carga de prueba positiva entre las placas experimenta una fuerza dirigida desde *A* hacia *B* y ésta es, por definición, la dirección del campo.

d) Para placas paralelas, $V = Ed$. Por tanto,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{40\ \text{V}}{0.0050\ \text{m}} = 8.0\ \text{kV/m}$$

Note que las unidades del campo eléctrico en el SI, V/m y N/C, son idénticas.

25.2 [I] ¿Cuánto trabajo se requiere para llevar a un electrón desde la terminal positiva de una batería de 12 V hasta la terminal negativa?

Al ir de la terminal positiva a la negativa se debe pasar a través de una caída de potencial, que en este caso es $V = -12$ V. Entonces

$$W = qV = (-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(-12\ \text{V}) = 1.9 \times 10^{-18}\ \text{J}$$

Como comprobación, se observa que el electrón, si se deja solo, se moverá de la terminal negativa a la positiva por tener una carga negativa. En consecuencia, se debe hacer un trabajo positivo para llevarla en la dirección contraria tal como se pide aquí.

25.3 [I] ¿Cuánta energía potencial pierde un protón cuando pasa a través de una caída de potencial de 5 kV?

El protón tiene una carga positiva. Por consiguiente se moverá de una región de mayor potencial a una región donde el potencial es menor, si está en libertad de hacerlo. Su cambio en energía potencial conforme se mueve a través de una diferencia de potencial *V* es *Vq*. En este caso, $V = -5$ kV. Por tanto,

$$\text{Cambio en EP}_E = Vq = (-5 \times 10^3\ \text{V})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -8 \times 10^{-16}\ \text{J}$$

25.4 [II] Un electrón parte del reposo y cae a través de una subida de potencial de 80 V. ¿Cuál es su rapidez final?

Las cargas positivas tienden a moverse a través de una caída de potencial; las cargas negativas, tales como los electrones, tienden a moverse a través de subidas de potencial.

$$\text{Cambio en EP}_E = Vq = (80\ \text{V})(-1.6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -1.28 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

Esta pérdida en EP_E aparece como EC en el electrón:

$$\text{EP}_E \text{ perdida} = \text{EC ganada}$$

$$128 \times 10^{-17}\ \text{J} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - 0$$

$$v_f = \sqrt{\frac{(1.28 \times 10^{-17}\ \text{J})(2)}{9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 5.3 \times 10^6\ \text{m/s}$$

25.5 [I] *a*) ¿Cuál es el potencial absoluto para cada una de las siguientes distancias desde una carga de $+2.0\ \mu$C: $r = 10$ cm y $r = 50$ cm? *b*) ¿Cuánto trabajo se requiere para mover una carga de 0.05 μC desde un punto en $r = 50$ cm hasta un punto en $r = 10$ cm?

a)
$$V_{10} = k\frac{q}{r} = (9.0\times10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{2.0\times10^{-6}\ \text{C}}{0.10\ \text{m}} = 1.8\times10^{5}\ \text{V}$$
$$V_{50} = \frac{10}{50}V_{10} = 36\ \text{kV}$$

b)
$$\text{Trabajo} = q(V_{10} - V_{50}) = (5\times10^{-8}\ \text{C})(1.44\times10^{5}\ \text{V}) = 7.2\ \text{mJ}$$

25.6 [II] Suponga, en el problema 25.5*a*, donde hay una carga de $+2.0\ \mu$C, que el protón se suelta en $r = 10$ cm. ¿Cuán rápido se moverá al pasar por un punto en $r = 50$ cm?

Esta es una situación donde EP_E se torna en EC. Conforme el protón se mueve de un punto a otro, hay una caída de potencial de

$$\text{Caída de potencial} = 1.80\times10^{5}\ \text{V} - 0.36\times10^{5}\ \text{V} = 1.44\times10^{5}\ \text{V}$$

El protón gana una EC al moverse a través de esta caída de potencial:

$$\text{EC ganada} = \text{EP}_E\ \text{perdida}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = qV$$
$$\tfrac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\ \text{kg})v_f^2 - 0 = (1.6\times10^{-19}\ \text{C})(1.44\times10^{5}\ \text{V})$$

de donde $v_f = 5.3\times10^{6}$ m/s.

25.7 [II] En la figura 25-2, que representa dos placas paralelas cargadas, sea $E = 2.0$ kV/m y $d = 5.0$ mm. Un protón se dispara desde la placa B hacia la placa A con una rapidez inicial de 100 km/s. ¿Cuál será su rapidez justo antes de golpear la placa A?

El protón, que es positivo, es repelido por A y por lo mismo su rapidez disminuye. Se necesita la diferencia de potencial entre las placas, que es

$$V = Ed = (2.0\ \text{kV/m})(0.0050\ \text{m}) = 10\ \text{V}$$

Ahora, de la conservación de la energía, para el protón,

$$\text{EC perdida} = \text{EP}_E\ \text{ganada}$$
$$\tfrac{1}{2}mv_B^2 - \tfrac{1}{2}mv_A^2 = qV$$

Al sustituir $m = 1.67\times10^{-27}$ kg, $v_B = 1.00\times10^{5}$ m/s, $q = 1.60\times10^{-19}$ C y $V = 10$ V, se obtiene $v_A = 90$ km/s. Como se ve, el protón de hecho se frena.

25.8 [III] Un núcleo de un átomo pequeño tiene una carga de $+50e$. *a*) Calcule el potencial absoluto V a una distancia radial de 1.0×10^{-12} m desde el núcleo. *b*) Si un protón se libera desde este punto, ¿cuán rápido se moverá cuando esté a 1.0 m del núcleo?

a)
$$V = k\frac{q}{r} = (9.0\times10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(50)(1.6\times10^{-19}\ \text{C})}{10^{-12}\ \text{m}} = 72\ \text{kV}$$

b) El protón es repelido por el núcleo y viaja al infinito. El potencial absoluto en un punto es la diferencia de potencial entre el punto en cuestión y el infinito. Por consiguiente, hay una caída de potencial de 72 kV conforme el protón se aproxima al infinito.

Normalmente se supondría que 1.0 m está tan retirado del núcleo que se puede considerar como si estuviera en el infinito. Pero, para comprobar, se calcula V en $r = 1.0$ m:

$$V_{1\text{m}} = k\frac{q}{r} = (9.0\times10^{9}\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(50)(1.6\times10^{-19}\text{C})}{1.0\ \text{m}} = 7.2\times10^{-8}\ \text{V}$$

que es prácticamente cero en comparación con 72 kV.

Conforme el protón cae a través de los 72 kV,

$$\text{EC ganada} = \text{EP}_E \text{ perdida}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = qV$$

$$\tfrac{1}{2}(1.67\times10^{-27}\text{ kg})v_f^2 - 0 = (1.6\times10^{-19}\text{ C})(72\,000\text{ V})$$

de donde $v_f = 3.7\times10^6$ m/s.

25.9 [II] Las siguientes cargas puntuales se colocan sobre el eje x: $+2.0$ μC en $x = 20$ cm, -3.0 μC en $x = 30$ cm, -4.0 μC en $x = 40$ cm. Encuentre el potencial absoluto sobre el eje en $x = 0$.

El potencial es una cantidad escalar, por tanto

$$V = k\sum\frac{q_i}{r_i} = (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2.0\times10^{-6}\text{ C}}{0.20\text{ m}} + \frac{-3.0\times10^{-6}\text{ C}}{0.30\text{ m}} + \frac{-4.0\times10^{-6}\text{ C}}{0.40\text{ m}}\right)$$

$$= (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(10\times10^{-6}\text{ C/m} - 10\times10^{-6}\text{ C/m} - 10\times10^{-6}\text{ C/m}) = -90\text{ kV}$$

25.10 [I] Dos cargas puntuales, $+q$ y $-q$, están separadas una distancia d. ¿En qué punto, además del infinito, el potencial absoluto es cero?

En el punto (o puntos) en cuestión

$$0 = k\frac{q}{r_1} + k\frac{-q}{r_2} \qquad \text{o} \qquad r_1 = r_2$$

Esta condición se cumple para todo punto en un plano que es el bisector perpendicular de la recta que une a las dos cargas. Por consiguiente, el potencial absoluto es cero en todo punto que se encuentre sobre dicho plano.

25.11 [II] Cuatro cargas puntuales se colocan en las cuatro esquinas de un cuadrado que tiene 30 cm de lado. Calcule el potencial en el centro del cuadrado si *a*) cada una de las cuatro cargas tiene $+2.0$ μC y *b*) dos de las cuatro cargas son de $+2.0$ μC y las otras dos de -2.0 μC.

a)
$$V = k\sum\frac{q_i}{r_i} = k\frac{\sum q_i}{r} = (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(4)(2.0\times10^{-6}\text{ C})}{(0.30\text{ m})(\cos 45^\circ)} = 3.4\times10^5\text{ V}$$

b)
$$V = (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\frac{(2.0+2.0-2.0-2.0)\times10^{-6}\text{ C}}{(0.30\text{ m})(\cos 45^\circ)} = 0$$

25.12 [III] En la figura 25-3 la carga en A tiene $+200$ pC, mientras que la carga en B es de -100 pC. *a*) Calcule el potencial absoluto en los puntos C y D. *b*) ¿Cuánto trabajo se debe hacer para llevar una carga de $+500$ μC desde el punto C hasta el punto D?

a)
$$V_C = k\sum\frac{q_i}{r_i} = (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2.00\times10^{-10}\text{ C}}{0.80\text{ m}} - \frac{1.00\times10^{-10}\text{ C}}{0.20\text{ m}}\right) = -2.25\text{ V} = -2.3\text{ V}$$

$$V_D = (9.0\times10^9\text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2.00\times10^{-10}\text{ C}}{0.20\text{ m}} - \frac{1.00\times10^{-10}\text{ C}}{0.80\text{ m}}\right) = +7.88\text{ V} = +7.9\text{ V}$$

b) Existe una subida en el potencial desde C hasta D de $V = V_D - V_C = 7.88\text{ V} - (-2.25\text{ V}) = 10.13$ V. Así que

$$\text{Trabajo} = Vq = (10.13\text{ V})(5.00\times10^{-4}\text{ C}) = 5.1\text{ mJ}$$

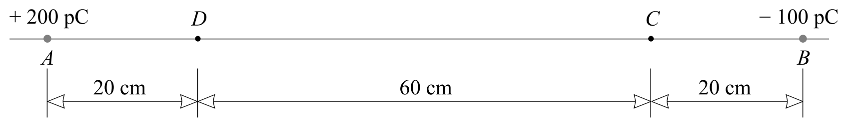


Figura 25-3

25.13 [III] Encuentre la energía potencial eléctrica de tres cargas puntuales colocadas sobre el eje x como se indica: $+2.0\ \mu$C en $x = 0$, $+3.0\ \mu$C en $x = 20$ cm y $+6.0\ \mu$C en $x = 50$ cm. Considere que la EP_E es cero cuando las cargas están muy separadas.

Calcule cuánto trabajo se requiere para llevar cada carga desde el infinito hasta su lugar sobre el eje x. Primero considere la carga de 2.0 μC; ésta no requiere trabajo, pues no hay cargas en la vecindad.

En seguida se aproxima la carga de 3.0 μC, que es repelida por la carga de $+2.0\ \mu$C. La diferencia de potencial entre el infinito y su posición final se debe a la carga de $+2.0\ \mu$C y es

$$V_{x=0.2} = k\frac{2.0\ \mu\text{C}}{0.20\ \text{m}} = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{2 \times 10^{-6}\ \text{C}}{0.20\ \text{m}}\right) = 9.0 \times 10^4\ \text{V}$$

Por tanto, el trabajo que se requiere para traer a la carga de 3.0 μC es

$$\text{Trabajo}_{3\mu\text{C}} = qV_{x=0.2} = (3.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(9.0 \times 10^4\ \text{V}) = 0.270\ \text{J}$$

Por último se acerca la carga de 6.0 μC al punto $x = 0.50$ m. El potencial ahí se debe a las dos cargas que ya están presentes

$$V_{x=0.5} = k\left(\frac{2.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{0.50\ \text{m}} + \frac{3.0 \times 10^{-6}\ \text{C}}{0.30\ \text{m}}\right) = 12.6 \times 10^4\ \text{V}$$

Así pues, el trabajo requerido para aproximar la carga de 6.0 μC es

$$\text{Trabajo}_{6\mu\text{C}} = qV_{x=0.5} = (6.0 \times 10^{-6}\ \text{C})(12.6 \times 10^4\ \text{V}) = 0.756\ \text{J}$$

Al sumar las cantidades de trabajo requeridas para ensamblar las cargas se obtiene la energía almacenada en el sistema:

$$EP_E = 0.270\ \text{J} + 0.756\ \text{J} = 1.0\ \text{J}$$

¿Puede demostrar que el orden en que se traen las cargas desde el infinito no afecta el resultado?

25.14 [III] Dos protones se mantienen en reposo, separados por una distancia de 5.0×10^{-12} m. Cuando se sueltan, se repelen. ¿Cuán rápido se moverá cada uno cuando estén muy separados uno del otro?

Su EP_E original se convertirá en EC. Se procede como en el problema 25.13. El potencial a 5.0×10^{-12} m desde la primera carga debido sólo a dicha carga es

$$V = (9.0 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)\left(\frac{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}}{5 \times 10^{-12}\ \text{m}}\right) = 288\ \text{V}$$

Entonces, el trabajo necesario para traer al segundo protón es

$$W = qV = (1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(288\ \text{V}) = 4.61 \times 10^{-17}\ \text{J}$$

y ésta es la EP_E original del sistema. A partir del principio de conservación de la energía,

$$EP_E\ \text{original} = \text{EC final}$$

$$4.61 \times 10^{-17}\ \text{J} = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Como las partículas son idénticas, $v_1 = v_2 = v$. Al resolver se encuentra que $v = 1.7 \times 10^5$ m/s cuando las partículas están muy separadas.

25.15 [III] En la figura 25-4 se muestran dos grandes placas metálicas (perpendiculares a la página) de longitud grande conectadas a una batería de 120 V. Suponga que las placas se encuentran en el vacío y son mucho más largas de lo que se muestra. Calcule *a*) E entre las placas, *b*) la fuerza que experimenta un electrón entre las placas, *c*) la EP_E perdida por un electrón conforme se mueve desde la placa B hasta la placa A y *d*) la rapidez del electrón liberado desde la placa B justo antes de golpear la placa A.

a) El campo E está dirigido de la placa positiva A hacia la placa negativa B. Es uniforme entre placas paralelas muy grandes y está dado por

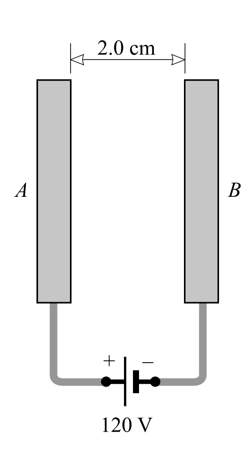


Figura 25-4

$$E = \frac{V}{d} = \frac{120 \text{ V}}{0.020 \text{ m}} = 6\,000 \text{ V/m} = 6.0 \text{ kV/m}$$

dirigido de izquierda a derecha.

b) $$F_E = qE = (-1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(6\,000 \text{ V/m}) = -9.6 \times 10^{-16} \text{ N}$$

El signo menos dice que $\vec{\mathbf{F}}_E$ se dirige en sentido opuesto a $\vec{\mathbf{E}}$. Como la placa *A* es positiva, el electrón es atraído por ella. La fuerza sobre el electrón es hacia la izquierda.

c) $$\text{Cambio en EP}_E = Vq = (120 \text{ V})(-1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) = -1.92 \times 10^{-17} \text{ J} = -1.9 \times 10^{-17} \text{ J}$$

Note que *V* es una subida de potencial de *B* a *A*.

d) $$\text{EP}_E \text{ perdida} = \text{EC ganada}$$

$$1.92 \times 10^{-17} \text{ J} = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$

$$1.92 \times 10^{-17} \text{ J} = \tfrac{1}{2}(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) v_f^2 - 0$$

de donde $v_f = 6.5 \times 10^6$ m/s.

25.16 [II] Como se muestra en la figura 25-5, una partícula cargada permanece estacionaria entre las dos placas cargadas horizontales. La separación de las placas es de 2.0 cm y, para la partícula, $m = 4.0 \times 10^{-13}$ kg y $q = 2.4 \times 10^{-18}$ C. Calcule la diferencia de potencial entre las placas.

Como la partícula está en equilibrio, el peso de la partícula es igual a la fuerza eléctrica ascendente. Esto es,

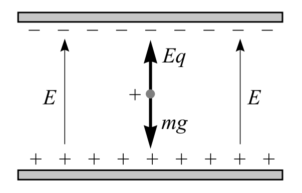


Figura 25-5

$$mg = qE$$

o bien $$E = \frac{mg}{q} = \frac{(4.0 \times 10^{-13} \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)}{2.4 \times 10^{-18} \text{ C}} = 1.63 \times 10^6 \text{ V/m}$$

Pero, para el sistema de placas paralelas,

$$V = Ed = (1.63 \times 10^6 \text{ V/m})(0.020 \text{ m}) = 33 \text{ kV}$$

25.17 [II] Una partícula alfa ($q = 2e$, $m = 6.7 \times 10^{-27}$ kg) cae desde el reposo a través de una caída de potencial de 3.0×10^6 V (3.0 MV). *a*) ¿Cuál es su EC en electrón volts? *b*) ¿Cuál es su rapidez?

a) $$\text{Energía en eV} = \frac{qV}{e} = \frac{(2e)(3.0 \times 10^6)}{e} = 6.0 \times 10^6 \text{ eV} = 6.0 \text{ MeV}$$

b) $$\text{EP}_E \text{ perdida} = \text{EC ganada}$$

$$qV = \tfrac{1}{2} m v_f^2 - \tfrac{1}{2} m v_i^2$$

$$(2)(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(3.0 \times 10^6 \text{ V}) = \tfrac{1}{2}(6.7 \times 10^{-27} \text{ kg}) v_f^2 - 0$$

de donde $v_f = 1.7 \times 10^7$ m/s.

25.18 [II] *a*) Un electrón, *b*) un protón y *c*) una partícula alfa tienen una energía de 400 eV. ¿Cuál es su rapidez?

Se sabe que la energía cinética de cada partícula es

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = (400 \text{ eV})\left(\frac{1.60 \times 10^{-19} \text{ J}}{1.00 \text{ eV}}\right) = 6.40 \times 10^{-17} \text{ J}$$

Al sustituir $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg para el electrón, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg para el protón y $m_\alpha = 4(1.67 \times 10^{-27}$ kg) para la partícula alfa se obtiene la rapidez de cada partícula como *a*) 1.186×10^7 m/s, *b*) 2.77×10^5 m/s y *c*) 1.38×10^5 m/s.

25.19 [I] Un capacitor de placas paralelas tiene una capacitancia de 8.0 μF con aire entre sus placas. Determine su capacitancia cuando entre sus placas se coloca un dieléctrico con constante dieléctrica 6.0.

$$C \text{ con dieléctrico} = K\,(C \text{ con aire}) = (6.0)(8.0\ \mu\text{F}) = 48\ \mu\text{F}$$

25.20 [I] Un capacitor de 300 pF se carga a un voltaje de 1.0 kV. ¿Cuál es la carga almacenada?

$$q = CV = (300 \times 10^{-12}\ \text{F})(1\,000\ \text{V}) = 3.0 \times 10^{-7}\ \text{C} = 0.30\ \mu\text{C}$$

25.21 [I] Una esfera metálica montada sobre una barra aislante tiene una carga de 6.0 nC cuando su potencial es 200 V más alto que el de sus alrededores. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor formado por la esfera y sus alrededores?

$$C = \frac{q}{V} = \frac{6.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{200\ \text{V}} = 30\ \text{pF}$$

25.22 [I] Un capacitor de 1.2 μF se carga a 3.0 kV. Calcule la energía almacenada en el capacitor.

$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}qV = \tfrac{1}{2}CV^2 = \tfrac{1}{2}(1.2 \times 10^{-6}\ \text{F})(3\,000\ \text{V})^2 = 5.4\ \text{J}$$

25.23 [II] La combinación en serie de los dos capacitores que se muestran en la figura 25-6 están conectados a una diferencia de potencial de 1 000 V. Encuentre: *a*) la capacitancia equivalente C_{eq} de la combinación, *b*) la magnitud de las cargas en cada capacitor, *c*) la diferencia de potencial a través de cada capacitor y *d*) la energía almacenada en los capacitores.

a)
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{3.0\ \text{pF}} + \frac{1}{6.0\ \text{pF}} = \frac{1}{2.0\ \text{pF}}$$

de donde $C = 2.0$ pF.

b) *En una combinación en serie, cada capacitor tiene la misma carga* (vea la figura 25-1*b*), que es igual a la carga de la combinación. Entonces, al usar el resultado de *a*), se obtiene

$$q_1 = q_2 = q = C_{eq}V = (2.0 \times 10^{-12}\ \text{F})(1\,000\ \text{V}) = 2.0\ \text{nC}$$

c)
$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{2.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{3.0 \times 10^{-12}\ \text{F}} = 667\ \text{V} = 0.67\ \text{kV}$$

$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{2.0 \times 10^{-9}\ \text{C}}{6.0 \times 10^{-12}\ \text{F}} = 333\ \text{V} = 0.33\ \text{kV}$$

d)
$$\text{Energía en } C_1 = \tfrac{1}{2}q_1V_1 = \tfrac{1}{2}(2.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(667\ \text{V}) = 6.7 \times 10^{-7}\ \text{J} = 0.67\ \mu\text{J}$$

$$\text{Energía en } C_2 = \tfrac{1}{2}q_2V_2 = \tfrac{1}{2}(2.0 \times 10^{-9}\ \text{C})(333\ \text{V}) = 3.3 \times 10^{-7}\ \text{J} = 0.33\ \mu\text{J}$$

$$\text{Energía de la combinación} = (6.7 + 3.3) \times 10^{-7}\ \text{J} = 10 \times 10^{-7}\ \text{J} = 1.0\ \mu\text{J}$$

El último resultado también se puede obtener directamente de $\frac{1}{2}qV$ o de $\frac{1}{2}C_{eq}V^2$.

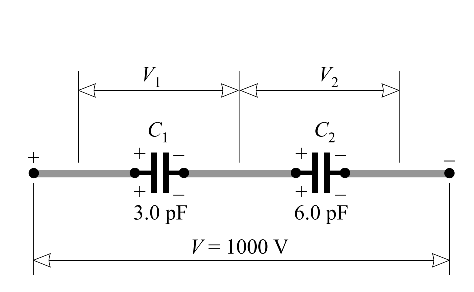


Figura 25-6

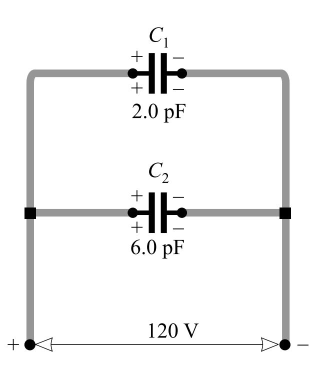


Figura 25-7

25.24 [II] La combinación de capacitores en paralelo que se muestra en la figura 25-7 está conectada a una fuente de 120 V. Calcule la capacitancia equivalente C_{eq}, la carga en cada capacitor y la carga en la combinación.

Para una combinación en paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 2.0 \text{ pF} + 6.0 \text{ pF} = 8.0 \text{ pF}$$

A cada capacitor se le aplica una diferencia de potencial de 120 V. Por consiguiente,

$$q_1 = C_1V_1 = (2.0 \times 10^{-12} \text{ F})(120 \text{ V}) = 0.24 \text{ nC}$$
$$q_2 = C_2V_2 = (6.0 \times 10^{-12} \text{ F})(120 \text{ V}) = 0.72 \text{ nC}$$

La carga de la combinación es $q_1 + q_2 = 960$ pC. O, podría escribirse

$$q = C_{eq}V = (8.0 \times 10^{-12} \text{ F})(120 \text{ V}) = 0.96 \text{ nC}$$

25.25 [III] Cierto capacitor consta de dos placas paralelas conductoras, cada una con un área de 200 cm², separadas por un espacio de aire de 0.40 cm. *a*) Calcule su capacitancia. *b*) Si el capacitor se conecta a una fuente de 500 V, calcule la carga, la energía almacenada y el valor de *E* entre las placas. *c*) Si un líquido con $K = 2.60$ se vacía entre las placas para sustituir al espacio de aire, ¿cuánta carga adicional fluirá hacia el capacitor desde la fuente de 500 V?

a) Para un capacitor de placas paralelas con un espacio de aire,

$$C = K\epsilon_0 \frac{A}{d} = (1)(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \frac{200 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{4.0 \times 10^{-3} \text{ m}} = 4.4 \times 10^{-11} \text{ F} = 44 \text{ pF}$$

b)

$$q = CV = (4.4 \times 10^{-11} \text{ F})(500 \text{ V}) = 2.2 \times 10^{-8} \text{ C} = 22 \text{ nC}$$

$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}qV = \tfrac{1}{2}(2.2 \times 10^{-8} \text{ C})(500 \text{ V}) = 5.5 \times 10^{-6} \text{ J} = 5.5 \ \mu\text{J}$$

$$E = \frac{V}{d} = \frac{500 \text{ V}}{4.0 \times 10^{-3} \text{ m}} = 1.3 \times 10^5 \text{ V/m}$$

c) Ahora el capacitor tendrá una capacitancia $K = 2.60$ más grande que antes. Por consiguiente,

$$q = CV = (2.60 \times 4.4 \times 10^{-11} \text{ F})(500 \text{ V}) = 5.7 \times 10^{-8} \text{ C} = 57 \text{ nC}$$

El capacitor ya tenía una carga de 22 nC y entonces se le deben agregar 57 nC − 22 nC o 35 nC.

25.26 [II] Dos capacitores, de 3.0 μF y 4.0 μF, se cargan individualmente con una batería de 6.0 V. Una vez desconectados de la batería, se conectan juntos, con la placa negativa de uno a la placa positiva del otro. ¿Cuál es la carga final en cada capacitor?

Sea 3.0 μF = C_1 y 4.0 μF = C_2. En la figura 25-8 se muestra esta situación. Antes de conectarlos, sus cargas son

$$q_1 = C_1V = (3.0 \times 10^{-6} \text{ F})(6.0 \text{ V}) = 18 \ \mu\text{C}$$
$$q_2 = C_2V = (4.0 \times 10^{-6} \text{ F})(6.0 \text{ V}) = 24 \ \mu\text{C}$$

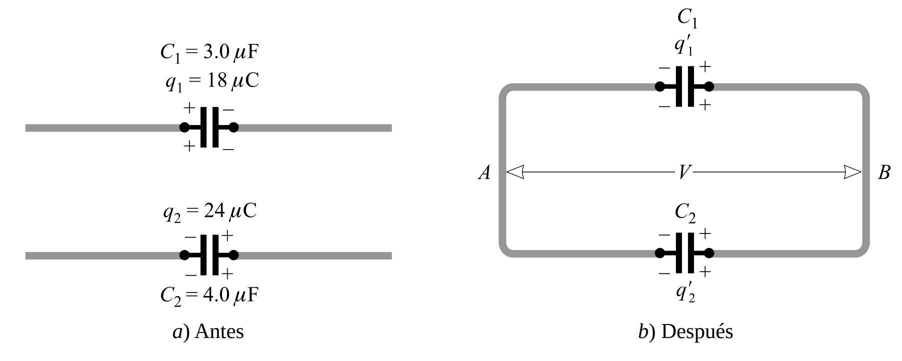


Figura 25-8

Cuando se conectan juntos, estas cargas se cancelan parcialmente. Las cargas finales son q_1' y q_2', donde

$$q_1' + q_2' = q_2 - q_1 = 6.0\ \mu\text{C}$$

Además, los potenciales a través de ellos ahora son los mismos, de modo que $V = q/C$ produce

$$\frac{q_1'}{3.0\times10^{-6}\ \text{F}} = \frac{q_2'}{4.0\times10^{-6}\ \text{F}} \qquad \text{o} \qquad q_1' = 0.75q_2'$$

La sustitución en la ecuación anterior produce

$$0.75q_2' + q_2' = 6.0\ \mu\text{C} \qquad \text{o} \qquad q_2' = 3.4\ \mu\text{C}$$

Entonces $q_1' = 0.75q_2' = 2.6\ \mu$C.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

25.27 [I] Dos placas metálicas están conectadas a las dos terminales de una batería de 1.50 V. ¿Cuánto trabajo se requiere para llevar una carga de $+5.0\ \mu$C a través de la separación *a*) de la placa negativa a la positiva, *b*) de la placa positiva a la negativa? **Resp.** *a*) 7.5 μJ; *b*) $-7.5\ \mu$J.

25.28 [II] Las placas descritas en el problema 25.27 están en el vacío. Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg) se suelta en la placa negativa y cae libremente hacia la placa positiva. ¿Cuál es su rapidez justo antes de golpear la placa? **Resp.** 7.3×10^5 m/s.

25.29 [II] Un protón ($q = e$, $m_p = 1.67\times10^{-27}$ kg) se acelera partiendo del reposo a través de una diferencia de potencial de 1.0 MV. ¿Cuál es su rapidez final? **Resp.** 1.4×10^7 m/s.

25.30 [II] Un cañón de electrones dispara electrones ($q = -e$, $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg) hacia una placa metálica que está a 4.0 mm de distancia en el vacío. El potencial de la placa es de 5.0 V menor que el del cañón. ¿Cuán rápido se deben mover los electrones al salir del cañón si deben llegar a la placa? **Resp.** 1.3×10^6 m/s.

25.31 [I] La diferencia de potencial entre dos grandes placas metálicas paralelas es de 120 V. La separación entre las placas es de 3.0 mm. Calcule el campo eléctrico entre las placas. **Resp.** 40 kV/m hacia la placa negativa.

25.32 [II] Un electrón ($q = -e$, $m_e = 9.1\times10^{-31}$ kg) se dispara con una rapidez de 5.0×10^6 m/s paralelo a un campo eléctrico uniforme de 3.0 kV/m de intensidad. ¿Cuán lejos llegará el electrón antes de detenerse? **Resp.** 2.4 cm.

25.33 [II] Una diferencia de potencial de 24 kV mantiene dirigido hacia abajo un campo eléctrico entre dos placas paralelas horizontales separadas 1.8 cm en el vacío. Calcule la carga sobre una gota de aceite de 2.2×10^{-13} kg de masa que permanece estacionaria en el campo entre las placas. **Resp.** 1.6×10^{-18} C $= 10e$.

25.34 [I] Determine el potencial absoluto en aire a una distancia de 3.0 cm desde una carga puntual de 500 μC. **Resp.** 15 kV.

25.35 [II] Calcule la magnitud del campo eléctrico y el potencial absoluto a una distancia de 1.0 nm desde un núcleo de helio de carga $+2e$. ¿Cuál es la energía potencial (relativa al infinito) de un protón que se encuentra en esta posición? **Resp.** 2.9×10^9 N/C, 2.9 V, 4.6×10^{-19} J.

25.36 [II] Una carga de 0.20 μC está a 30 cm de una carga puntual de 3.0 μC en el vacío. ¿Qué trabajo se requiere para llevar la carga de 0.20 μC 18 cm más cerca de la carga de 3.0 μC? **Resp.** 0.027 J.

25.37 [II] Una carga puntual de $+2.0\ \mu$C se encuentra en el origen de un sistema de coordenadas. Una segunda carga de $-3.0\ \mu$C se coloca sobre el eje x en $x = 100$ cm. ¿En qué punto (o puntos) sobre el eje x el potencial absoluto será cero? **Resp.** $x = 40$ cm y $x = -0.20$ m.

25.38 [II] En el problema 25.37, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los dos puntos siguientes, ubicados sobre el eje x: punto A en $x = 0.1$ m y punto B en $x = 0.9$ m? ¿Qué punto se encuentra con potencial más alto?
Resp. 4×10^5 V, punto A.

25.39 [II] Un electrón se mueve en la dirección $+x$ con una rapidez de 5.0×10^6 m/s. En la dirección $+x$ existe un campo eléctrico de 3.0 kV/m. ¿Cuál será la rapidez del electrón después de haberse desplazado 1.00 cm a lo largo del campo? **Resp.** 3.8×10^6 m/s.

25.40 [II] Un electrón tiene una rapidez de 6.0×10^5 m/s cuando pasa por el punto A en su camino hacia el punto B. Su rapidez en B es de 12×10^5 m/s. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre A y B, y cuál está a un potencial más alto? **Resp.** 3.1 V, B.

25.41 [I] Un capacitor con aire entre sus placas tiene una capacitancia de 3.0 μF. ¿Cuál es su capacitancia cuando entre sus placas se coloca cera con constante dieléctrica 2.8? **Resp.** 8.4 μF.

25.42 [I] Determine la carga en cada placa de un capacitor de placas paralelas de 0.050 μF cuando la diferencia de potencial entre las placas es de 200 V. **Resp.** 10 μC.

25.43 [I] Un capacitor se carga con 9.6 nC y tiene una diferencia de potencial de 120 V entre sus terminales. Calcule la capacitancia y la energía almacenada en él. **Resp.** 80 pF, 0.58 μJ.

25.44 [I] Calcule la energía almacenada en un capacitor de 60 pF *a*) cuando se carga a una diferencia de potencial de 2.0 kV y *b*) cuando la carga en cada placa es de 30 nC. **Resp.** *a*) 12 mJ; *b*) 7.5 μJ.

25.45 [II] Tres capacitores, cada uno con 120 pF de capacitancia, se cargan a 0.50 kV y luego se conectan en serie. Determine: *a*) la diferencia de potencial entre las placas extremas, *b*) la carga en cada capacitor y *c*) la energía almacenada en el sistema. **Resp.** *a*) 1.5 kV; *b*) 60 nC; *c*) 45 μJ.

25.46 [I] Tres capacitores (2.00 μF, 5.00 μF y 7.00 μF) se conectan en serie. ¿Cuál es su capacitancia equivalente?
Resp. 1.19 μF.

25.47 [I] Tres capacitores (2.00 μF, 5.00 μF y 7.00 μF) se conectan en paralelo ¿Cuál es su capacitancia equivalente?
Resp. 14.00 μF.

25.48 [I] La combinación de capacitores del problema 25.46 se conecta en serie con la combinación del problema 25.47. ¿Cuál es la capacitancia de la nueva combinación? **Resp.** 1.09 μF.

25.49 [II] Dos capacitores (0.30 y 0.50 μF) se conectan en paralelo. *a*) ¿Cuál es su capacitancia equivalente? Si ahora se coloca una carga de 200 μC en la combinación en paralelo, *b*) ¿cuál es la diferencia de potencial entre las terminales? *c*) ¿Cuál es la carga en cada capacitor? **Resp.** *a*) 0.80 μF; *b*) 0.25 kV; *c*) 75 μC, 0.13 mC.

25.50 [II] Un capacitor de 2.0 μF está cargado a 50 V y después se conecta en paralelo (placa positiva a placa positiva) con un capacitor de 4.0 μF cargado a 100 V. *a*) ¿Cuál es la carga final en los capacitores? *b*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada capacitor? **Resp.** *a*) 0.17 mC, 0.33 mC; *b*) 83 V.

25.51 [II] Repita el problema 25.50 si la placa positiva de un capacitor se conecta a la placa negativa del otro.
Resp. *a*) 0.10 mC, 0.20 mC; *b*) 50 V.

25.52 [II] *a*) Calcule la capacitancia de un capacitor formado por dos placas paralelas separadas por una capa de cera de parafina de 0.50 cm de espesor. El área de cada placa es de 80 cm^2. La constante dieléctrica de la cera es de 2.0. *b*) Si el capacitor se conecta a una fuente de 100 V, calcule la carga y la energía almacenada en el capacitor. **Resp.** *a*) 28 pF; *b*) 2.8 nC, 0.14 μJ.

CORRIENTE, RESISTENCIA Y LEY DE OHM 26

UNA CORRIENTE (I) de electricidad existe en una región cuando una carga eléctrica neta se transporta desde un punto a otro en dicha región. Suponga que la carga se mueve a través de un alambre. Si la carga q se transporta a través de una sección transversal dada del alambre en un tiempo t, entonces la corriente a través del alambre es:

$$I = \frac{q}{t}$$

Aquí, q está en coulombs, t en segundos e I en **amperes** (1 A = 1 C/s). Por costumbre, ***la dirección de la corriente se toma en la dirección de flujo de la carga positiva***. De este modo, un flujo de electrones hacia la derecha corresponde a una corriente hacia la izquierda.

UNA BATERÍA es una fuente de energía eléctrica. Si en la batería no hay pérdidas de energía interna, entonces la diferencia de potencial (vea el capítulo 25) entre sus terminales se llama **fuerza electromotriz** (fem) de la batería. A menos que se establezca lo contrario, se considerará que la diferencia de potencial entre las terminales (d.p.t.) de una batería es igual a su fem. La unidad para la fem es la misma que la unidad para la diferencia de potencial, el volt.

LA RESISTENCIA (R) de un alambre u otro objeto es la medida de la diferencia de potencial (V) que se debe aplicar a través del objeto para hacer que por él fluya una corriente de un ampere:

$$R = \frac{V}{I}$$

La unidad de resistencia es el **ohm**, para la cual se utiliza el símbolo Ω (omega): 1 Ω = 1 V/A.

LA LEY DE OHM tenía originalmente dos partes. La primera era simplemente la ecuación definitoria de resistencia, $V = IR$. Con frecuencia esta ecuación se cita como la ley de Ohm. Sin embargo, Ohm también estableció que la resistencia R es una constante independiente de V e I. Esta última parte de la ley sólo es aproximadamente correcta.

La relación $V = IR$ puede aplicarse a cualquier resistor, donde V es la diferencia de potencial (d.p.) entre los dos extremos del resistor, I es la corriente a través del resistor y R es la resistencia del resistor en estas condiciones.

MEDICIÓN DE LA RESISTENCIA POR MEDIO DE AMPERÍMETRO Y VOLTÍMETRO: Se utiliza un circuito en serie que consiste en la resistencia a medir, un amperímetro y una batería. La corriente se mide con un amperímetro (de baja resistencia). La diferencia de potencial se mide al conectar las terminales de un voltímetro (alta resistencia) a través de la resistencia, es decir, en paralelo con ésta. La resistencia se calcula al dividir la lectura del voltímetro entre la lectura del amperímetro, de acuerdo con la ley de Ohm, $R = V/I$. (Si se requiere el valor exacto de la resistencia, las resistencias internas del voltímetro y del amperímetro deben considerarse como parte del circuito.)

LA DIFERENCIA DE POTENCIAL DE LAS TERMINALES (o **voltaje**) de una batería o generador cuando entrega una corriente I está relacionada con su fuerza electromotriz $\mathscr{E}$ y su **resistencia interna** r de la siguiente forma:

1) Cuando entrega corriente (*en la descarga*):

Voltaje de las terminales = (fem) − (caída de voltaje en la resistencia interna)

$$V = \mathscr{E} - Ir$$

2) Cuando recibe corriente (*en la carga*):

Voltaje de las terminales = fem + (caída de voltaje en la resistencia interna)

$$V = \mathscr{E} + Ir$$

3) Cuando no existe corriente:

$$\text{Voltaje de las terminales} = \text{fem de la batería o generador}$$

RESISTIVIDAD: La resistencia R de un alambre de longitud L y área de sección transversal A es

$$R = \rho\frac{L}{A}$$

donde ρ es una constante llamada **resistividad**. La resistividad es una característica del material del cual está hecho el alambre. Para L en m, A en m^2 y R en Ω, las unidades de ρ son Ω · m.

LA RESISTENCIA VARÍA CON LA TEMPERATURA: Si un alambre tiene una resistencia R_0 a una temperatura T_0, entonces su resistencia R a una temperatura T es

$$R = R_0 = \alpha R_0(T - T_0)$$

donde α es el **coeficiente térmico de la resistencia** del material del alambre. Generalmente α varía con la temperatura, por lo que esta relación sólo es válida para pequeños cambios de temperatura. Las unidades de α son K^{-1} o $°C^{-1}$.

Una relación similar se aplica a la variación de la resistividad con la temperatura. Si ρ_0 y ρ son las resistividades a T_0 y T respectivamente, entonces

$$\rho = \rho_0 = \alpha\rho_0\,(T - T_0)$$

CAMBIOS DE POTENCIAL: La diferencia de potencial a través de un resistor R por el que fluye una corriente I es, por la ley de Ohm, IR. El extremo del resistor por el cual entra la corriente es el extremo de potencial alto del resistor. A través de un resistor la corriente siempre fluye "cuesta abajo", del potencial alto al bajo.

La terminal positiva de una batería siempre es la terminal de mayor potencial si la resistencia interna de la batería es pequeña o despreciable. Lo anterior es válido sin importar la dirección de la corriente a través de la batería.

PROBLEMAS RESUELTOS

26.1 [I] Una corriente estable de 0.50 A fluye a través de un alambre. ¿Cuánta carga pasa a través del alambre en un minuto?

Ya que $I = q/t$, se tiene $q = It = (0.50\text{ A})\,(60\text{ s}) = 30\text{ C}$. (Recuerde que $1\text{ A} = 1\text{ C/s}$.)

26.2 [I] ¿Cuántos electrones fluyen a través de un foco cada segundo si la corriente a través de él es de 0.75 A?

Dado que $I = q/t$, la carga que fluye a través del foco en 1.0 s es

$$q = It = (0.75\text{ A})(1.0\text{ s}) = 0.75\text{ C}$$

Pero la magnitud de la carga en cada electrón es $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Por tanto,

$$\text{Cantidad} = \frac{\text{carga}}{\text{carga/electrón}} = \frac{0.75\text{ C}}{1.6 \times 10^{-19}\text{ C}} = 4.7 \times 10^{18}$$

26.3 [I] Cierto foco tiene una resistencia de 240 Ω cuando se enciende. ¿Cuánta corriente fluirá a través del foco cuando se conecta a 120 V, que es su voltaje de operación normal?

$$I = \frac{V}{R} = \frac{120\text{ V}}{240\ \Omega} = 0.500\text{ A}$$

26.4 [I] Un calentador eléctrico utiliza 5.0 A cuando se conecta a 110 V. Determine su resistencia.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{110\text{ V}}{5.0\text{ A}} = 22\ \Omega$$

26.5 [I] ¿Cuál es la caída de potencial a través de una parrilla eléctrica que consume 5.0 A cuando su resistencia caliente es de 24 Ω?

$$V = IR = (5.0\text{ A})(24\ \Omega) = 0.12\text{ kV}$$

26.6 [II] La corriente en la figura 26-1 es de 0.125 A en la dirección mostrada. Para cada uno de los siguientes pares de puntos, ¿cuál es la diferencia de potencial y cuál punto está al mayor potencial? *a*) *A*, *B*; *b*) *B*, *C*; *c*) *C*, *D*; *d*) *D*, *E*; *e*) *C*, *E*; *f*) *E*, *C*.

Recuerde los siguientes hechos: 1) La corriente es la misma (0.125 A) en todos los puntos del circuito porque la carga no tiene otro lugar para fluir. 2) La corriente siempre fluye del potencial alto al bajo a través de un resistor. 3) La terminal positiva de una fem pura (el lado largo de su símbolo) siempre es la terminal de potencial alto. En consecuencia, al considerar las caídas de potencial como negativas, se tiene lo siguiente:

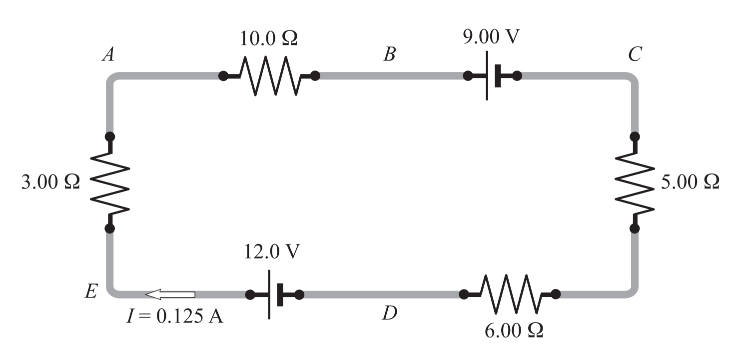


Figura 26-1

a) $V_{AB} = -IR = -(0.125\ \text{A})(10.0\ \Omega) = -1.25\ \text{V}$; *A* es el de mayor potencial.

b) $V_{BC} = -\mathscr{E} = -9.00\ \text{V}$; *B* es el de mayor potencial.

c) $V_{CD} = -(0.125\ \text{A})(5.00\ \Omega) - (0.125\ \text{A})(6.00\ \Omega) = -1.38\ \text{V}$; *C* es el de mayor potencial.

d) $V_{DE} = +\mathscr{E} = +12.0\ \text{V}$; *E* es el de mayor potencial.

e) $V_{CE} = -(0.125\ \text{A})(5.00\ \Omega) - (0.125\ \text{A})(6.00\ \Omega) + 12.0\ \text{V} = +10.6\ \text{V}$; *E* es el de mayor potencial.

f) $V_{EC} = -(0.125\ \text{A})(3.00\ \Omega) - (0.125\ \text{A})(10.0\ \Omega) - 9.00\ \text{V} = -10.6\ \text{V}$; *E* es el de mayor potencial.

Note que coinciden las respuestas para *e*) y *f*).

26.7 [II] Una corriente de 3.0 A fluye a través de un alambre, como se muestra en la figura 26-2. ¿Cuál será la lectura en un voltímetro cuando se conecta *a*) de *A* a *B*; *b*) de *A* a *C*; *c*) de *AD*?

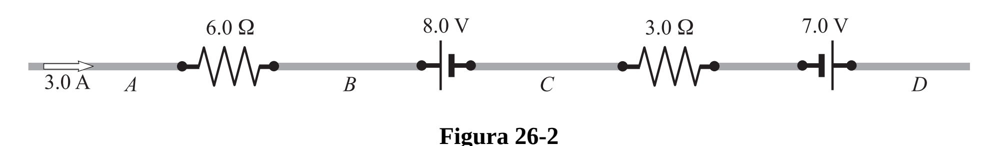


Figura 26-2

a) El punto *A* tiene un potencial más alto debido a que la corriente siempre fluye "cuesta abajo" por un resistor. Hay una caída de potencial de $IR = (3.0\ \text{A})(6.0\ \Omega) = 18\ \text{V}$ de *A* a *B*. La lectura del voltímetro será de −18 V.

b) Al ir de *B* a *C*, se pasa del lado positivo al lado negativo de la batería; por tanto, hay una caída de potencial de 8.0 V de *B* a *C*, la cual se suma a la caída de 18 V de *A* a *B*, encontrada en *a*), para dar una caída de 26 V de *A* a *C*. La lectura del voltímetro será de −26 V de *A* a *C*.

c) Al ir de *C* a *D*, primero hay una caída de $IR = (3.0\ \text{A})(3.0\ \Omega) = 9.0\ \text{V}$ a través del resistor. Después, dado que se va de la terminal negativa a la positiva de la batería de 7.0 V, hay una subida de 7.0 V a través de la batería. El voltímetro conectado de *A* a *D* marcará una lectura de

$$-18\ \text{V} - 8.0\ \text{V} - 9.0\ \text{V} + 7.0\ \text{V} = -28\ \text{V}$$

26.8 [II] Repita el problema 26.7 si la corriente de 3.0 A fluye de derecha a izquierda en lugar de izquierda a derecha. ¿Cuál punto está a mayor potencial en cada caso?

Al proceder como antes, se tiene

a) $V_{AB} = +(3.0)(6.0) = +18\ \text{V}$; *B* es el de mayor potencial.

b) $V_{AC} = +(3.0)(6.0) - 8.0 = +10\ \text{V}$; *C* es el de mayor potencial.

c) $V_{AD} = +(3.0)(6.0) - 8.0 + (3.0)(3.0) + 7.0 = +26\ \text{V}$; *D* es el de mayor potencial.

26.9 [I] Una pila seca tiene una fem de 1.52 V. El potencial de sus terminales cae a cero cuando una corriente de 25 A pasa a través de ella. ¿Cuál es su resistencia interna?

Como se muestra en la figura 26-3, la batería actúa como una fem pura $\mathscr{E}$ en serie con un resistor *r*. Se indicó que, bajo las condiciones mostradas, la diferencia de potencial entre *A* y *B* es cero. Por tanto,

$$0 = +\mathscr{E} - Ir \qquad \text{o} \qquad 0 = 1.52\text{ V} - (25\text{ A})r$$

de donde la resistencia interna es $r = 0.061\ \Omega$.

26.10 [II] Un generador de corriente directa tiene una fem de 120 V; es decir, el voltaje en sus terminales es de 120 V cuando no fluye corriente a través de él. Para una salida de 20 A, el potencial en sus terminales es de 115 V. *a*) ¿Cuál es la resistencia interna *r* del generador? *b*) ¿Cuál será el voltaje en las terminales para una salida de 40 A?

La situación es muy parecida a la que se muestra en la figura 26-3. Sin embargo, ahora $\mathscr{E} = 120$ V e *I* ya no es 25 A.

a) En este caso, $I = 20$ A y la d.p. de *A* a *B* es de 115 V. Así que,

$$115\text{ V} = +120\text{ V} - (20\text{ A})r$$

de donde $r = 0.25\ \Omega$.

b) Ahora $I = 40$ A. Por consiguiente,

$$\text{d.p. en la terminal es} = \mathscr{E} - Ir = 120\text{ V} - (40\text{ A})(0.25\ \Omega) = 110\text{ V}$$

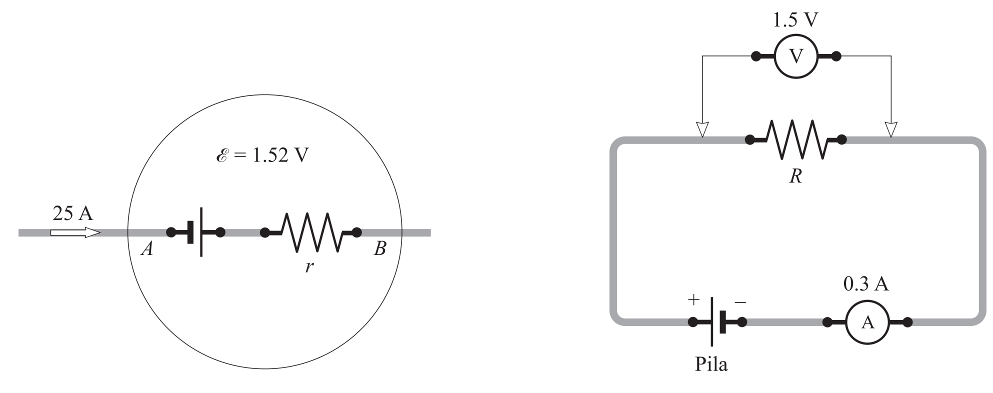


Figura 26-3 **Figura 26-4**

26.11 [I] Como se muestra en la figura 26-4, el método amperímetro-voltímetro se usa para medir una resistencia desconocida *R*. La lectura del amperímetro es de 0.3 A y la del voltímetro es de 1.50 V. Calcule el valor de *R* si el amperímetro y el voltímetro son ideales.

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1.50\text{ V}}{0.3\text{ A}} = 5\ \Omega$$

26.12 [I] Una barra metálica mide 2 m de largo y 8 mm de diámetro. Calcule su resistencia si la resistividad del metal es $1.76 \times 10^{-18}\ \Omega \cdot$ m.

$$R = \rho\frac{L}{A} = (1.76 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})\frac{2\text{ m}}{\pi(4 \times 10^{-3}\text{ m})^2} = 7 \times 10^{-4}\ \Omega$$

26.13 [I] El alambre del número 10 tiene un diámetro de 2.59 mm. ¿Cuántos metros de alambre de aluminio del número 10 se necesitan para proporcionar una resistencia de 1.0 Ω? La ρ para el aluminio es de 2.8×10^{-8} $\Omega \cdot$ m.

De $R = \rho L/\text{A}$, se tiene

$$L = \frac{RA}{\rho} = \frac{(1.0\ \text{Ý})(\pi)(2.59 \times 10^{-3}\ \text{m})^2/4}{2.8 \times 10^{-8}\ \text{Ý} \cdot \text{m}} = 0.19\ \text{km}$$

26.14 [II] (Este problema introduce una unidad que algunas veces se utiliza en Estados Unidos.) Un alambre de cobre del número 24 tiene un diámetro de 0.0201 pulg. Calcule *a*) el área de la sección transversal del alambre en milipulgadas circulares y *b*) la resistencia de 100 pies de alambre. La resistividad del cobre es de 10.4 Ω · milipulgadas circulares/pies.

El área de un círculo en milipulgadas circulares se define como el cuadrado del diámetro del círculo expresado en milipulgadas, donde 1 milipulgada = 0.001 pulg.

a) área en milipulgadas circulares = (20.1 milipulgadas)^2 = 404 milipulgadas circulares

b)
$$R = \rho\frac{L}{A} = \frac{(10.4\ \text{Ý} \cdot \text{milipulgadas circulares/pies})\ 100\ \text{pies}}{404\ \text{milipulgadas circulares}} = 2.57\ \Omega$$

26.15 [I] La resistencia de una bobina de alambre de cobre es de 3.35 Ω a 0 °C. ¿Cuál es su resistencia a 50 °C? Para el cobre $\alpha = 4.3 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$.

$$R = R_0 + \alpha R_0(T - T_0) = 3.35\ \Omega + (4.3 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1})(3.35\ \Omega)(50\ °\text{C}) = 4.1\ \Omega$$

26.16 [II] Se quiere que un resistor tenga una resistencia constante de 30.0 Ω, independiente de la temperatura. Para lograrlo, se utiliza un resistor de aluminio con resistencia R_{01} a 0 °C, conectado en serie con un resistor de carbono con resistencia R_{02} a 0 °C. Evalúe R_{01} y R_{02}, dado que $\alpha_1 = 3.9 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$ para el aluminio y $\alpha_2 = -0.50 \times 10^{-3}\ °\text{C}^{-1}$ para el carbono.

La resistencia combinada a la temperatura *T* será

$$R = [R_{01} + \alpha_1 R_{01}(T - T_0)] + [R_{02} = \alpha_2 R_{02}(T - T_0)]$$
$$= (R_{01} + R_{02}) + (\alpha_1 R_{01} + \alpha_2 R_{02})(T - T_0)$$

En consecuencia se tienen las dos condiciones

$$R_{01} + R_{02} = 30.0\ \Omega \qquad \text{y} \qquad \alpha_1 R_{01} + \alpha_2 R_{02} = 0$$

Al sustituir los valores dados de α_1 y α_2, y luego resolver para R_{01} y R_{02}, se encuentra que

$$R_{01} = 3.4\ \Omega \qquad R_{02} = 27\ \Omega$$

26.17 [II] En el modelo de Bohr, el electrón de un átomo de hidrógeno se mueve en una órbita circular de 5.3×10^{-11} m de radio con una rapidez de 2.2×10^6 m/s. Determine su frecuencia *f* y la corriente *I* en la órbita.

$$f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.2 \times 10^6\ \text{m/s}}{2\pi(5.3 \times 10^{-11}\ \text{m})} = 6.6 \times 10^{15}\ \text{rev/s}$$

Cada vez que el electrón circunda la órbita, transporta una carga *e* alrededor del giro. La carga que pasa por un punto sobre el giro cada segundo es

$$I = ef = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(6.6 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}) = 1.06 \times 10^{-3}\ \text{A} = 1.1\ \text{mA}$$

26.18 [II] Un alambre cuya resistencia es de 5.0 Ω pasa a través de un extrusor de modo que se hace un nuevo alambre que tiene el triple de longitud que el original. ¿Cuál es la nueva resistencia?

Se utilizará $R = \rho L/A$ para calcular la resistencia del nuevo alambre. Para encontrar ρ se usan los datos originales del alambre. Sean L_0 y A_0 la longitud y el área de la sección transversal iniciales, respectivamente. Entonces

$$5.0\ \Omega = \rho L_0/A_0 \qquad \text{o} \qquad \rho = (A_0/L_0)(5.0\ \Omega)$$

Se dijo que $L = 3L_0$. Para encontrar *A* en términos de A_0 se observa que el volumen del alambre no puede cambiar. Por tanto,

$$V_0 = L_0 A_0 \qquad \text{y} \qquad V_0 = LA$$

de donde $$LA = L_0A_0 \qquad \text{o} \qquad A = \left(\frac{L_0}{L_0}\right)(A_0) = \frac{A_0}{3}$$

En consecuencia, $$R = \frac{\rho L}{A} = \frac{(A_0/L_0)(5.0\ \Omega)(3L_0)}{A_0/3} = 9(5.0\ \Omega) = 45\ \Omega$$

26.19 [II] Se desea hacer un alambre que tenga una resistencia de 8.0 Ω a partir de 5.0 cm³ de un metal que tiene una resistividad de $9.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. ¿Cuáles deben ser la longitud y el área de sección transversal del alambre?

Se usa $R = \rho L/A$ con $R = 8.0\ \Omega$ y $\rho = 9.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m. Se sabe que el volumen del alambre (que es LA) es de 5.0×10^{-6} m³. Por tanto, se tienen dos ecuaciones para encontrar L y A:

$$R = 8.0\ \Omega = (9.0 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}\left(\frac{L}{A}\right) \qquad \text{y} \qquad LA = 5.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^3$$

A partir de ellas, se obtiene $L = 21$ m y $A = 2.4 \times 10^{-7}$ m².

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

26.20 [I] ¿Cuántos electrones por segundo pasan a través de una sección de alambre que lleva una corriente de 0.70 A? **Resp.** 4.4×10^{18} electrones/s.

26.21 [I] Un cañón de electrones de un aparato de TV emite un haz de electrones. La corriente del haz es de 1.0×10^{-5} A. ¿Cuántos electrones inciden sobre la pantalla de TV cada segundo? ¿Cuánta carga golpea por minuto la pantalla? **Resp.** 6.3×10^{13} electrones/s, -6.0×10^{-4} C/min.

26.22 [I] ¿Cuál es la corriente que circula por un tostador de 8.0 Ω cuando opera a 120 V? **Resp.** 15 A.

26.23 [I] ¿Cuál es la diferencia de potencial necesaria para pasar 3.0 A a través de 28 Ω? **Resp.** 84 V.

26.24 [I] Determine la diferencia de potencial entre los extremos de un alambre de 5.0 Ω de resistencia si a través de él pasan 720 C por minuto. **Resp.** 60 V.

26.25 [I] Una barra colectora de cobre que lleva 1200 A tiene una caída de potencial de 1.2 mV a lo largo de 24 cm de su longitud. ¿Cuál es la resistencia por metro de la barra? **Resp.** 4.2 $\mu\Omega$/m.

26.26 [I] Un amperímetro se conecta en serie con una resistencia desconocida y un voltímetro se conecta a través de las terminales de la resistencia. Si la lectura del amperímetro es de 1.2 A y la del voltímetro es de 18 V, calcule el valor de la resistencia. Suponga que los medidores son ideales. **Resp.** 15 Ω.

26.27 [I] Una compañía eléctrica instala dos alambres de cobre de 100 m desde la calle principal hasta el predio de un consumidor. Si la resistencia del alambre es de 0.10 Ω por cada 1 000 m, determine la caída de voltaje en la línea para una corriente de carga estimada en 120 A. **Resp.** 2.4 V.

26.28 [I] Cuando se prueba la resistencia del aislante entre la bobina del motor y la armadura, el valor obtenido es de 1.0 megaohm (10^6 Ω). ¿Cuánta corriente pasa a través del aislante del motor, si el voltaje de prueba es de 1 000 V? **Resp.** 1.0 mA.

26.29 [I] Calcule la resistencia interna de un generador eléctrico que tiene una fem de 120 V y un voltaje en sus terminales de 110 V cuando suministra 20 A. **Resp.** 0.50 Ω.

26.30 [I] Una pila seca que suministra 2 A tiene un voltaje en sus terminales de 1.41 V. ¿Cuál es la resistencia interna de la pila si su voltaje a circuito abierto es de 1.59 V? **Resp.** 0.09 Ω.

26.31 [II] Una pila tiene una fem de 1.54 V. Cuando se conecta en serie con una resistencia de 1.0 Ω, la lectura que marca un voltímetro conectado a través de las terminales de la pila es de 1.40 V. Determine la resistencia interna de la pila. **Resp.** 0.10 Ω.

26.32 [I] La resistencia interna de un acumulador de 6.4 V es de 4.8 mΩ. ¿Cuál es la máxima corriente teórica en un cortocircuito? (En la práctica, los cables conductores y las conexiones tienen alguna resistencia, y estos valores teóricos no se alcanzarían.) **Resp.** 1.3 kA.

26.33 [I] Una batería tiene una fem de 13.2 V y resistencia interna de 24.0 mΩ. Si la corriente de carga es de 20.0 A, determine el voltaje en las terminales. **Resp.** 12.7 V.

26.34 [I] Un acumulador tiene una fem de 25.0 V y resistencia interna de 0.200 Ω. Calcule su voltaje en las terminales cuando *a*) entrega 8.00 A, *b*) se carga con 8.00 A. **Resp.** *a*) 23.4 V; *b*) 26.6 V.

26.35 [II] Un cargador de baterías suministra una corriente de 10 A para cargar un acumulador que tiene un voltaje a circuito abierto de 5.6 V. Si un voltímetro se conecta a través del cargador y marca una lectura de 6.8 V, ¿cuál es la resistencia interna del acumulador en ese momento? **Resp.** 0.12 Ω.

26.36 [II] Encuentre la diferencia de potencial entre los puntos *A* y *B* de la figura 26-5 si *R* es de 0.70 Ω. ¿Cuál punto está a mayor potencial? **Resp.** –5.1 V, el punto *A*.

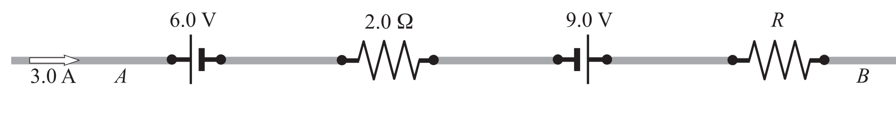


Figura 26-5

26.37 [II] Repita el problema 26.36 si la corriente fluye en dirección opuesta y $R = 0.70\ \Omega$. **Resp.** 11.1 V, punto *B*.

26.38 [II] En la figura 26-5, ¿qué tan grande debe ser *R* para que la caída de potencial de *A* a *B* sea 12 V? **Resp.** 3.0 Ω.

26.39 [II] Para el circuito que se muestra en la figura 26-6, encuentre la diferencia de potencial *a*) de *A* a *B*, *b*) de *B* a *C* y *c*) de *C* a *A*. Note que la corriente dada es de 2.0 A. **Resp.** *a*) –48 V; *b*) +28 V; *c*) +20 V.

26.40 [I] Calcule la resistencia de 180 m de alambre de plata que tiene una sección transversal de 0.30 mm^2. La resistividad de la plata es de $1.6 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. **Resp.** 9.6 Ω.

26.41 [I] La resistividad del aluminio es de $2.8 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$. ¿Qué longitud de alambre de aluminio de 1.0 mm de diámetro se necesita para que su resistencia sea de 4.0 Ω? **Resp.** 0.11 km.

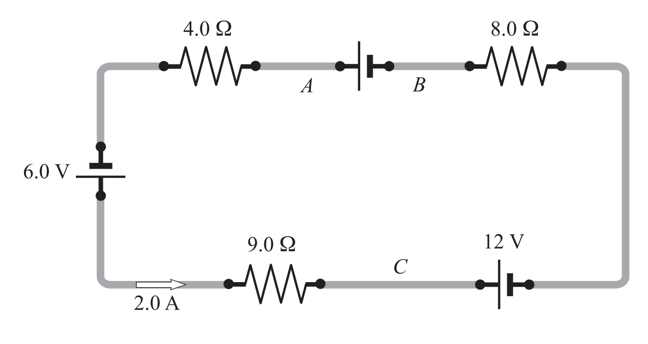


Figura 26-6

26.42 [II] El alambre de cobre del número 6 tiene un diámetro de 0.162 pulg. *a*) Calcule su área en milipulgadas circulares. *b*) Si $\rho = 10.4\ \Omega \cdot$ milipulgadas circulares/pies, encuentre la resistencia de 1.0×10^3 pies de alambre. (Consulte el problema 26.14.) **Resp.** *a*) 26.0×10^3 milipulgadas circulares; *b*) 0.40 Ω.

26.43 [II] Una bobina de alambre tiene una resistencia de 25.00 Ω a 20 °C y una resistencia de 25.17 Ω a 35 °C. ¿Cuál es su coeficiente térmico de resistencia? **Resp.** $4.5 \times 10^{-4}\ °C^{-1}$.

POTENCIA ELÉCTRICA 27

EL TRABAJO ELÉCTRICO (en joules) requerido para llevar una carga q (en coulombs) a través de una diferencia de potencial V (en volts) está dado por

$$W = qV$$

Cuando a q y V se les da los signos apropiados (es decir, subida de potencial positivo y caída de potencial negativo), el trabajo tendrá el signo adecuado. Entonces, para llevar una carga positiva a través de una subida de potencial, se debe realizar sobre la carga un trabajo positivo.

LA POTENCIA ELÉCTRICA (P) en watts que entrega una fuente de energía al llevar una carga q (en coulombs) a través de una subida de potencial V (en volts) en un tiempo t (en segundos) es

$$\text{Potencia entregada} = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}}$$

$$\mathrm{P} = \frac{Vq}{t}$$

Ya que $q/t = I$, esta ecuación se puede escribir como

$$\mathrm{P} = VI$$

donde I está en amperes.

LA PÉRDIDA DE POTENCIA EN UN RESISTOR se encuentra al sustituir V en VI por IR, o al reemplazar I en VI por V/R, para obtener

$$\mathrm{P} = VI = I^2R = \frac{V^2}{R}$$

EN UN RESISTOR, EL CALOR GENERADO por segundo es igual a la potencia perdida en el resistor:

$$\mathrm{P} = VI = I^2R$$

CONVERSIONES ÚTILES:

$$1\text{ W} = 1\text{ J/s} = 0.239\text{ cal/s} = 0.738\text{ pie}\cdot\text{lb/s}$$
$$1\text{ kW} = 1.341\text{ hp} = 56.9\text{ Btu/min}$$
$$1\text{ hp} = 746\text{ W} = 33\,000\text{ pies}\cdot\text{lb/min} = 42.4\text{ Btu/min}$$
$$1\text{ kW}\cdot\text{h} = 3.6\times10^6\text{ J} = 3.6\text{ MJ.}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

27.1 [I] Calcule el trabajo y la potencia promedio que se requiere para transferir 96 kC de carga en una hora (l.0 h) a través de una subida de potencial de 50 V.

El trabajo realizado es igual al cambio en la energía potencial:

$$W = qV = (96\,000\text{ C})(50\text{ V}) = 4.8\times10^6\text{ J} = 4.8\text{ MJ}$$

La potencia es la tasa de transferencia de energía:

$$\mathrm{P} = \frac{W}{t} = \frac{4.8\times10^6\text{ J}}{3\,600\text{ s}} = 1.3\text{ kW}$$

27.2 [I] ¿Cuánta corriente consume un foco de 60 W cuando se conecta a su voltaje adecuado de 120 V?

De la ecuación $\mathrm{P} = VI$,

$$I = \frac{P}{V} = \frac{60\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 0.50\ \text{A}$$

27.3 [I] Un motor eléctrico consume 5.0 A de una línea de 110 V. Determine la potencia aportada y la energía, en J y kW · h, suministrada al motor en 2.0 h.

$$\text{Potencia} = \text{P} = VI = (110\ \text{V})(5.0\ \text{A}) = 0.55\ \text{kW}$$
$$\text{Energía} = \text{P}t = (550\ \text{W})(7200\ \text{s}) = 4.0\ \text{MJ}$$
$$= (0.55\ \text{kW})(2.0\ \text{h}) = 1.1\ \text{kW} \cdot \text{h}$$

27.4 [I] Una plancha eléctrica tiene una resistencia de 20 Ω y consume una corriente de 5.0 A. Calcule el calor, en joules, entregado en 30 s.

$$\text{Energía} = \text{P}t$$
$$\text{Energía} = I^2Rt = (5\ \text{A})^2(20\ \Omega)(30\ \text{s}) = 15\ \text{kJ}$$

27.5 [II] Un calentador eléctrico tiene una resistencia de 8.0 Ω y consume 15 A de la línea principal. ¿A qué tasa se entrega energía térmica, en W? ¿Cuál es el costo de operación del calentador en un periodo de 4.0 h a razón de 10 ¢/kW · h?

$$W = I^2R = (15\ \text{A})^2(8.0\ \Omega) = 1\,800 = 1.8\ \text{kW}$$
$$\text{Costo} = (1.8\ \text{kW})(4.0\ \text{h})(10\ ¢/\text{kW} \cdot \text{h}) = 72\ ¢$$

27.6 [II] Una bobina disipa 800 cal/s cuando se suministran 20 V a través de sus extremos. Calcule su resistencia.

$$\text{P} = (800\ \text{cal/s})(4.184\ \text{J/cal}) = 3\,347\ \text{J/s}$$

Entonces, puesto que $\text{P} = V^2/R$

$$R = \frac{(20\ \text{V})^2}{3347\ \text{J/s}} = 0.12\ \Omega$$

27.7 [II] Una línea tiene una resistencia total de 0.20 Ω y suministra 10.00 kW a 250 V a una pequeña fábrica. ¿Cuál es la eficiencia de la transmisión?

La línea disipa potencia debido a su resistencia. Por consiguiente, se necesita encontrar la corriente en la línea. Se usa $\text{P} = VI$ para calcular $I = \text{P}/V$. Entonces

$$\text{Potencia perdida en la línea} = I^2R = \left(\frac{\text{P}}{V}\right)^2 R = \left(\frac{10\,000\ \text{W}}{250\ \text{V}}\right)^2 (0.20\ \Omega) = 0.32\ \text{kW}$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{potencia entregada por la línea}}{\text{potencia proporcionada a la línea}} = \frac{10.00\ \text{kW}}{(10.00 + 0.32)\ \text{kW}} = 0.970 = 97.0\%$$

27.8 [II] Un motor de malacate alimentado por una fuente de 240 V consume 12.0 A para levantar una carga de 800 kg a razón de 9.00 m/min. Determine la potencia aportada al motor y la salida de potencia, ambas en caballos de potencia, y la eficiencia total del sistema.

$$\text{Potencia aportada} = IV = (12.0\ \text{A})(240\ \text{V}) = 2\,880\ \text{W} = (2.88\ \text{kW})(1.34\ \text{hp/kW}) = 3.86\ \text{hp}$$

$$\text{Potencia aprovechada} = Fv = (800 \times 9.81\ \text{N})\left(\frac{9.00\ \text{m}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1.00\ \text{min}}{60.0\ \text{s}}\right)\left(\frac{1.00\ \text{hp}}{746\ \text{J/s}}\right) = 1.58\ \text{hp}$$

$$\text{Eficiencia} = \frac{1.58\ \text{hp de salida}}{3.86\ \text{hp de entrada}} = 0.408 = 40.8\%$$

27.9 [II] Las luces de un automóvil se dejan prendidas por descuido. Éstas consumen 95.0 W. ¿Cuánto tiempo tardarán en agotarse los 12.0 V de la carga total de la batería, si el consumo relativo de la misma es de 150 amperes-hora (A · h)?

Como una aproximación, suponga que la batería mantiene su potencial de 12.0 V hasta que se agota. Su consumo relativo de 150 A · h significa que puede proporcionar la energía equivalente a una corriente de 150 A que fluye para 1.00 h (3 600 s). Por consiguiente, la energía total que puede proporcionar la batería es

$$\text{Energía total aportada} = (\text{potencia})(\text{tiempo}) = (VI)t = (12.0\ \text{V} \times 150\ \text{A})(3\ 600\ \text{s}) = 6.48 \times 10^6\ \text{J}$$

La energía consumida por las luces en un tiempo t es

$$\text{Energía disipada} = (95\ \text{W})(t)$$

Al igualar las dos energías y resolver para t, se encuentra $t = 6.82 \times 10^4\ \text{s} = 18.9\ \text{h}$.

27.10 [II] ¿Cuál es el costo de calentar eléctricamente 50 litros de agua de 40 °C a 100 °C a 8.0 ¢/kW · h?

$$\text{Calor ganado por el agua} = (\text{masa}) \times (\text{calor específico}) \times (\text{elevación de temperatura})$$
$$= (50\ \text{kg}) \times (1\ 000\ \text{cal/kg} \cdot °\text{C}) \times (60\ °\text{C}) = 3.0 \times 10^6\ \text{cal}$$
$$\text{Costo} = (3.0 \times 10^6\ \text{cal}) \left(\frac{4.184\ \text{J}}{1\ \text{cal}}\right) \left(\frac{1\ \text{kW} \cdot \text{h}}{3.6 \times 10^6\ \text{J}}\right) \left(\frac{8.0\ ¢}{1\ \text{kW} \cdot \text{h}}\right) = 28\ ¢$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

27.11 [I] Un calentador tiene una especificación de 1 600 W/120 V. ¿Cuánta corriente consume el calentador de una fuente de 120 V? **Resp.** 13.3 A.

27.12 [I] Un foco eléctrico está marcado con 40 W/120 V. ¿Cuál es su resistencia cuando se enciende con una fuente de 120 V? **Resp.** 0.36 Ω.

27.13 [II] La chispa de un relámpago artificial de 10.0 MV libera una energía de 0.125 MW · s. ¿Cuántos coulombs de carga fluyen? **Resp.** 0.0125 C.

27.14 [II] En un conductor, cuyas terminales están conectadas a una diferencia de potencial de 100 V, existe una corriente de 1.5 A. Calcule la carga total transferida en un minuto, el trabajo realizado al transferir esta carga y la potencia empleada para calentar al conductor si toda la energía eléctrica se convierte en calor.
Resp. 90 C, 9.0 kJ, 0.15 kW.

27.15 [II] Un motor eléctrico consume l5.0 A a 110 V. Determine *a*) la entrada de potencia y *b*) el costo de operar el motor durante 8.00 h a 10.0 ¢/kW · h. **Resp.** *a*) 1.65 kW; *b*) $1.32.

27.16 [I] Una corriente de 10 A fluye por una línea de 0.15 Ω de resistencia. Calcule la tasa de producción de energía térmica en watts. **Resp.** 15 W.

27.17 [II] Un asador eléctrico produce 400 cal/s cuando la corriente que pasa por él es de 8.0 A. Determine la resistencia del asador. **Resp.** 26 Ω.

27.18 [II] Un foco de 25.0 W y 120 V tiene una resistencia en frío de 45.0 Ω. Cuando se le aplica una diferencia de potencial, ¿cuál es la corriente instantánea? ¿Cuál es la corriente en condiciones normales de operación?
Resp. 2.67 A, 0.208 A.

27.19 [II] Con una corriente de 400 A, un interruptor defectuoso se sobrecalienta debido a la falta de contacto superficial. Un milivoltímetro conectado a través del interruptor muestra una caída de 100 mV. ¿Cuál es la pérdida de potencia debida a la resistencia de contacto? **Resp.** 40.0 W.

27.20 [II] ¿Cuánta potencia disipa un foco eléctrico marcado con 60 W/120 V cuando opera a un voltaje de 115 V? Desprecie la disminución en la resistencia cuando baja el voltaje. **Resp.** 55 W.

27.21 [II] El alambrado de una casa porta una corriente de 30 A mientras disipa no más de 1.40 W de calor por metro de su longitud. ¿Cuál es el diámetro mínimo del alambre si su resistividad es de $1.68 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$?
Resp. 3.7 mm.

27.22 [II] Un calentador eléctrico de 10.0 Ω trabaja con una línea de 110 V. Calcule la tasa a la que genera calor, en W y en cal/s. **Resp.** 1.21 kW = 290 cal/s.

27.23 [III] Un motor eléctrico, con una eficiencia de 95%, utiliza 20 A a 110 V. ¿Cuál es la potencia en caballos de fuerza aprovechada por el motor? ¿Cuántos watts se pierden en forma de calor? ¿Cuántas calorías de calor se producen por segundo? Si el motor trabaja durante 3.0 h, ¿qué energía, en MJ y en kW · h, se disipa? **Resp.** 2.8 hp, 0.11 kW, 26 cal/s, 24 MJ = 6.6 kW · h.

27.24 [II] Una grúa eléctrica utiliza 8.0 A a 150 V para subir una carga de 450 kg a razón de 7.0 m/min. Determine la eficiencia del sistema. **Resp.** 43%.

27.25 [III] ¿Cuál será la resistencia de un calentador eléctrico que se usa para elevar la temperatura de 500 g de agua de 28 °C hasta el punto de ebullición en 2 minutos? Suponga que se pierde 25% de calor. El calentador trabaja con una línea de 110 V. **Resp.** 7.2 Ω.

27.26 [II] Calcule el costo por hora a razón de 8.0 ¢/kW · h para calentar con energía eléctrica una habitación, si se requiere 1.0 kg/h de carbón de antracita que tiene un calor de combustión de 8 000 kcal/kg. **Resp.** 74.4 ¢/h.

27.27 [II] Entre dos estaciones se transmite potencia a 80 kV. Si el voltaje se puede incrementar a 160 kV sin cambiar el tamaño del cable, ¿cuánta potencia adicional se puede transmitir con la misma corriente? ¿Qué efecto tiene el aumento de potencia en las pérdidas por calor en la línea? **Resp.** potencia adicional = potencia original, no tiene efecto.

27.28 [II] Un acumulador, con una fem de 6.4 V y resistencia interna de 0.080 Ω, se carga con una corriente de 15 A. Calcule *a*) las pérdidas de potencia en el calentamiento interno de la batería, *b*) la tasa a la que se almacena la energía en la batería y *c*) su voltaje en terminales. **Resp.** *a*) 18 W; *b*) 96 W; *c*) 7.6 V.

27.29 [II] Un tanque que contiene 200 kg de agua se utilizó como un baño de temperatura constante. ¿Cuánto tiempo llevaría calentar el baño de 20 °C a 25 °C con un calentador de inmersión de 250 W? Desprecie la capacidad calórica de la estructura del tanque y las pérdidas por calor al aire. **Resp.** 4.6 h.

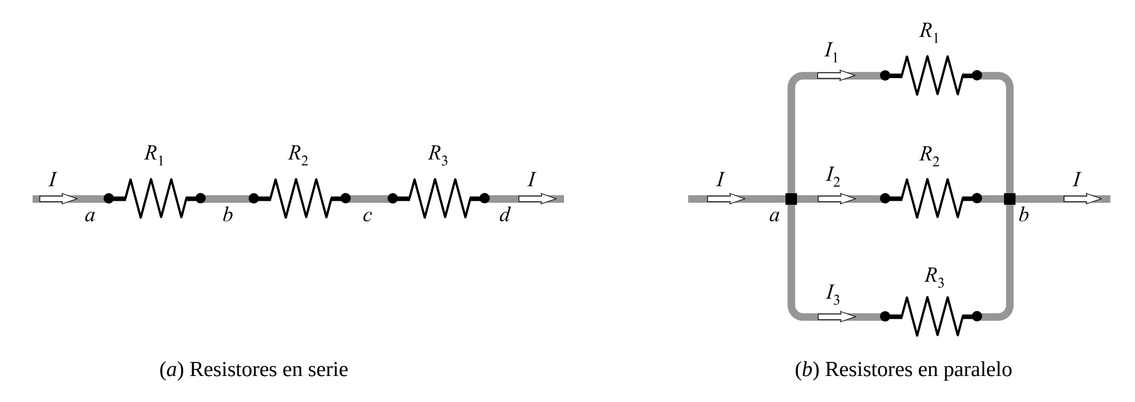
RESISTENCIA EQUIVALENTE; CIRCUITOS SIMPLES 28

RESISTORES EN SERIE: Cuando la corriente sólo puede seguir una trayectoria al fluir a través de dos o más resistores conectados en línea, se dice que los resistores están en **serie**. En otras palabras, cuando una y sólo una terminal de un resistor se conecta directamente a una y sólo una terminal de otro resistor, los dos están en serie y la misma corriente pasa por ambos. Un **nodo** es un punto donde se encuentran tres o más alambres o ramales que llevan corriente. No hay nodos entre los elementos de circuitos (como capacitores, resistores y baterías) que estén conectados en serie. Un caso típico se muestra en la figura 28-1*a*. Para varios resistores en serie, su resistencia equivalente, R_{eq}, está dada por

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \qquad \text{(combinación en serie)}$$

donde R_1, R_2, R_3, . . . , son las resistencias de los diversos resistores. Observe que las resistencias conectadas en serie se combinan como las capacitancias en paralelo (vea el capítulo 25). Se supone que todos los alambres de conexión no tienen una resistencia efectiva.

En una combinación en serie, la corriente a través de cada resistencia es la misma para cualquiera de ellas. La caída de potencial (c.p.) a través de la combinación es igual a la suma de las caídas de potencial individuales. *La resistencia equivalente en serie siempre es mayor que la más grande de las resistencias individuales.*



(*a*) Resistores en serie

(*b*) Resistores en paralelo

Figura 28-1

RESISTORES EN PARALELO: Varios resistores están conectados en **paralelo** entre dos nodos si un extremo de cada resistor se conecta a un nodo y el otro extremo de cada uno se conecta en el otro nodo. Un caso típico se muestra en la figura 28-1*b*, donde los puntos *a* y *b* son nodos. Su resistencia equivalente, R_{eq}, está dada por

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \qquad \text{(combinación en paralelo)}$$

La resistencia equivalente en paralelo siempre es menor que la más pequeña de las resistencias individuales. Si se conectan resistores adicionales en paralelo, el valor de R_{eq} disminuye para la combinación. Observe que las resistencias en paralelo se combinan como las capacitancias en serie (vea el capítulo 25).

La caída de potencial *V* a través de un resistor en paralelo es la misma que la caída de potencial a través de cada uno de los otros resistores de la combinación. La corriente a través del *n*-ésimo resistor es $I_n = V/R_n$ y la corriente total que entra a la combinación es igual a la suma de las corrientes de derivación individuales (vea la figura 28-1*b*).

PROBLEMAS RESUELTOS

28.1 [II] Deduzca la fórmula para la resistencia equivalente R_{eq} de los resistores R_1, R_2 y R_3, *a*) en serie y *b*) en paralelo, como se muestra en las figuras 28-1*a*) y *b*).

a) Para la combinación en serie,

$$V_{ad} = V_{ab} + V_{bc} + V_{cd} = IR_1 + IR_2 + IR_3$$

pues la corriente I es la misma para los tres resistores. Al dividir entre I se tiene

$$\frac{V_{ad}}{I} = R_1 + R_2 + R_3 \qquad \text{o} \qquad R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3$$

ya que V_{ad}/I es por definición la resistencia equivalente R_{eq} de la combinación.

b) La c.p. es igual para los tres resistores, así que

$$I_1 = \frac{V_{ab}}{R_1} \qquad I_2 = \frac{V_{ab}}{R_2} \qquad I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3}$$

Puesto que la corriente de la línea I es la suma de las corrientes en las derivaciones,

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{V_{ab}}{R_1} + \frac{V_{ab}}{R_2} + \frac{V_{ab}}{R_3}$$

Al dividir entre V_{ab} se tiene

$$\frac{I}{V_{ab}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

porque V_{ab}/I es por definición la resistencia equivalente R_{eq} de la combinación.

28.2 [II] Como es muestra en la figura 28-2*a*, una batería (resistencia interna de 1 Ω) se conecta en serie con dos resistores. Calcule *a*) la corriente del circuito, *b*) la c.p. a través de cada resistor y *c*) la c.p. de las terminales de la batería.

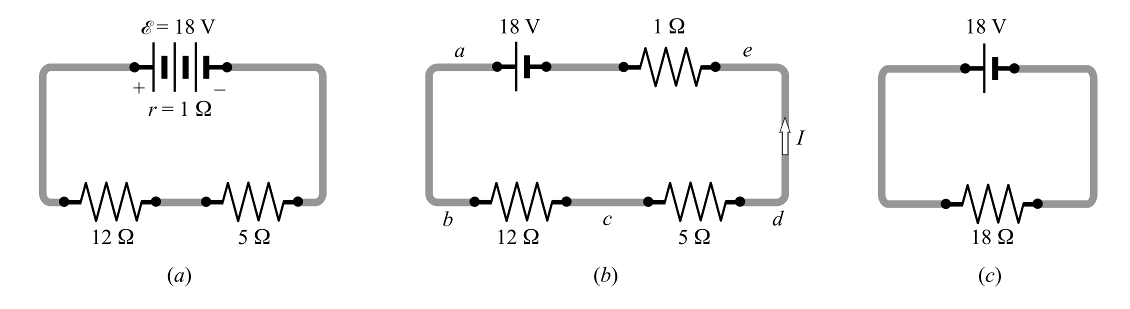


Figura 28-2

El circuito se vuelve a dibujar en la figura 28-2*b* para mostrar la resistencia de la batería. Se tiene

$$R_{\text{eq}} = 5\ \Omega + 12\ \Omega + 1\ \Omega = 18\ \Omega$$

Por consiguiente, el circuito es equivalente al que se muestra en la figura 28-2*c*. Al aplicar $V = IR$ se tiene

a)
$$I = \frac{V}{R} = \frac{18\ \text{V}}{18\ \Omega} = 1.0\ \text{A}$$

b) Puesto que $I = 1.0$ A, puede encontrarse la c.p. desde *b* hasta *c* por medio de

$$V_{bc} = IR_{bc} = (1.0\ \text{A})(12\ \Omega) = 12\ \text{V}$$

y desde *c* hasta *d* por

$$V_{cd} = IR_{cd} = (1.0\ \text{A})(5\ \Omega) = 5\ \text{V}$$

Note que I es la misma en todos los puntos en un circuito en serie.

c) La c.p. de las terminales de la batería es la c.p. desde *a* hasta *e*. Por tanto,

$$\text{c.p. de las terminales} = V_{bc} + V_{cd} = 12 + 5 = 17\ \text{V}$$

O bien, se podría empezar en e y calcular los cambios de potencial a través de la batería desde e hasta a. Considere las caídas de voltaje como negativas, así que

$$\text{c.p. en las terminales} = -Ir + \mathscr{E} = -(1.0\text{ A})(1\ \Omega) + 18\text{ V} = 17\text{ V}$$

28.3 [II] Una red doméstica de 120 V tiene encendidos los siguientes focos: 40.0 W, 60.0 W y 75.0 W. Determine la resistencia equivalente de estos focos.

Los circuitos domésticos están construidos de tal manera que cada dispositivo está conectado en paralelo con los otros. De $P = VI = V^2/R$, se tiene para el primer foco

$$R_1 = \frac{V^2}{P_1} = \frac{(120\text{ V})^2}{40.0\text{ W}} = 360\ \Omega$$

De igual modo, $R_2 = 240\ \Omega$ y $R_3 = 192\ \Omega$. En virtud de que están en paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{360\ \Omega} + \frac{1}{240\ \Omega} + \frac{1}{192\ \Omega} \qquad \text{o} \qquad R_{eq} = 82.3\ \Omega$$

Como prueba, note que la potencia total que se extrae de la línea es 40.0 W + 60.0 W + 75.0 W = 175.0 W. Por tanto, con $P = V^2/R$, se obtiene

$$R_{eq} = \frac{V^2}{\text{potencia total}} = \frac{(120\text{ V})^2}{175.0\text{ W}} = 82.3\ \Omega$$

28.4 [I] ¿Qué resistencia debe haber en paralelo con una de 12 Ω para obtener una resistencia combinada de 4 Ω?

De
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

se tiene
$$\frac{1}{4\ \Omega} = \frac{1}{12\ \Omega} + \frac{1}{R_2}$$

de donde
$$R_2 = 6\ \Omega$$

28.5 [II] Varios resistores de 40 Ω se deben conectar de forma que fluyan l5 A desde una fuente de 120 V. ¿Cómo puede lograrse esto?

La resistencia equivalente debe ser tal que fluyan 15 A de 120 V. Entonces,

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{120\text{ V}}{15\text{ A}} = 8\ \Omega$$

Los resistores deben estar en paralelo, pues la resistencia combinada va a ser menor que cualquiera de ellos. Sea n el número requerido de resistores de 40 Ω, entonces se tiene

$$\frac{1}{80\ \Omega} = n\left(\frac{1}{40\ \Omega}\right) \qquad \text{o} \qquad n = 5$$

28.6 [II] Para cada circuito mostrado en la figura 28-3, determine la corriente I a través de la batería.

a) Los resistores de 3.0 Ω y 7.0 Ω están en paralelo; su resistencia conjunta R_1 se encuentra a partir de

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3.0\ \Omega} + \frac{1}{7.0\ \Omega} = \frac{10}{21\ \Omega} \qquad \text{o} \qquad R_1 = 2.1\ \Omega$$

Entonces, la resistencia equivalente para todo el circuito es

$$R_{eq} = 2.1\ \Omega + 5.0\ \Omega + 0.4\ \Omega = 7.5\ \Omega$$

y la corriente en la batería es

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{30\text{ V}}{7.5\ \Omega} = 4.0\text{ A}$$

b) Los resistores de 7.0 Ω, 1.0 Ω y 10.0 Ω están en serie; su resistencia conjunta es de 18.0 Ω. Entonces la de 18.0 Ω está en paralelo con la de 6.0 Ω; su resistencia combinada R_1 está dada por

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{18.0\,\Omega} + \frac{1}{6.0\,\Omega} \qquad \text{o} \qquad R_1 = 4.5\,\Omega$$

Por consiguiente, la resistencia equivalente del circuito completo es

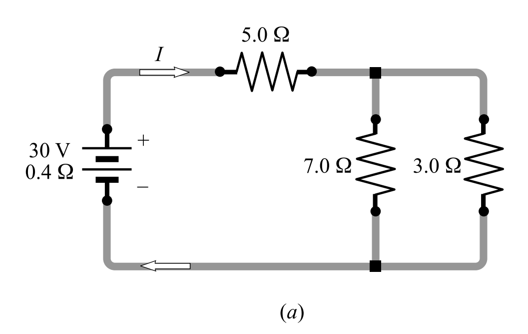
$$R_{eq} = 4.5\,\Omega + 2.0\,\Omega + 8.0\,\Omega + 0.3\,\Omega = 14.8\,\Omega$$

y la corriente en la batería es

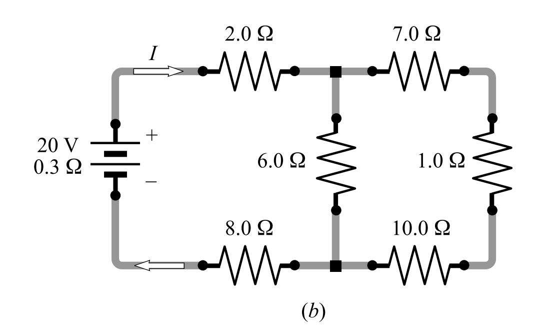
$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{20\text{ V}}{14.8\,\Omega} = 1.4\text{ A}$$

c) Los resistores de 5.0 Ω y 19.0 Ω están en serie; su resistencia conjunta es de 24.0 Ω. Después los 24.0 Ω están en paralelo con los 8.0 Ω; su resistencia conjunta R_1 se determina por

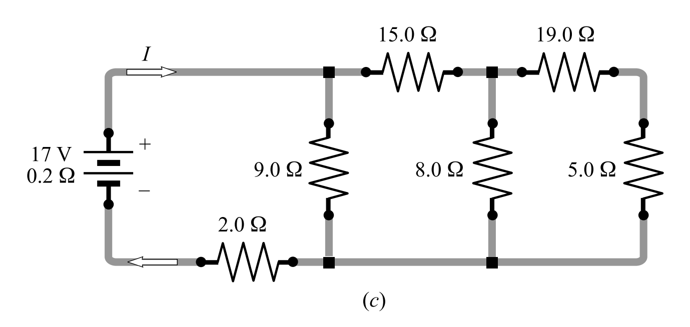
$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{24.0\,\Omega} + \frac{1}{8.0\,\Omega} \qquad \text{o} \qquad R_1 = 6.0\,\Omega$$



(*a*)



(*b*)



(*c*)

Figura 28-3

Ahora bien, R_1 = 6.0 Ω está en serie con 15.0 Ω; su resistencia conjunta es de 6.0 Ω + 15.0 Ω = 21.0 Ω. Como los 21.0 Ω están en paralelo con los 9.0 Ω, su resistencia combinada es

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{21.0\,\Omega} + \frac{1}{9.0\,\Omega} \qquad \text{o} \qquad R_2 = 6.3\,\Omega$$

Por consiguiente, la resistencia equivalente para el circuito completo es

$$R_{eq} = 6.3\,\Omega + 2.0\,\Omega + 0.2\,\Omega = 8.5\,\Omega$$

y la corriente en la batería es

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{eq}} = \frac{17\text{ V}}{8.5\,\Omega} = 2.0\text{ A}$$

28.7 [II] Para el circuito que se muestra en la figura 28-4, determine la corriente en cada resistor y la corriente que sale de la fuente de 40 V.

Note que la c.p. de *a* a *b* es de 40 V. Por tanto, la c.p. en cada resistor es de 40 V. Entonces,

$$I_2 = \frac{40\ \text{V}}{2.0\ \Omega} = 20\ \text{A} \qquad I_5 = \frac{40\ \text{V}}{5.0\ \Omega} = 8.0\ \text{A} \qquad I_8 = \frac{40\ \text{V}}{8.0\ \Omega} = 5.0\ \text{A}$$

Dado que *I* se divide en tres corrientes,

$$I = I_2 + I_5 + I_8 = 20\ \text{A} + 8.0\ \text{A} + 5.0\ \text{A} = 33\ \text{A}$$

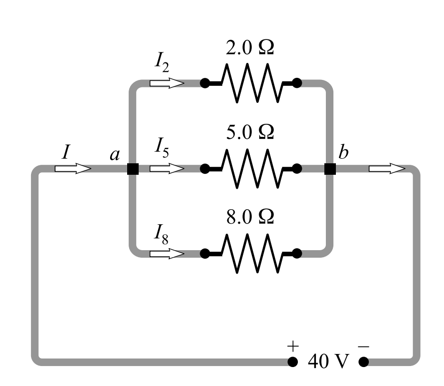


Figura 28-4

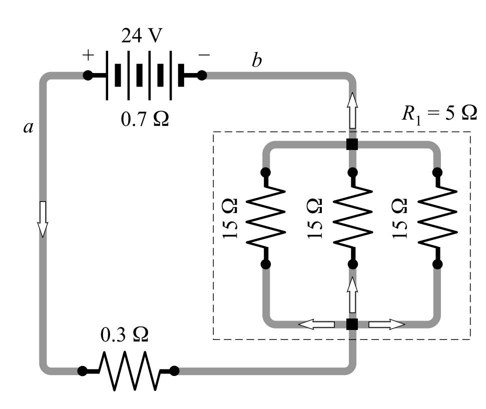


Figura 28-5

28.8 [II] En la figura 28-5 la batería tiene una resistencia interna de 0.7 Ω. Determine *a*) la corriente entregada por la batería, *b*) la corriente en cada resistor de 15 Ω y *c*) el voltaje en las terminales de la batería.

a) Primero se tiene que encontrar la resistencia equivalente del circuito completo y con ella y la ley de Ohm, determinar la corriente. Para las resistencias agrupadas en paralelo R_1 se tiene

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{15\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega} + \frac{1}{15\ \Omega} = \frac{3}{15\ \Omega} \qquad \text{o} \qquad R_1 = 5.0\ \Omega$$

Por tanto, $$R_{\text{eq}} = 5.0\ \Omega + 0.3\ \Omega + 0.7\ \Omega = 6.0\ \Omega$$

y $$I = \frac{\mathscr{E}}{R_{\text{eq}}} = \frac{24\ \text{V}}{6.0\ \Omega} = 4.0\ \text{A}$$

b) **Método 1**

La combinación de tres resistores conectados en paralelo es equivalente a $R_1 = 5.0\ \Omega$. Una corriente de 4.0 A fluye través de ella. Por tanto, la c.p. a través de la combinación es

$$IR_1 = (4.0\ \text{A})(5.0\ \Omega) = 20\ \text{V}$$

Ésta también es la c.p. en cada uno de los resistores de 15 Ω. Por consiguiente, la corriente que pasa por cada resistor de 15 Ω es

$$I_{15} = \frac{V}{R} = \frac{20\ \text{V}}{15\ \Omega} = 1.3\ \text{A}$$

Método 2

En este caso especial se sabe que un tercio de la corriente circulará a través de cada resistor de 15 Ω. Así que

$$I_{15} = \frac{4.0\ \text{A}}{3} = 1.3\ \text{A}$$

c) Si parte de *a* y se dirige hacia *b* por afuera de la batería:

$$V \text{ de } a \text{ a } b = -(4.0\ \text{A})(0.3\ \Omega) - (4.0\ \text{A})(5.0\ \Omega) = -21.2\ \text{V}$$

La c.p. en las terminales de la batería es de 21.2 V. O se podría escribir para este caso de una batería descargándose

$$\text{c.p. en las terminales} = \mathscr{E} - Ir = 24\ \text{V} - (4.0\ \text{A})(0.7\ \Omega) = 21.2\ \text{V}$$

28.9 [II] Determine la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* para la combinación que se muestra en la figura 28-6*a*.

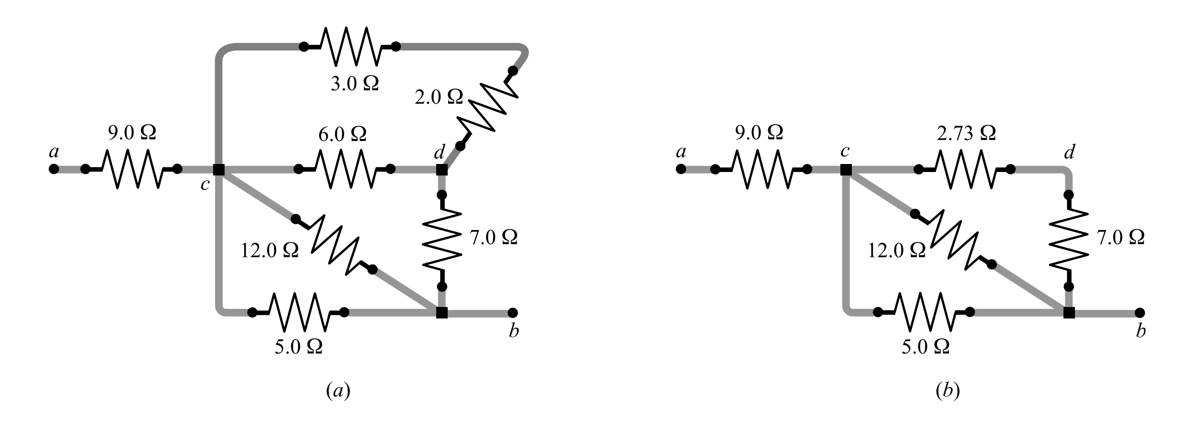


Figura 28-6

Los resistores de 3.0 Ω y 2.0 Ω están conectados en serie y son equivalentes a un resistor de 5.0 Ω. Estos 5.0 Ω equivalentes están en paralelo con los 6.0 Ω y su resistencia equivalente, R_1, es

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{5.0\ \Omega} + \frac{1}{6.0\ \Omega} = 0.20 + 0.167 = 0.367\ \Omega^{-1} \quad \text{o} \quad R_1 = 2.73\ \Omega$$

El circuito reducido hasta el momento se muestra en la figura 28-6*b*.
Los 7.0 Ω y 2.73 Ω equivalen a 9.73 Ω. Ahora los 5.0 Ω, 12.0 Ω y 9.73 Ω están en paralelo, y su equivalente, R_2, es

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{5.0\ \Omega} + \frac{1}{12.0\ \Omega} + \frac{1}{9.73\ \Omega} = 0.386\ \Omega^{-1} \quad \text{o} \quad R_2 = 2.6\ \Omega$$

Estos 2.6 Ω están en serie con el resistor de 9.0 Ω. Por tanto, la resistencia equivalente de la combinación es 9.0 Ω + 2.6 Ω = 11.6 Ω.

28.10 [II] Una corriente de 5.0 A fluye en el circuito de la figura 28-6*a* desde el punto *a* y hasta el punto *b*. ¿Cuál es la diferencia de potencial de *a* a *b*? *b*) ¿Cuánta corriente fluye por el resistor de 12.0 Ω?

En el problema 28.9 se encontró que la resistencia equivalente para esta combinación es de 11.6 Ω, y se sabe que la corriente a través de él es de 5.0 A.

a) La caída de voltaje de *a* a $b = IR_{eq} = (5.0\ \text{A})\ (11.6\ \Omega) = 58\ \text{V}$

b) La caída de voltaje de *a* a *c* es de (5.0 A)(9.0 Ω) = 45 V. Entonces, de lo calculado en el inciso *a*), la caída de voltaje de *c* a *b* es

$$58\ \text{V} - 45\ \text{V} = 13\ \text{V}$$

y la corriente en el resistor de 12.0 Ω es

$$I_{12} = \frac{V}{R} = \frac{13\ \text{V}}{12\ \Omega} = 1.1\ \text{A}$$

28.11 [II] Como se muestra en la figura 28-7, la corriente I se divide en I_1 e I_2. Encuentre I_1 e I_2 en términos de I, R_1 y R_2.

Las caídas de potencial a través de R_1 y R_2 son las mismas, ya que los resistores están en paralelo, así que

$$I_1R_1 = I_2R_2$$

Pero $I = I_1 + I_2$, por tanto $I_2 = I - I_1$. Al sustituir en la primera ecuación se obtiene

$$I_1R_1 = (I - I_1)R_2 = IR_2 - I_1R_2 \quad \text{o} \quad I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}I$$

Al usar este resultado junto con la primera ecuación se obtiene

$$I_2 = \frac{R_1}{R_2}I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}I$$

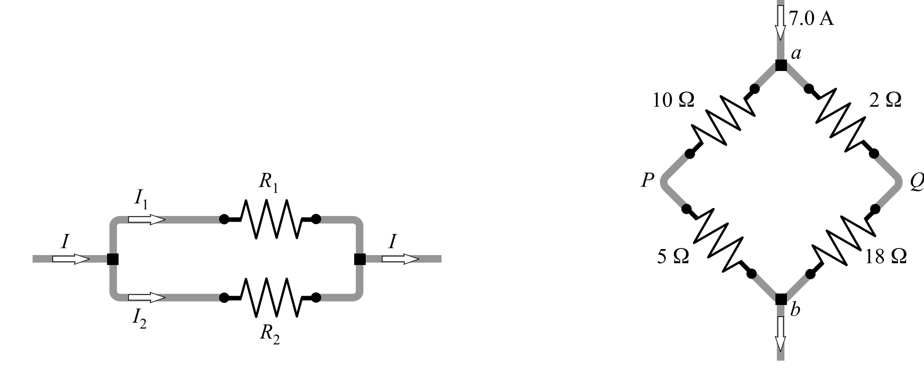


Figura 28-7 **Figura 28-8**

28.12 [II] Encuentre la diferencia de potencial entre los puntos P y Q en la figura 28-8. ¿Cuál punto tiene mayor potencial?

Del resultado del problema 28.11, las corrientes a través de P y Q son

$$I_P = \frac{2\ \Omega + 18\ \Omega}{10\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega + 18\ \Omega}(7.0\ \text{A}) = 4.0\ \text{A}$$

$$I_Q = \frac{10\ \Omega + 5\ \Omega}{10\ \Omega + 5\ \Omega + 2\ \Omega + 18\ \Omega}(7.0\ \text{A}) = 3.0\ \text{A}$$

Ahora comience en el punto P y pase por el punto a hasta el punto Q, para encontrar

Cambio de potencial de P a Q = +(4.0 A)(10 Ω) − (3.0 A)(2 Ω) = +34 V

(Note que se pasa por una subida de potencial de P a a porque se va en contra de la corriente. De a a Q hay una caída.) Por tanto, la diferencia de potencial entre P y Q es de 34 V, con Q como el de mayor potencial.

28.13 [II] Para el circuito de la figura 28-9*a*, encuentre *a*) I_1, I_2 e I_3; *b*) la corriente en el resistor de 12 Ω.

a) El circuito se reduce al que se muestra en la figura 28-9*b*. Ahí se tienen 24 Ω en paralelo con 12 Ω, de modo que la resistencia equivalente por abajo de los puntos a y b es

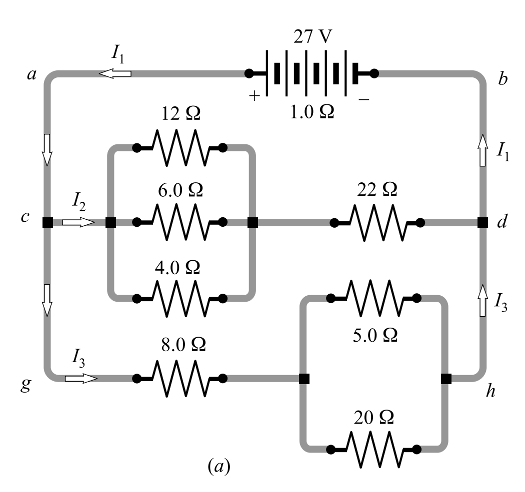
$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{24\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega} = \frac{3}{24\ \Omega} \quad \text{o} \quad R_{ab} = 8.0\ \Omega$$

Al sumar a esto la resistencia interna de la batería de 1.0 Ω se obtiene una resistencia equivalente total de 9.0 Ω. Para encontrar la corriente de la batería, se escribe

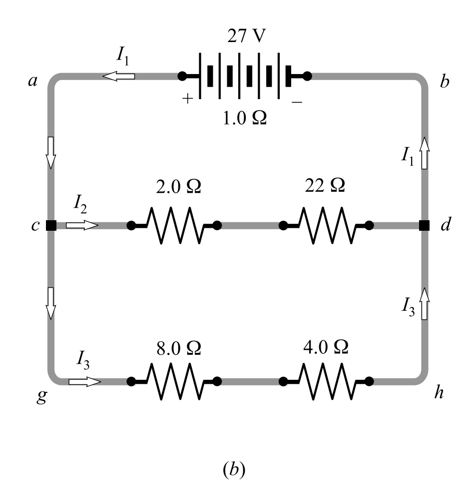
$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_{\text{eq}}} = \frac{27\ \text{V}}{9.0\ \Omega} = 3.0\ \text{A}$$

Esta misma corriente fluye a través de la resistencia equivalente por abajo de a y b, así que

c.p. de a a b = c.p. de c a d = I_1R_{ab} = (3.0 A)(8.0 Ω) = 24 V



(a)



(b)

Figura 28-9

Al aplicar $V = IR$ para la derivación cd se obtiene

$$I_2 = \frac{V_{cd}}{R_{cd}} = \frac{24 \text{ V}}{24\ \Omega} = 1.0 \text{ A}$$

De igual modo,

$$I_3 = \frac{V_{gh}}{R_{gh}} = \frac{24 \text{ V}}{12\ \Omega} = 2.0 \text{ A}$$

Al verificar, se observa que $I_2 + I_3 = 3.0$ A $= I_1$, como debe ser.

b) Ya que $I_2 = 1.0$ A, la c.p. a través del resistor de 2.0 Ω en la figura 28-9*b* es (1.0 A)(2.0 Ω) = 2.0 V. Pero ésta también es la c.p. a través del resistor de 12 Ω en la figura 28-9*a*. Al aplicar $V = IR$ a los 12 Ω se obtiene

$$I_{12} = \frac{V_{12}}{R} = \frac{2.0 \text{ V}}{12\ \Omega} = 0.17 \text{ A}$$

28.14 [II] Un galvanómetro tiene una resistencia de 400 Ω y tiene una deflexión de escala completa para una corriente de 0.20 mA a través de él. ¿De qué magnitud debe ser la resistencia de derivación que se requiere para convertirlo en un amperímetro de 3.0 A?

En la figura 28-10 el galvanómetro se etiqueta como G y la resistencia de derivación como R_s. Las corrientes para una deflexión a escala completa son como se muestran.

La caída de voltaje desde a hasta b a través de G es la misma que a través de R_s. Por tanto,

$$(2.9998 \text{ A})R_s = (2.0 \times 10^{-4} \text{ A})(400\ \Omega)$$

con lo cual $R_s = 0.027$ Ω.

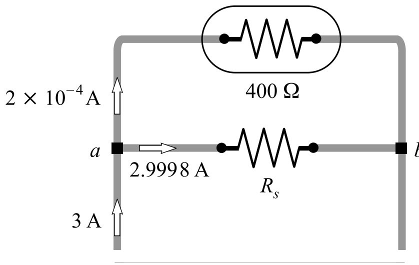


Figura 28-10

28.15 [II] Un voltímetro debe desviarse a escala completa para una diferencia de potencial de 5.000 V y se debe construir mediante la conexión en serie de un resistor R_x y un galvanómetro. El galvanómetro de 80.00 Ω se deflecta a escala completa para un potencial de 20.00 mV a través de él. Encuentre R_x.

Cuando el galvanómetro tiene la aguja deflectada a escala completa, la corriente a través de él es

$$I = \frac{V}{R} = \frac{20.00 \times 10^{-3} \text{ V}}{80.00\ \Omega} = 2.500 \times 10^{-4} \text{ A}$$

Cuando R_x se conecta en serie con el galvanómetro, se desea que I sea de 2.500×10^{-4} A para una diferencia de potencial de 5.000 V a través de la combinación. En consecuencia, $V = IR$ se convierte en

$$5.000 \text{ V} = (2.500 \times 10^{-4} \text{ A})(80.00\ \Omega + R_x)$$

por lo que $R_x = 19.92$ kΩ.

28.16 [III] Las corrientes en el circuito de la figura 28-11 son estacionarias. Determine I_1, I_2, I_3 y la carga en el capacitor.

Cuando un capacitor tiene una carga constante, como el que se considera aquí, la corriente que fluye a través de él es cero. Por tanto, $I_2 = 0$, y el circuito se comporta como si le faltara el alambre del centro.

Sin el alambre del centro el circuito se reduce a una simple conexión de 12 Ω a través de una batería de 15 V. Por tanto,

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{15\ \text{V}}{12\ \Omega} = 1.25\ \text{A}$$

Además, ya que $I_2 = 0$, se tiene que $I_3 = I_1 = 1.3$ A.

Para calcular la carga en el capacitor se tiene que calcular la diferencia de voltaje entre los puntos *a* y *b*. Se inicia en *a* y se va alrededor de la parte superior del circuito.

$$\text{Cambio de voltaje de } a \text{ a } b = -(5.0\ \Omega)I_3 + 6.0\ \text{V} + (3.0\ \Omega)I_2$$
$$= -(5.0\ \Omega)(1.25\ \text{A}) + 6.0\ \text{V} + (3.0\ \Omega)(0) = -0.25\ \text{V}$$

Por tanto, *b* es el menor potencial y la placa del capacitor en *b* es negativa. Para encontrar la carga en el capacitor, se escribe

$$Q = CV_{ab} = (2 \times 10^{-6}\ \text{F})(0.25\ \text{V}) = 0.5\ \mu C$$

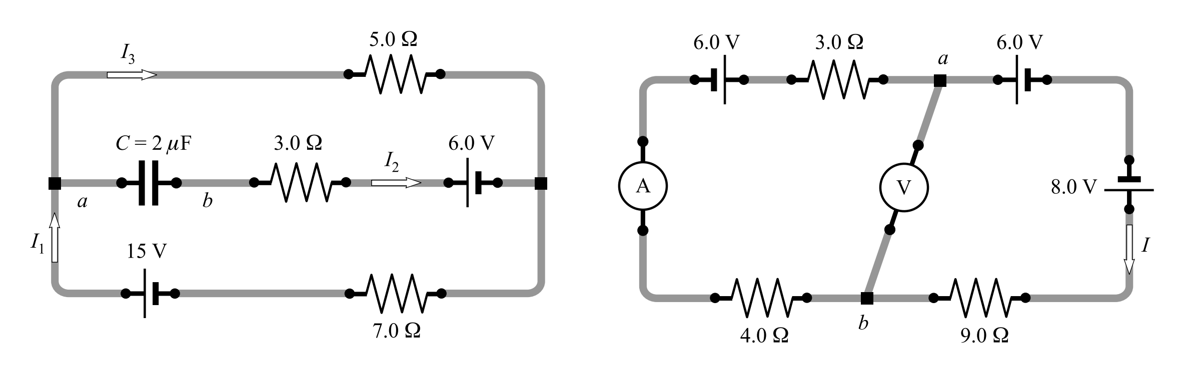


Figura 28-11 **Figura 28-12**

28.17 [II] Determine las lecturas del amperímetro y del voltímetro en el circuito de la figura 28-12. Suponga que ambos medidores son ideales.

Un voltímetro ideal tiene una resistencia infinita y por tanto su alambre se puede quitar sin alterar el circuito. El amperímetro ideal tiene resistencia cero. Es posible demostrar (vea el capítulo 29) que las baterías en serie simplemente se suman o restan. Las dos baterías de 6.0 V se cancelan mutuamente porque tienden a empujar la corriente en sentidos opuestos. Como resultado, el circuito se comporta como si tuviera una sola batería de 8.0 V que origina una corriente en el sentido de las manecillas del reloj.

La resistencia equivalente es de 3.0 Ω + 4.0 Ω + 9.0 Ω = 16.0 Ω, y la batería equivalente es de 8.0 V. Por tanto,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{8.0\ \text{V}}{16\ \Omega} = 0.50\ \text{A}$$

y esto será la lectura del amperímetro.

Sumar los cambios de voltaje de *a* a *b* alrededor del lado derecho del circuito da

$$\text{Cambio de voltaje de } a \text{ a } b = -6.0\ \text{V} + 8.0\ \text{V} - (0.50\ \text{A})(9.0\ \Omega) = -2.5\ \text{V}$$

En consecuencia, un voltímetro conectado de *a* a *b* marcará una lectura de 2.5 V, con *b* en el potencial más bajo.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

28.18 [I] Calcule la resistencia equivalente de 4.0 Ω y 8.0 Ω *a*) en serie y *b*) en paralelo. **Resp.** *a*) 12 Ω; *b*) 2.7 Ω.

28.19 [I] Calcule la resistencia equivalente de *a*) 3.0 Ω, 6.0 Ω y 9.0 Ω en paralelo; *b*) 3.0 Ω, 4.0 Ω, 7.0 Ω, 10.0 Ω y 12.0 Ω en paralelo; *c*) tres elementos calefactores de 33 Ω en paralelo; *d*) veinte lámparas de 100 Ω en paralelo. **Resp.** *a*) 1.6 Ω; *b*) 1.1 Ω; *c*) 11 Ω; *d*) 5.0 Ω.

28.20 [I] ¿Qué resistencia se debe conectar en paralelo con una de 20 Ω para hacer una resistencia combinada de 15 Ω? **Resp.** 60 Ω.

28.21 [II] ¿Cuántos resistores de 160 Ω (en paralelo) se requieren para establecer un total de 5.0 A en una línea de 100 V? **Resp.** 8.

28.22 [II] Tres resistores, de 8.0 Ω, 12 Ω y 24 Ω, están en paralelo y la combinación drena una corriente de 20 A. Determine *a*) la diferencia de potencial de la combinación y *b*) la corriente en cada resistor.
Resp. *a*) 80 V; *b*) 10 A, 6.7 A, 3.3 A.

28.23 [II] Al utilizar uno o más de tres resistores (3.0 Ω, 5.0 Ω, 6.0 Ω), se puede obtener un total de 18 resistencias equivalentes. ¿Cuáles son éstas? **Resp.** 0.70 Ω, 1.4 Ω, 1.9 Ω, 2.0 Ω, 2.4 Ω, 2.7 Ω, 3.0 Ω, 3.2 Ω, 3.4 Ω, 5.0 Ω, 5.7 Ω, 6.0 Ω, 7.0 Ω, 7.9 Ω, 8.0 Ω, 9.0 Ω, 11 Ω, 14 Ω.

28.24 [II] Dos resistores, de 4.00 Ω y 12.0 Ω, se conectan en paralelo a través de una batería de 22 V que tiene resistencia interna de 1.00 Ω. Calcule: *a*) la corriente en la batería, *b*) la corriente en el resistor de 4.00 Ω, *c*) el voltaje en las terminales de la batería, *d*) la corriente en el resistor de 12.0 Ω. **Resp.** *a*) 5.5 A; *b*) 4.1 A; *c*) 17 V; *d*) 1.4 A.

28.25 [II] Tres resistores, de 40 Ω, 60 Ω y 120 Ω, se conectan en paralelo, y este grupo paralelo se conecta en serie con 15 Ω, que a su vez están en serie con 25 Ω. Luego el sistema completo se conecta a una fuente de 120 V. Determine: *a*) la corriente en la de 25 Ω, *b*) la caída de potencial a través del grupo paralelo, *c*) la caída de potencial a través de la de 25 Ω, *d*) la corriente en la de 60 Ω, *e*) la corriente en la de 40 Ω. **Resp.** *a*) 2.0 A; *b*) 40 V; *c*) 50 V; *d*) 0.67 A; *e*) 1.0 A.

28.26 [II] ¿Qué resistencia de derivación se debe conectar en paralelo con un amperímetro que tiene una resistencia de 0.040 Ω para que 25 por ciento de la corriente total pase a través del amperímetro? **Resp.** 0.013 Ω.

28.27 [II] Un galvanómetro de 36 Ω tiene una resistencia de derivación de 4.0 Ω. ¿Qué parte de la corriente total pasará a través del instrumento? **Resp.** 1/10.

28.28 [II] Un relevador que tiene una resistencia de 6.0 Ω opera con una corriente mínima de 0.030 A. Se desea que el relevador opere cuando la corriente en la línea alcance 0.240 A. ¿Qué resistencia de derivación deberá utilizarse con el relevador? **Resp.** 0.86 Ω.

28.29 [II] Demuestre que, si dos resistores están conectados en paralelo, su rapidez de generación de calor varía inversamente a sus resistencias.

28.30 [II] Para el circuito que se muestra en la figura 28-13, encuentre la corriente y la caída de potencial en cada una de las resistencias. **Resp.** Para la de 20 Ω, 3.0 A y 60 V; para la de 75 Ω, 2.4 A y 180 V; para la de 300 Ω, 0.6 A y 180 V.

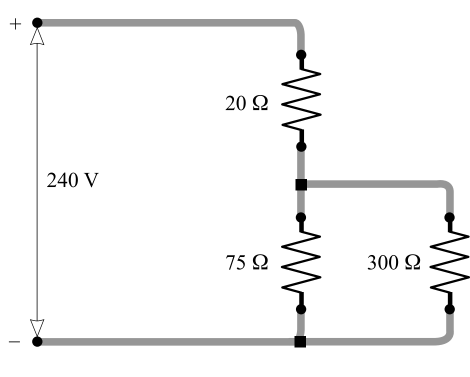


Figura 28-13

28.31 [II] Para el circuito que se muestra en la figura 28-14, encuentre *a*) su resistencia equivalente, *b*) la corriente entregada por la fuente de poder; *c*) las diferencias de potencial a

través de *ab*, *cd* y *de*, *d*) la corriente en cada resistencia. **Resp.** *a*) 15 Ω; *b*) 20 A; *c*) V_{ab} = 80 V, V_{cd} = 120 V, V_{de} = 100 V; *d*) I_4 = 20 A, I_{10} = 12 A, I_{15} = 8 A, I_9 = 11.1 A, I_{18} = 5.6 A, I_{30} = 3.3 A.

28.32 [II] Se sabe que la diferencia de potencial a través de la resistencia de 6.0 Ω en la figura 28-15 es de 48 V. Determine *a*) la corriente *I* que entra, *b*) la diferencia de potencial en la resistencia de 8.0 Ω, *c*) la diferencia de potencial a través de la resistencia de 10 Ω, *d*) la diferencia de potencial de *a* a *b*. (*Sugerencia*: El alambre que conecta *c* y *d* puede acortarse hasta una longitud cero sin alterar las corrientes o los potenciales.)
Resp. *a*) 12 A; *b*) 96 V; *c*) 60 V; *d*) 204 V.

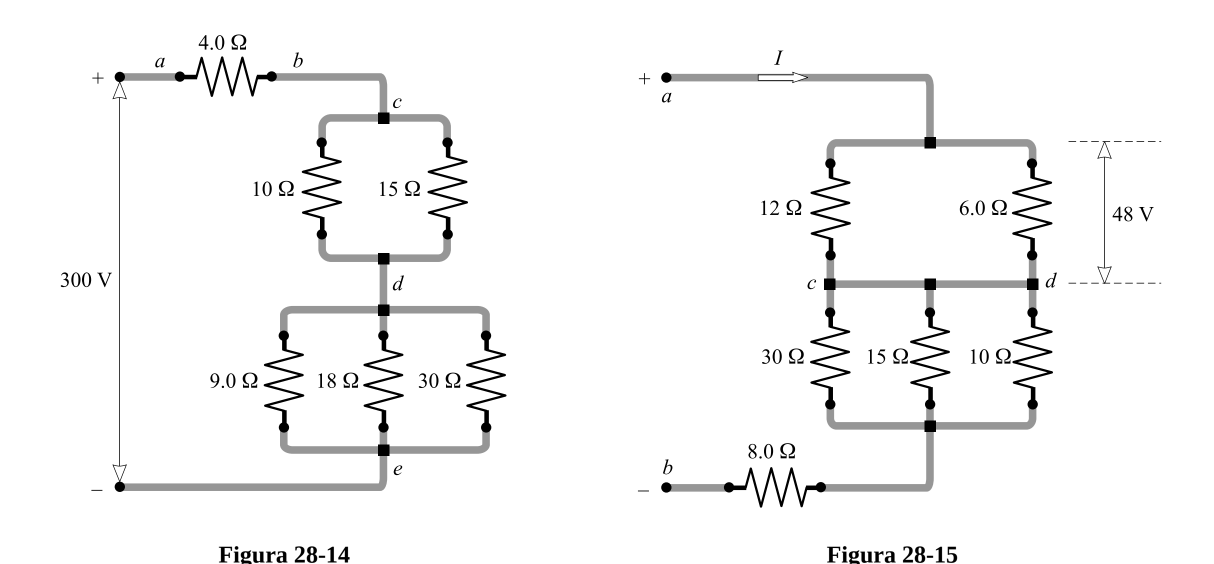


Figura 28-14 **Figura 28-15**

28.33 [II] En el circuito que se muestra en la figura 28-16, la resistencia de 4.0 Ω produce 23.9 cal de energía térmica cada segundo. Si supone que el amperímetro y los dos voltímetros son ideales, ¿cuáles serán sus lecturas?
Resp. 5.8 A, 8.0.V, 58 V.

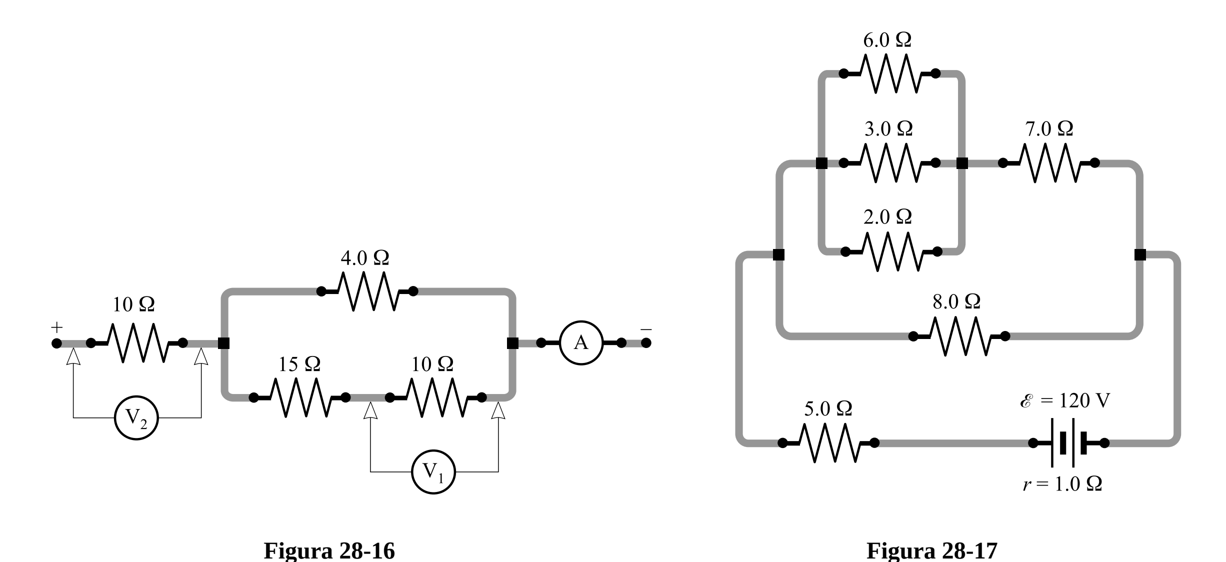


Figura 28-16 **Figura 28-17**

28.34 [II] Para el circuito que se muestra en la figura 28-17, encuentre *a*) la resistencia equivalente, *b*) las corrientes a través de los resistores de 5.0 Ω, 7.0 Ω y 3.0 Ω, *c*) la potencia total de la batería transmitida al circuito.
Resp. *a*) 10 Ω; *b*) 12 A, 6.0 A, 2.0 A; *c*) 1.3 kW.

28.35 [II] En el circuito que se muestra en la figura 28-18, el amperímetro ideal registra 2.0 A. *a*) Si supone que *XY* es una resistencia, encuentre su valor. *b*) Si supone que *XY* es una batería (con resistencia interna de 2.0 Ω) que se está cargando, determine su fem. *c*) Bajo las condiciones del inciso *b*), ¿cuál es el cambio de potencial desde el punto *Y* hasta el punto *X*? **Resp.** *a*) 5.0 Ω; *b*) 6.0 V; *c*) −10 V.

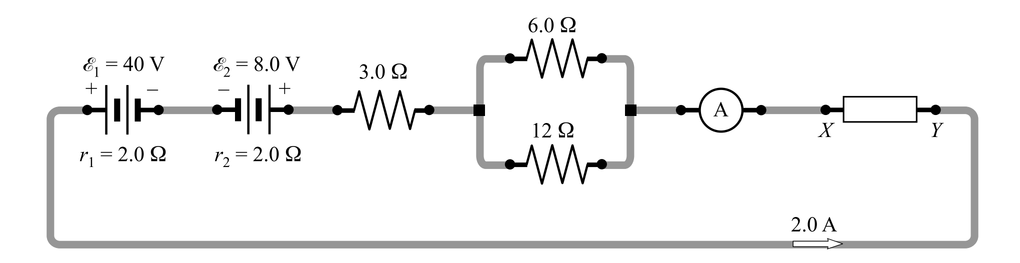


Figura 28-18

28.36 [II] El *puente de Wheatstone* que se muestra en la figura 28-19 se utiliza para medir la resistencia *X*. En el equilibrio, la corriente a través del galvanómetro G es cero, y las resistencias *L*, *M* y *N* son 3.0 Ω, 2.0 Ω y 10 Ω, respectivamente. Encuentre el valor de *X*. **Resp.** 15 Ω.

28.37 [II] El puente de Wheatstone de conductor corredizo que se muestra en la figura 28-20 está en equilibrio (vuelva a leer el problema 28.36) cuando el conductor corredizo uniforme *AB* se divide como se muestra. Encuentre el valor de la resistencia *X*. **Resp.** 2 Ω.

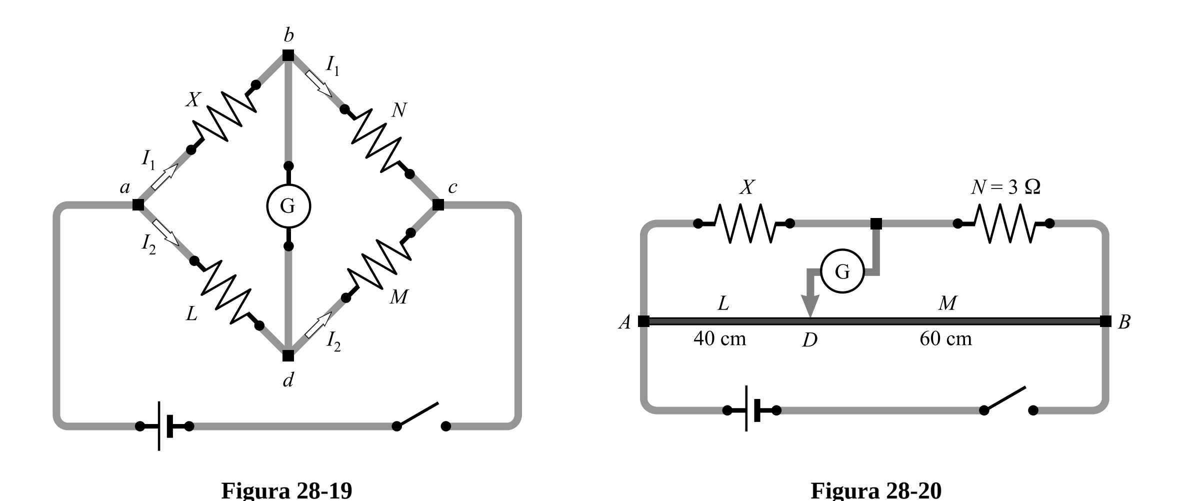


Figura 28-19 **Figura 28-20**

LEYES DE KIRCHHOFF 29

REGLA DE NODOS (O NUDOS) DE KIRCHHOFF: La suma de todas las corrientes que llegan a un ***nodo*** (es decir, una unión donde se juntan tres o más conductores o ***derivaciones*** que llevan corriente) debe ser igual a la suma de todas las corrientes que salen de dicho nodo. Si se establece que la entrada de corriente es positiva y la salida de corriente es negativa, entonces *la suma de las corrientes es igual a cero* es un enunciado alternativo común de la regla.

REGLA DE MALLAS (O CIRCUITO CERRADO) DE KIRCHHOFF: Cuando uno recorre un circuito cerrado (o ***bucle***), la suma algebraica de los cambios de potencial encontrados es cero. En esta suma, una subida de potencial (es decir, el voltaje) se toma como positiva y una caída de potencial como negativa.

La corriente siempre fluye del potencial alto al potencial bajo en un resistor. Conforme uno sigue el camino de la corriente a través de un resistor, el cambio de potencial es negativo porque es una caída de potencial. Una vez que o se conoce o se supone la dirección de la corriente, los resistores se etiquetan con un signo $+$ en el lado donde entra la corriente y con un signo $-$ en el lado donde sale la corriente.

La terminal positiva de una fuente fem pura siempre es la terminal de potencial más alto, independientemente de la dirección de la corriente que pasa a través de la fuente de fem. Etiquete todas las fuentes de voltaje con un signo $+$ en el lado alto y un signo $-$ en el lado bajo. Cuando se trata con el símbolo para una batería, la línea más larga es el lado alto.

EL CONJUNTO DE ECUACIONES OBTENIDAS al usar la regla de la malla de Kirchhoff serán independientes siempre y cuando cada nueva ecuación de malla contenga al menos un cambio de voltaje no incluido en una ecuación anterior.

PROBLEMAS RESUELTOS

29.1 [II] Encuentre las corrientes en el circuito que se muestra en la figura 29-1.

Note que en el diagrama del circuito se proporcionan los signos de las caídas de voltaje. No se necesitarán en esta solución, pero es un buen hábito ponerlos como primer paso.

Este circuito no se puede reducir más porque no contiene combinaciones simples de resistores en serie o en paralelo. Por tanto se invierten las reglas de Kirchhoff. Si todavía no se etiquetan y muestran las corrientes con flechas, se debe hacer esto primero. En general, es necesario poner cuidado especial al asignar la dirección de la corriente, pues las que se elijan de manera incorrecta simplemente darán valores numéricos negativos. En este problema hay tres derivaciones que conectan a los nodos *a* y *b* y por tanto tres corrientes.

Se aplica la regla de los nodos al nodo *b* en la figura 29-1:

$$\text{Corriente que entra en } b = \text{corriente que sale de } b$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \qquad (1)$$

Ahora se aplica la regla de las mallas a la malla *adba*. En volts,

$$-7.0\,I_1 + 6.0 + 4.0 = 0 \qquad \text{o} \qquad I_1 = \frac{10.0}{7.0}\,\text{A}$$

(¿Por qué el término $7.0I_1$ tiene signo negativo?) A continuación se aplica la regla de las mallas a la malla *abca*. En volts,

$$-4.0 - 8.0 + 5.0\,I_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad I_2 = \frac{12.0}{5.0}\,\text{A}$$

(¿Por qué los signos deben ser como se escribieron?)

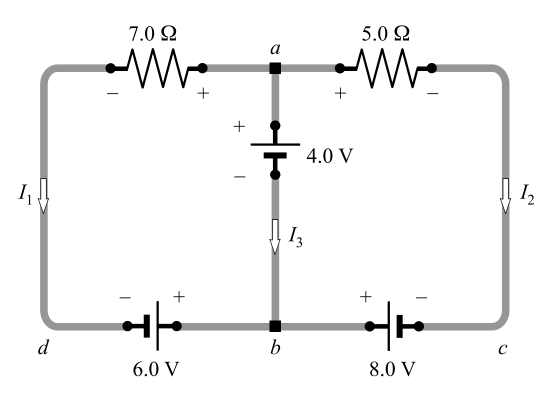


Figura 29-1

Figura 29-2

Ahora regrese a la ecuación (1) para encontrar

$$I_3 = -I_1 - I_2 = -\frac{10.0}{7.0} - \frac{12.0}{5.0} = \frac{-50 - 84}{35} = -3.8\ \text{A}$$

El signo negativo quiere decir que I_3 tiene su sentido opuesto al que se muestra en la figura.

29.2 [II] Para el circuito que se muestra en la figura 29-2, encuentre I_1, I_2 e I_3 si el interruptor S está *a*) abierto y *b*) cerrado.

a) Cuando S está abierto, $I_3 = 0$, pues no puede fluir corriente a través de la derivación de en medio. Al aplicar la regla de los nodos al punto *a* se obtiene

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad \text{o} \quad I_2 = I_1 + 0 = I_1$$

Al aplicar la regla de las mallas a la malla *acbda* se obtiene

$$-12.0 + 7.0I_1 + 8.0I_2 + 9.0 = 0 \tag{1}$$

Para comprender el uso de los signos recuerde que, a través de un resistor, la corriente siempre fluye del potencial alto al bajo.

Como $I_2 = I_1$, la ecuación (1) se convierte en

$$15.0I_1 = 3.0 \quad \text{o} \quad I_1 = 0.20\ \text{A}$$

Además, $I_2 = I_1 = 0.20$ A. Note que este es el mismo resultado que el que se obtendría al reemplazar las dos baterías por una sola batería de 3.0 V.

b) Con S cerrado, I_3 ya no es necesariamente cero. Al aplicar la regla de los nodos al punto *a* se obtiene

$$I_1 + I_3 = I_2 \tag{2}$$

Al aplicar la regla de las mallas a la malla *acba* se obtiene

$$-12.0 + 7.0I_1 - 4.0I_3 = 0 \tag{3}$$

y a la malla *adba* produce

$$-9.0 - 8.0I_2 - 4.0I_3 = 0 \tag{4}$$

Aplicar la regla de la malla a la malla restante, *acbda*, produciría una ecuación redundante, pues no contendría un nuevo cambio de voltaje.

Ahora se deben resolver las ecuaciones (2), (3) y (4) para I_1, I_2 e I_3. De la ecuación (4),

$$I_3 = -2.0I_2 - 2.25$$

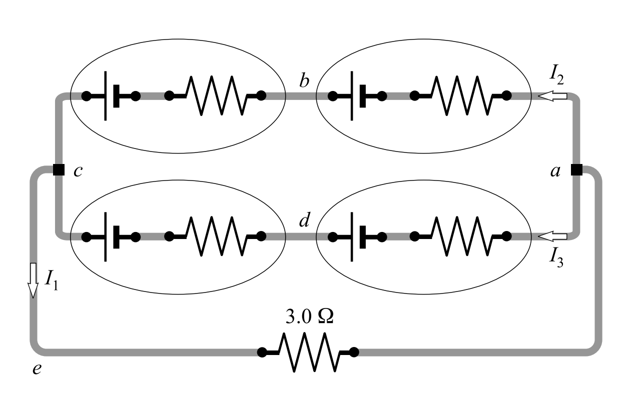


Figura 29-3

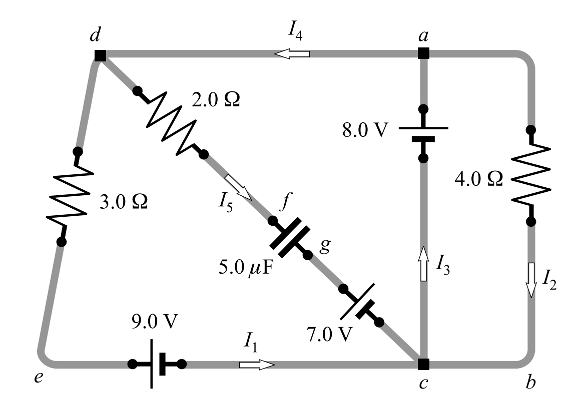


Figura 29-4

Sustituir esto en la ecuación (3) produce

$$-12.0 + 7.0I_1 + 9.0 + 8.0I_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad 7.0I_1 + 8.0I_2 = 3.0$$

Al sustituir por I_3 en la ecuación (2) también se obtiene

$$I_1 - 2.0I_2 - 2.25 = I_2 \qquad \text{o} \qquad I_1 = 3.0I_2 + 2.25$$

Sustituir este valor en la ecuación previa finalmente produce

$$21.0I_2 + 15.75 + 8.0I_2 = 3.0 \qquad \text{o} \qquad I_2 = -0.44 \text{ A}$$

Al usar este resultado en la ecuación para I_1 se obtiene

$$I_1 = 3.0(-0.44) + 2.25 = -1.32 + 2.25 = 0.93 \text{ A}$$

Note que el signo menos es parte del valor calculado para I_2, el cual se debe llevar con su valor numérico. Ahora se puede emplear (2) para encontrar

$$I_3 = I_2 - I_1 = (-0.44) - 0.93 = -1.37 \text{ A}$$

29.3 [II] Cada una de las celdas que se muestran en la figura 29-3 tiene una fem de 1.50 V y una resistencia interna de 0.0750 Ý. Encuentre I_1, I_2 e I_3.

Al aplicar la regla de los nodos al nodo *a* se obtiene

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$

Aplicar la regla de las mallas a la malla *abcea* produce, en volts,

$$-(0.0750)I_2 + 1.50 - (0.0750)I_2 + 1.50 - 3.00I_1 = 0$$

o

$$3.00I_1 + 0.150I_2 = 3.00 \qquad (2)$$

Además, para la malla *adcea*,

$$-(0.0750)I_3 + 1.50 - (0.0750)I_3 + 1.50 - 3.00I_1 = 0$$

o

$$3.00I_1 + 0.150I_3 = 3.00 \qquad (3)$$

Se resuelve la ecuación (2) para 3.00 I_1 y se sustituye en la ecuación (3) para obtener

$$3.00 - 0.150I_3 + 0.150I_2 = 3.00 \qquad \text{o} \qquad I_2 = I_3$$

como se pudo haber supuesto por la simetría del problema. Entonces la ecuación (1) produce

$$I_1 = 2I_2$$

y al sustituir esto en la ecuación (2) se obtiene

$$6.00I_2 + 0.150I_2 = 3.00 \qquad \text{o} \qquad I_2 = 0.488 \text{ A}$$

Entonces, $I_3 = I_2 = 0.488$ A e $I_1 = 2I_2 = 0.976$ A.

29.4 [III] En el circuito de la figura 29-4 las corrientes son estacionarias. Encuentre I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 y la carga en el capacitor.

Cuando el capacitor está cargado no fluye corriente a través de él, y por tanto $I_5 = 0$. Considere la malla *acba*. La regla de las mallas conduce a

$$-8.0 + 4.0I_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad I_2 = 2.0\text{ A}$$

Usar la malla *adeca* produce

$$-3.0I_1 - 9.0 + 8.0 = 0 \qquad \text{o} \qquad I_1 = -0.33\text{ A}$$

Aplicar la regla de los nodos al nodo *c* resulta en

$$I_1 + I_5 + I_2 = I_3 \qquad \text{o} \qquad I_3 = 1.67\text{ A} = 1.7\text{ A}$$

y en el nodo *a* produce

$$I_3 = I_4 + I_2 \qquad \text{o} \qquad I_4 = -0.33\text{ A}$$

(Se debió suponer desde un principio, ya que $I_5 = 0$ y por lo mismo $I_4 = I_1$.)

Para calcular la carga en el capacitor se necesita el voltaje V_{fg} a través de él. Ponga todos los signos sobre los resistores, las baterías y el capacitor. Al aplicar la regla de las mallas a la malla *dfgced* se obtiene

$$-2.0I_5 + V_{fg} - 7.0 + 9.0 + 3.0I_1 = 0 \qquad \text{o} \qquad 0 + V_{fg} - 7.0 + 9.0 - 1.0 = 0$$

de donde $V_{fg} = -1.0$ V. El signo menos indica que la placa *g* es negativa. La carga del capacitor es

$$Q = CV = (5.0\ \mu\text{F})(1.0\text{ V}) = 5.0\ \mu\text{C}$$

29.5 [III] Para el circuito que se muestra en la figura 29-5, la resistencia *R* tiene un valor de 5.0 Ý y $\mathscr{E} = 20$ V. Encuentre las lecturas en el amperímetro y el voltímetro. Suponga que los medidores son ideales.

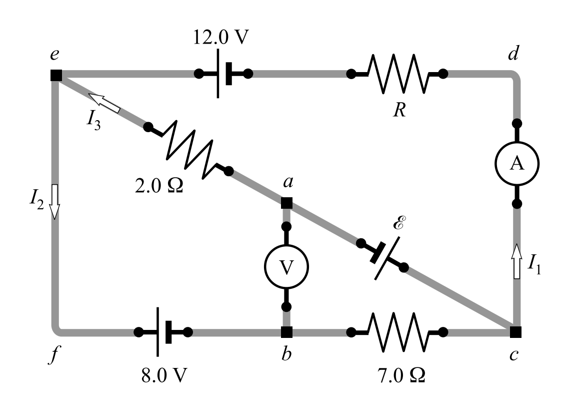


Figura 29-5

El voltímetro ideal tiene resistencia infinita (no pasa corriente por él) y por lo mismo se puede retirar del circuito sin causar efectos. Escriba la ecuación de malla para la malla *cdefc*:

$$-RI_1 + 12.0 - 8.0 - 7.0I_2 = 0$$

que se convierte en

$$5.0I_1 + 7.0I_2 = 4.0 \tag{1}$$

Ahora se escribe la ecuación de la malla para la malla *cdeac*. Ésta es

$$-5.0I_1 + 12.0 + 2.0I_3 + 20.0 = 0$$
$$5.0I_1 - 2.0I_3 = 32.0 \tag{2}$$

Pero la regla de los nodos aplicada a *e* da

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad (3)$$

Sustituir la ecuación (3) en la ecuación (1) produce

$$5.0I_1 + 7.0I_1 + 7.0I_3 = 4.0$$

Se resuelve esta ecuación para I_3 y se sustituye en la ecuación (2) para obtener

$$5.0\,I_1 - 2.0\left(\frac{4.0 - 12.0\,I_1}{7.0}\right) = 32.0$$

que da $I_1 = 3.9$ A, que es la lectura del amperímetro. Entonces la ecuación (1) produce $I_2 = -2.2$ A.

Para calcular la lectura del voltímetro V_{ab}, se escribe la ecuación de la malla para la malla *abca*:

$$V_{ab} - 7.0I_2 - \mathscr{E} = 0$$

Al sustituir los valores conocidos de I_2 y $\mathscr{E}$, y resolver, se obtiene $V_{ab} = 4.3$ V. Como ésta es la diferencia de potencial entre *a* y *b*, el punto *b* debe estar al potencial más alto.

29.6 [III] En el circuito de la figura 29-5, $I_1 = 0.20$ A y $R = 5.0\ \Omega$. Encuentre $\mathscr{E}$.

Se escribe la ecuación de las mallas para la malla *cdefc*:

$$-RI_1 + 12.0 - 8.0 - 7.0I_2 = 0 \quad \text{o} \quad -(5.0)(0.20) + 12.0 - 8.0 - 7.0I_2 = 0$$

de donde $I_2 = 0.43$ A. Ahora se puede hallar I_3 aplicando la regla de los nodos en *e*:

$$I_1 + I_3 = I_2 \quad \text{o} \quad I_3 = I_2 - I_1 = 0.23\text{ A}$$

Ahora se aplica la regla de la malla a la malla *cdeac*:

$$-(5.0)(0.20) + 12.0 + (2.0)(0.23) + \mathscr{E} = 0$$

de donde $\mathscr{E} = -11.5$ V. El signo menos indica que la polaridad de la batería de hecho es el inverso de la que se muestra.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

29.7 [II] Para el circuito que se muestra en la figura 29-6, encuentre la corriente en el resistor de 0.96 Ω y los voltajes en las terminales de las baterías. **Resp.** 5.0 A, 4.8 V, 4.8 V.

29.8 [III] Para la red que se muestra en la figura 29-7, determine *a*) las tres corrientes I_1, I_2 e I_3, y *b*) el voltaje en las terminales de las tres baterías. **Resp.** *a*) $I_1 = 2$ A, $I_2 = 1$ A, $I_3 = -3$ A; *b*) $V_{16} = 14$ V, $V_4 = 3.8$ V, $V_{10} = 8.5$ V.

29.9 [II] Si la lectura del voltímetro en la figura 29-5 es de 16.0 V (con el nodo *b* al potencial más alto) e $I_2 = 0.20$ A, encuentre $\mathscr{E}$, *R* y la lectura del amperímetro. **Resp.** 14.6 V, 0.21 Ω, 12 A.

29.10 [III] Encuentre I_1, I_2, I_3 y la diferencia de potencial entre los puntos *b* y *e* en la figura 29-8. **Resp.** 2.0 A, −8.0 A, 6.0 A, −13.0 V.

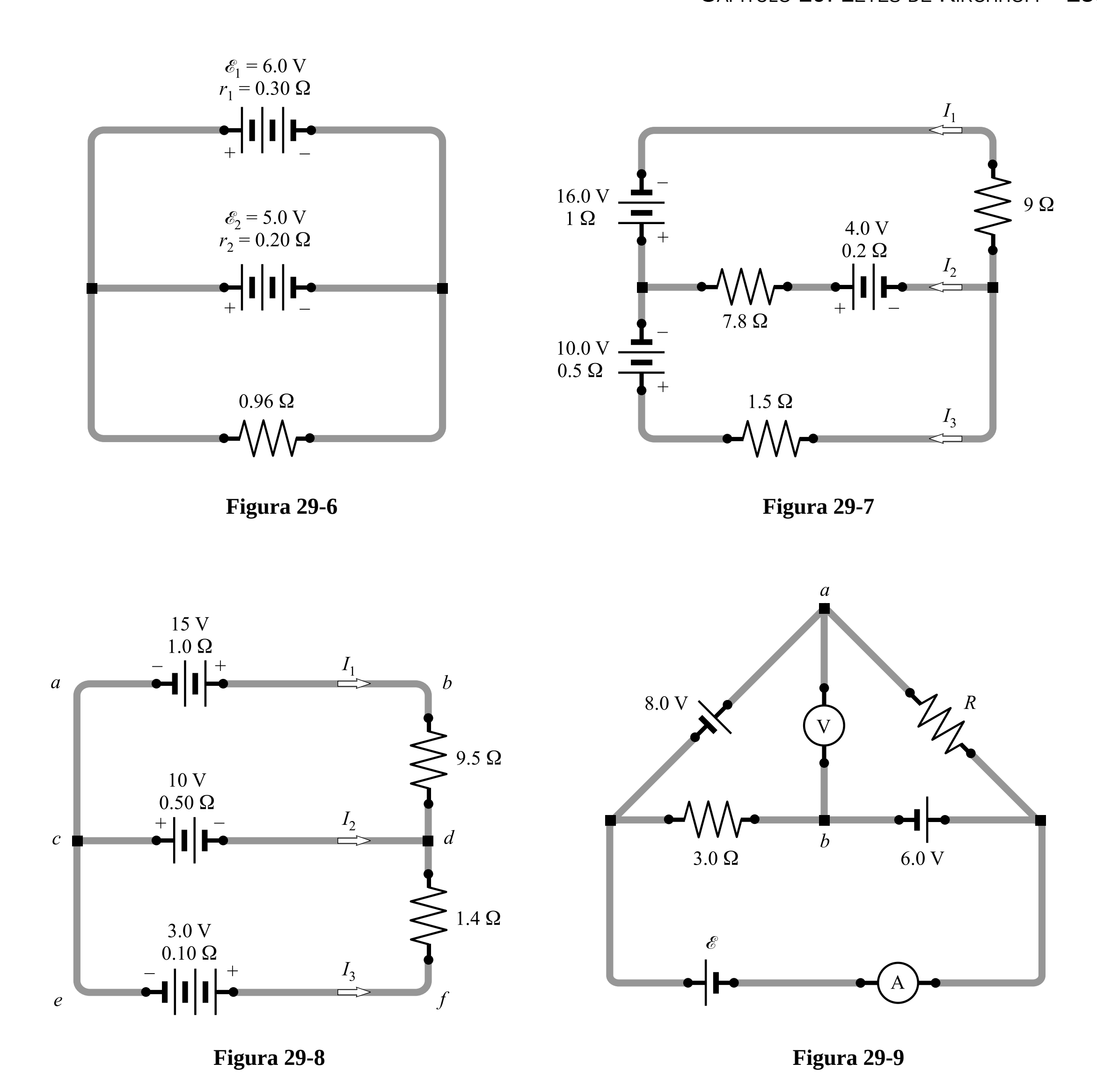


Figura 29-6

Figura 29-7

Figura 29-8

Figura 29-9

29.11 [II] En la figura 29-9, $R = 10.0\ \Omega$ y $\mathscr{E} = 13$ V. Encuentre las lecturas en el amperímetro y el voltímetro ideales. **Resp.** 8.4 A, 27 V con el punto *a* como positivo.

29.12 [II] En la figura 29-9, la lectura del voltímetro es de 14 V (con el punto *a* en el potencial más alto) y la lectura del amperímetro es de 4.5 A. Encuentre $\mathscr{E}$ y *R*. **Resp.** $\mathscr{E} = 0$, $R = 3.2\ \Omega$.

FUERZAS EN CAMPOS MAGNÉTICOS 30

UN CAMPO MAGNÉTICO ($\vec{\mathbf{B}}$) existe en una región vacía del espacio si una carga que se mueve en dicha región experimenta una fuerza debida a su movimiento (como se muestra en la figura 30-1). Es frecuente detectar la presencia de un campo magnético por el efecto que produce sobre la aguja de una brújula (que es un pequeño *imán de barra*). La aguja de la brújula se alinea en la dirección del campo magnético.

LAS LÍNEAS DE CAMPO MAGNÉTICO trazadas en una región del espacio corresponden a la dirección hacia donde apunta una brújula colocada en esa región. En la figura 30-2 se muestra un método para determinar las líneas de campo cercanas a un imán de barra. Tradicionalmente se toma la dirección de la aguja de la brújula como la dirección del campo.

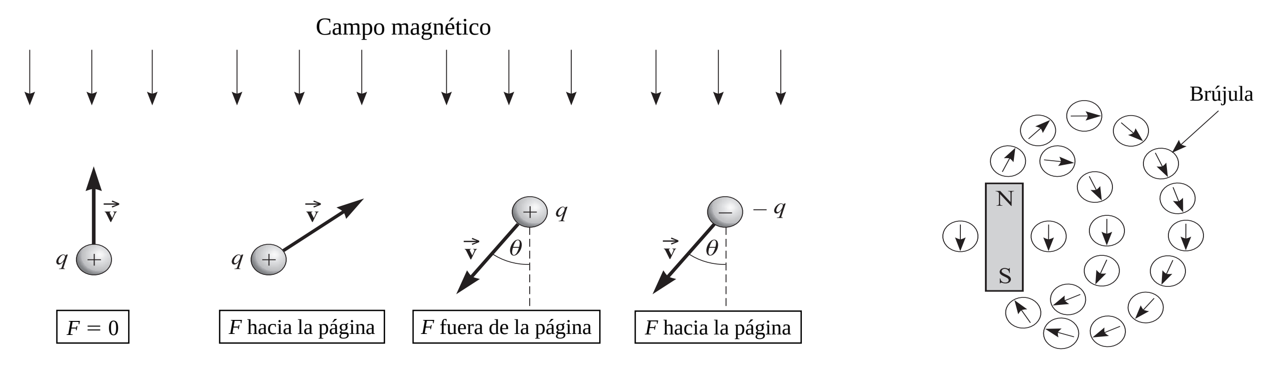


Figura 30-1 **Figura 30-2**

UN IMÁN puede constar de dos o más polos, aunque debe tener al menos un *polo norte* y un *polo sur.* Ya que la brújula siempre apunta alejándose del polo norte (N en la figura 30-2) y hacia el polo sur (S), ***las líneas de campo magnético salen del polo norte y entran al polo sur***.

LOS POLOS MAGNÉTICOS del mismo tipo (norte o sur) se repelen uno al otro, mientras que polos distintos se atraen entre sí.

UNA CARGA QUE SE MUEVE A TRAVÉS DE UN CAMPO MAGNÉTICO experimenta una fuerza debida al campo, siempre que su vector velocidad no esté a lo largo de una línea de campo magnético. En la figura 30-1, la carga (q) se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ en un campo magnético dirigido como se muestra. La dirección de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}$ sobre cada carga es la que se indica. Note que ***la dirección de la fuerza sobre la carga negativa es opuesta a la que actúa sobre la carga positiva*** con la misma velocidad.

LA DIRECCIÓN DE LA FUERZA que actúa sobre una carga $+q$ en movimiento en un campo magnético puede determinarse por la **regla de la mano derecha** (figura 30-3):

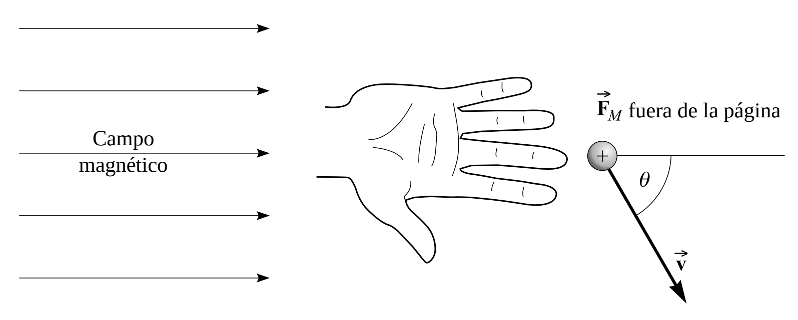


Figura 30-3

> Mantenga la mano extendida. Apunte los dedos en la dirección del campo. Oriente el dedo pulgar a lo largo de la dirección de la velocidad de la carga positiva. Entonces, la palma de la mano empuja en la dirección de la fuerza que actúa sobre la carga. La dirección de la fuerza que actúa sobre una carga negativa es opuesta a la que actúa sobre una carga positiva.

Con frecuencia es útil señalar que las líneas del campo magnético a través de la partícula y el vector velocidad de la partícula forman un plano (el plano de la página en la figura 30-3). El vector fuerza siempre es perpendicular a este plano. Una regla alternativa se basa en el producto cruz vectorial: ponga los dedos de la mano derecha en la dirección de $\vec{\mathbf{x}}$, gire su mano hasta que los dedos puedan cerrarse naturalmente hacia $\vec{\mathbf{B}}$ a través del ángulo más pequeño y entonces su dedo pulgar apunta en la dirección de $\vec{\mathbf{F}}_M$ (vea la figura 30-4). Se dice que $\vec{\mathbf{F}}_M$ está en la dirección de $\vec{\mathbf{v}}$ cruz $\vec{\mathbf{B}}$.

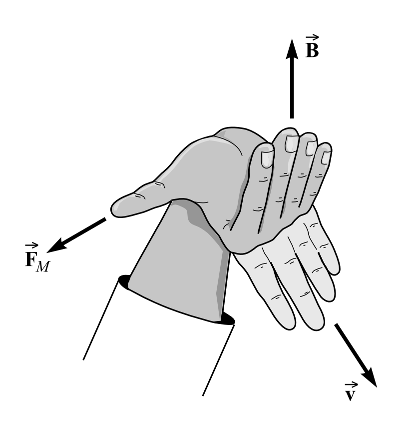


Figura 30-4

LA MAGNITUD DE LA FUERZA (F_M) sobre una carga que se mueve en un campo magnético depende del producto de cuatro factores:

1) q, la magnitud de la carga (en C)
2) v, la magnitud de la velocidad de la carga (en m/s)
3) B, la intensidad del campo magnético
4) sen θ, donde θ es el ángulo entre las líneas de campo y la velocidad $\vec{\mathbf{v}}$.

EL CAMPO MAGNÉTICO EN UN PUNTO se representa mediante un vector $\vec{\mathbf{B}}$, que alguna vez se llamó *inducción magnética* o *densidad de flujo magnético*, y que ahora simplemente se conoce como el **campo magnético**.

La magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$ y sus unidades se definen mediante la ecuación

$$F_M = qvB \operatorname{sen} \theta$$

donde F_M está en newtons, q en coulombs, v en m/s y B es el campo magnético en una unidad llamada *tesla* (T). Por razones históricas que se verán más tarde, un tesla también se puede expresar como **weber por metro cuadrado**: 1 T = 1 Wb/m² (vea el capítulo 32). Incluso también se encuentra la unidad cgs para B, el **gauss** (G), donde

$$1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$$

El campo magnético de la Tierra es unas cuantas décimas de 1 gauss. Note también que

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2 = 1 \frac{\text{N}}{\text{C}\cdot(\text{m/s})} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A}\cdot\text{m}}$$

FUERZA SOBRE UNA CORRIENTE EN UN CAMPO MAGNÉTICO: Dado que una corriente es simplemente un flujo de cargas positivas, una corriente experimenta una fuerza debida a un campo magnético. La dirección de la fuerza se encuentra por medio de la regla de la mano derecha mostrada en la figura 30-3, usando la dirección de la corriente en lugar del vector velocidad.

La magnitud ΔF_M de la fuerza que actúa sobre una pequeña longitud ΔL de alambre que lleva una corriente I está dada por

$$\Delta F_M = I(\Delta L)B \operatorname{sen} \theta$$

donde θ es el ángulo entre la dirección de la corriente I y la dirección del campo. Para un alambre recto de longitud L en un campo magnético uniforme, ésta se convierte en

$$F_M = ILB \operatorname{sen} \theta$$

Note que la fuerza es cero si el alambre es paralelo a las líneas de campo. La fuerza es máxima si las líneas de campo son perpendiculares al alambre. En analogía con el caso de una carga en movimiento, la fuerza es perpendicular al plano formado por el alambre y las líneas de campo.

TORCA SOBRE UNA BOBINA PLANA en un campo magnético uniforme: La torca τ que actúa sobre una bobina plana de N espiras, que lleva una corriente I, en un campo magnético externo B es

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta$$

donde A es el área de la bobina y θ es el ángulo entre las líneas de campo y una perpendicular al plano de la bobina. Para la dirección de rotación de la bobina, se tiene la siguiente regla de la mano derecha:

> Oriente el pulgar derecho perpendicular al plano de la bobina, de tal manera que los dedos vayan en la dirección del flujo de la corriente. Entonces, la torca actúa para hacer girar el pulgar y alinearlo con el campo magnético externo (en cuya orientación la torca es cero).

PROBLEMAS RESUELTOS

30.1 [I] En la dirección $+x$ existe un campo magnético uniforme $B = 3.0$ G. Un protón ($q = +e$) se dispara a través del campo en dirección $+y$ con una rapidez de 5.0×10^6 m/s. *a*) Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza sobre el protón. *b*) Repita reemplazando el protón por un electrón.

a) La situación se muestra en la figura 30-5. Se tiene, después de cambiar 3.0 G a 3.0×10^{-4} T,

$$F_M = qvB \text{ sen } \theta = (1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(5.0 \times 10^6\text{ m/s})(3.0 \times 10^{-4}\text{ T}) \text{ sen } 90° = 2.4 \times 10^{-16}\text{ N}$$

La fuerza es perpendicular al plano xy, que es el plano definido por las líneas de campo y $\vec{\mathbf{v}}$. La regla de la mano derecha indica que la fuerza está en la dirección $-z$.

b) La magnitud de la fuerza es la misma que en el inciso *a*), 2.4×10^{-16} N. Pero, como el electrón es negativo, la dirección de la fuerza se invierte. La fuerza está en la dirección $+z$.

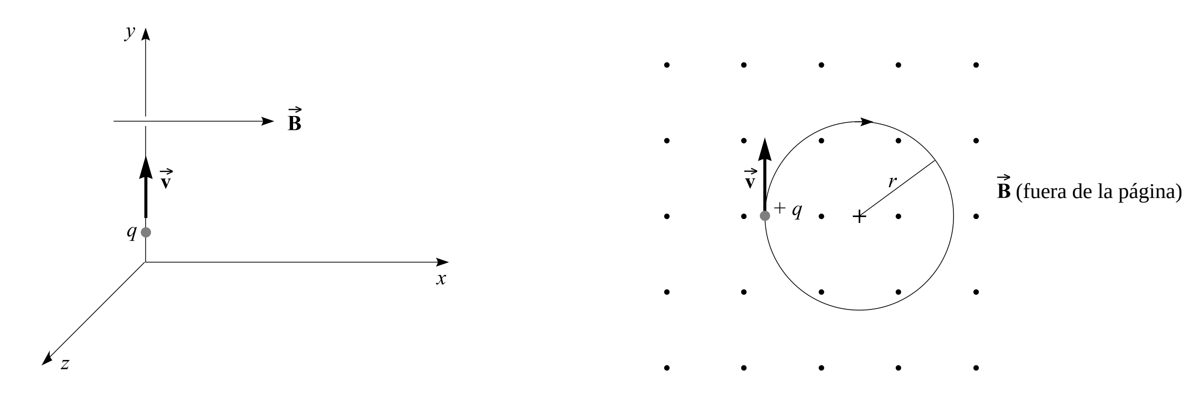


Figura 30-5 **Figura 30-6**

30.2 [II] La carga que se muestra en la figura 30-6 es un protón ($q = +e$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) con rapidez de 5.0×10^6 m/s. Se hace pasar por un campo magnético uniforme dirigido hacia afuera de la página; B es de 30 G. Describa la trayectoria que sigue el protón.

En virtud de que la velocidad del protón es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$, la fuerza que actúa sobre el protón es

$$qvB \text{ sen } 90° = qvB$$

Esta fuerza es perpendicular a $\vec{\mathbf{v}}$, por lo que no efectúa trabajo sobre el protón. Simplemente desvía al protón y lo obliga a seguir la trayectoria circular mostrada, como puede verificarse utilizando la regla de la mano derecha. La fuerza qvB se dirige radialmente hacia adentro y suministra la fuerza centrípeta para el movimiento circular: $F_M = qvB = ma = mv^2/r$ y

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{1}$$

Para los datos dados,

$$r = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\text{ kg})(5.0 \times 10^6\text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\text{ C})(30 \times 10^{-4}\text{ T})} = 17\text{ m}$$

Observe de la ecuación (1) que la cantidad de movimiento de la partícula cargada es directamente proporcional al radio de su órbita circular.

30.3 [I] Un protón entra en un campo magnético de densidad de flujo 1.5 Wb/m² con una velocidad de 2.0×10^7 m/s en un ángulo de 30° con las líneas de campo. Calcule la magnitud de la fuerza que actúa sobre el protón.

$$F_M = qvB \text{ sen } \theta = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.0 \times 10^7 \text{ m/s})(1.5 \text{ Wb/m}^2) \text{ sen } 30° = 2.4 \times 10^{-12} \text{ N}$$

30.4 [I] Un haz de rayos catódicos (es decir, un haz de electrones; $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, $q = -e$) se deflecta en un círculo de 2.0 cm de radio por medio de un campo uniforme con $B = 4.5 \times 10^{-3}$ T. ¿Cuál es la rapidez de los electrones?

Para describir un círculo como este, la partícula se debe mover perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}$. De la ecuación (1) del problema 30.2,

$$v = \frac{rqB}{m} = \frac{(0.020 \text{ m})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(4.5 \times 10^{-3} \text{ T})}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}} = 1.58 \times 10^7 \text{ m/s} = 1.6 \times 10^4 \text{ km/s}$$

30.5 [II] Como se muestra en la figura 30-7, una partícula de carga q entra en una región del espacio donde existe un campo eléctrico uniforme dirigido hacia abajo. El valor de E es de 80 kV/m. Perpendicular a $\vec{\mathbf{E}}$ y dirigido hacia adentro de la página hay un campo magnético $B = 0.4$ T. Si la rapidez de la partícula se escoge de manera apropiada, la partícula no sufrirá ninguna deflexión a causa de los campos perpendiculares eléctrico y magnético. ¿Qué rapidez se debe elegir en este caso? (Este dispositivo se llama selector de velocidades.)

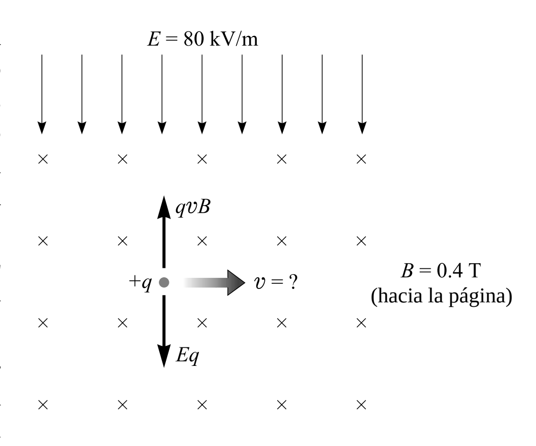


Figura 30-7

El campo eléctrico causa una fuerza Eq hacia abajo sobre la carga, si ésta es positiva. La regla de la mano derecha dice que la fuerza magnética, qvB sen 90°, es hacia arriba si q es positiva. Si ambas fuerzas se deben equilibrar de modo que la partícula no se deflecte, entonces

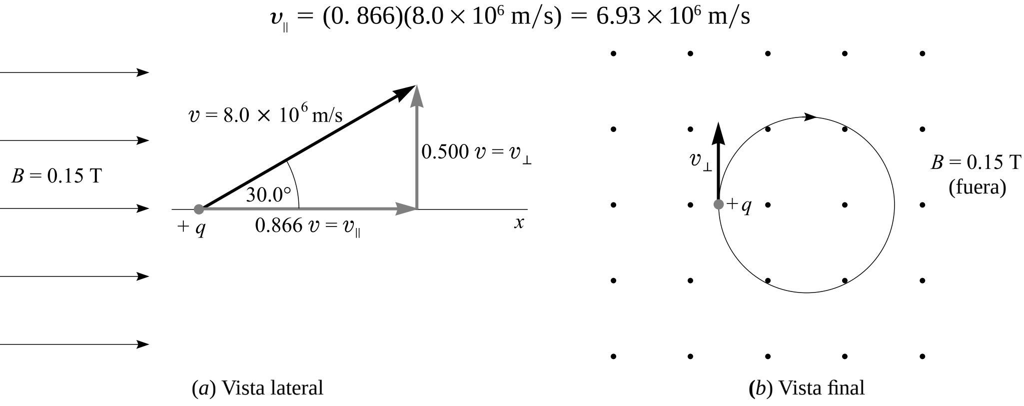
$$Eq = qvB \text{ sen } 90° \qquad \text{o} \qquad v = \frac{E}{B} = \frac{80 \times 10^3 \text{ V/m}}{0.4 \text{ T}} = 2 \times 10^5 \text{ m/s}$$

Cuando q es negativa, ambas fuerzas se invierten, así que el resultado $v = E/B$ aún se cumple.

30.6 [III] En la figura 30-8*a*, un protón ($q = +e$, $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se dispara con una rapidez de 8.0×10^6 m/s en un ángulo de 30.0° hacia un campo $B = 0.15$ T dirigido en la dirección x. Describa la trayectoria que sigue el protón.

La velocidad de la partícula se descompone en componentes paralelo y perpendicular al campo magnético. La fuerza magnética en la dirección de $v_{\parallel}$ es cero (sen $\theta = 0$); la fuerza magnética en la dirección de $v_{\perp}$ no tiene componente en x. Por tanto, el movimiento en la dirección x es uniforme, a una rapidez de

$$v_{\parallel} = (0.\,866)(8.0 \times 10^6 \text{ m/s}) = 6.93 \times 10^6 \text{ m/s}$$



(*a*) Vista lateral (*b*) Vista final

Figura 30-8

mientras que el movimiento transversal es circular (vea el problema 30.2), con radio

$$r = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(0.500 \times 8.0 \times 10^{6}\ \text{m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.15\ \text{T})} = 0.28\ \text{m}$$

El protón describirá una espiral a lo largo del eje x; el radio de la espiral (o hélice) será de 28 cm.

Para determinar el **paso** de la hélice (distancia recorrida en x durante una revolución), note que el tiempo que toma en hacer un círculo completo es

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi r}{v_\perp} = \frac{2\pi(0.28\ \text{m})}{(0.500)(8.0 \times 10^{6}\ \text{m/s})} = 4.4 \times 10^{-7}\ \text{s}$$

Durante este tiempo, el protón viajará una distancia en x de

$$\text{Paso} = (v_\parallel)(\text{periodo}) = (6.93 \times 10^{6}\ \text{m/s})(4.4 \times 10^{-7}\ \text{s}) = 3.0\ \text{m}$$

30.7 [II] Las partículas alfa ($m_\alpha = 6.68 \times 10^{-27}$ kg, $q = +2e$) se aceleran desde el reposo a través de una c.p. de 1.0 kV. Después entran en un campo magnético $B = 0.20$ T perpendicular a su dirección de movimiento. Calcule el radio de su trayectoria.

Su EC final es igual a la energía potencial eléctrica que pierden durante la aceleración, Vq:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = Vq \qquad \text{o} \qquad v = \sqrt{\frac{2Vq}{m}}$$

Del problema 30.2, se sabe que seguirán una trayectoria circular en la que

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2Vq}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Vm}{q}}$$

$$= \frac{1}{0.20\ \text{T}}\sqrt{\frac{2(1000\ \text{V})(6.68 \times 10^{-27}\ \text{kg})}{3.2 \times 10^{-19}\ \text{C}}} = 0.032\ \text{m}$$

30.8 [I] En la figura 30-9 el campo magnético está hacia afuera de la página y $B = 0.80$ T. El alambre que se muestra lleva una corriente de 30 A. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza que actúa sobre 5.0 cm de longitud del alambre.

Se sabe que

$$\Delta F_M = I(\Delta L)B \operatorname{sen}\theta = (30\ \text{A})(0.050\ \text{m})\,(0.80\ \text{T})(1) = 1.2\ \text{N}$$

Por la regla de la mano derecha, la fuerza es perpendicular tanto al alambre como al campo y se dirige hacia el fondo de la página.

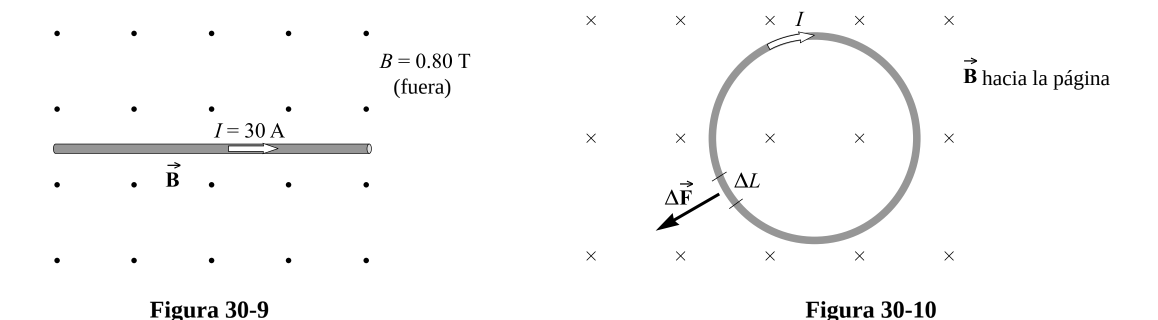


Figura 30-9 Figura 30-10

30.9 [I] Como se muestra en la figura 30-10, una bobina de alambre lleva una corriente I y su plano es perpendicular a un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. ¿Cuáles son la fuerza resultante y la torca sobre la bobina?

Considere la longitud ΔL que se muestra. La fuerza $\Delta\vec{\mathbf{F}}$ sobre ella tiene la dirección indicada. Un punto directamente opuesto a ΔL sobre la bobina tiene una fuerza igual, pero opuesta, actuando sobre él. Por tanto, las fuerzas sobre la bobina se cancelan entre sí y la fuerza resultante sobre ella es cero.

En la figura se observa que las $\Delta\vec{F}$ que actúan sobre la bobina intentan expandirla, no hacerla girar. Por consiguiente, la torca (τ) sobre la bobina es cero. O se puede usar la ecuación de la torca,

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta$$

donde θ es el ángulo entre las líneas de campo y la perpendicular al plano de la bobina. Se ve que $\theta = 0$. Por tanto, sen $\theta = 0$ y la torca es cero.

30.10 [I] Por la bobina de 40 vueltas que se muestra en la figura 30-11 circula una corriente de 2.0 A en un campo magnético $B = 0.25$ T. Determine la torca sobre ella. ¿Cómo girará?

Método 1

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta = (40)(2.0 \text{ A})(0.10 \text{ m} \times 0.12 \text{ m})(0.25 \text{ T})(\text{sen } 90°) = 0.24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(Recuerde que θ es el ángulo entre las líneas de campo y la perpendicular a la bobina.) Por la regla de la mano derecha, la bobina rotará alrededor de un eje vertical de tal manera que el lado *ad* se moverá hacia afuera de la página.

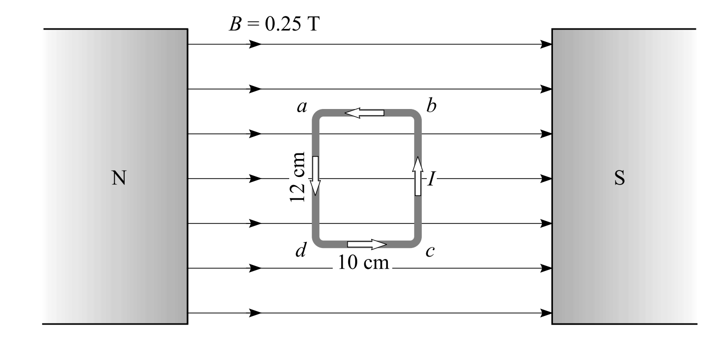


Figura 30-11

Método 2

Dado que los lados *dc* y *ab* están alineados con el campo, la fuerza sobre cada uno de ellos es cero, mientras que la fuerza sobre cada alambre vertical es

$$F_M = ILB = (2.0 \text{ A})(0.12 \text{ m})(0.25 \text{ T}) = 0.060 \text{ N}$$

hacia afuera de la página en el lado *ab* y hacia adentro de la página en el lado *bc*. Si se toman las torcas en torno al lado *bc* como eje, sólo la fuerza sobre el lado *ad* tiene una torca distinta de cero. Esto es

$$\tau = (40 \times 0.060 \text{ N})(0.10 \text{ m}) = 0.24 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y tiende a hacer girar el lado *ad* hacia afuera de la página.

30.11 [I] En la figura 30-12 se muestra la cuarta parte de una bobina circular de alambre que lleva una corriente de 14 A. Su radio es $a = 5.0$ cm. Un campo magnético uniforme, $B = 300$ G, se dirige en la dirección $+x$. Encuentre la torca sobre la bobina y la dirección en la que girará.

La normal a la bobina, $\overline{OP}$, hace un ángulo $\theta = 60°$ con la dirección $+x$, la dirección del campo. Así pues,

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta = (1)(14 \text{ A})(\pi \times 25 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(0.030\,0 \text{ T}) \text{ sen } 60° = 2.9 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

La regla de la mano derecha muestra que la bobina rotará alrededor del eje *y*, de tal manera que el ángulo de 60° tenderá a disminuir.

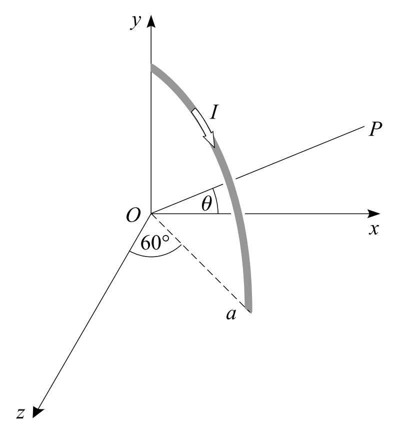


Figura 30-12

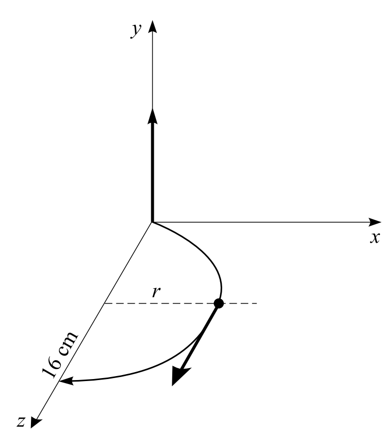


Figura 30-13

30.12 [II] Dos electrones, ambos con rapidez de 5.0×10^6 m/s, se disparan dentro de un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. El primero se dispara desde el origen a lo largo del eje $+x$ y se mueve en un círculo que interseca el eje $+z$ en $z = 16$ cm. El segundo se dispara a lo largo del eje $+y$ y se mueve en línea recta. Determine la magnitud y dirección de $\vec{\mathbf{B}}$.

La situación se muestra en la figura 30-13. Ya que una carga no experimenta fuerza cuando se mueve a lo largo de una línea de campo, el campo debe estar en la dirección $+y$ o $-y$. El uso de la regla de la mano derecha para el movimiento que se muestra en el diagrama para la carga *negativa* del electrón, conduce a concluir que el campo está en la dirección $-y$.

Para determinar la magnitud de $\vec{\mathbf{B}}$, note que $r = 8$ cm. La fuerza magnética Bqv proporciona la fuerza centrípeta necesaria mv^2/r, y por tanto

$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{(9.1 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.0 \times 10^{6}\ \text{m/s})}{(1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0.080\ \text{m})} = 3.6 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

30.13 [I] En cierto lugar de la Tierra, el campo magnético es de 5.0×10^{-5} T, dirigido 40° por debajo de la horizontal. Determine la fuerza por metro de longitud sobre un alambre horizontal que porta una corriente de 30 A hacia el Norte.

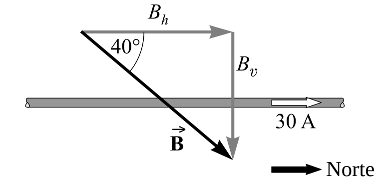


Figura 30-14

Casi en todas partes el campo magnético de la Tierra se dirige hacia el norte. (Esta es la dirección en la cual apunta la aguja de una brújula.) Por tanto, la situación es la que se muestra en la figura 30-14. La fuerza sobre el alambre es

$$F_M = (30\ \text{A})(L)(5.0 \times 10^{-5}\ \text{T})\ \text{sen}\ 40° \qquad \text{así que} \qquad \frac{F_M}{L} = 9.6 \times 10^{-4}\ \text{N/m}$$

La regla de la mano derecha indica que la fuerza está hacia adentro de la página, es decir, al oeste.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

30.14 [I] Un ion ($q = +2e$) entra en un campo magnético de 1.2 Wb/m² con una rapidez de 2.5×10^5 m/s perpendicular al campo. Determine la fuerza sobre el ion. **Resp.** 9.6×10^{-14} N.

30.15 [II] Calcule la rapidez de los iones que pasan sin desviarse a través de campos E y B perpendiculares para los que $E = 7.7$ kV/m y $B = 0.14$ T. **Resp.** 55 km/s.

30.16 [I] La partícula que se muestra en la figura 30-15 tiene carga positiva en todos los casos. ¿Cuál es la dirección de la fuerza sobre ella debida al campo magnético? Proporcione su magnitud en términos de B, q y v.
Resp. *a*) hacia adentro de la página, qvB; *b*) hacia afuera de la página, qvB sen θ; *c*) en el plano de la página en un ángulo $\theta + 90°$, qvB.

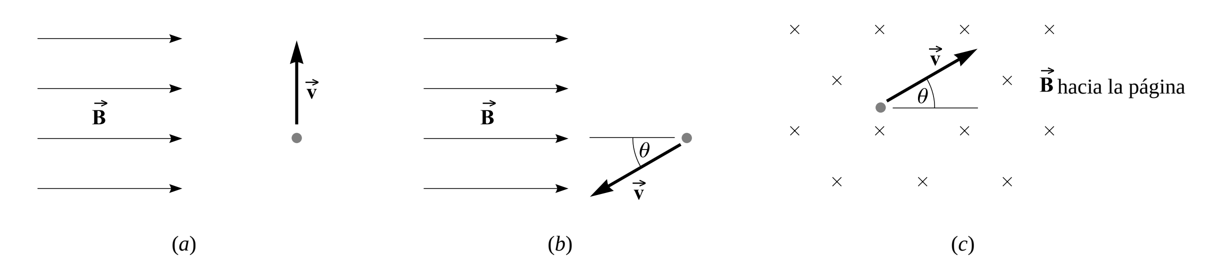


Figura 30-15

30.17 [II] ¿Cuál podría ser la masa de un ion positivo que se mueve a 1.0×10^7 m/s y se curva en una trayectoria circular de 1.55 m de radio debido a un campo magnético de 0.134 Wb/m²? (Existen varias respuestas posibles.)
Resp. $n(3.3 \times 10^{-27}$ kg), donde n es la carga del ion.

30.18 [II] Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 3 750 V. Después entra a una región donde $B = 4.0 \times 10^{-3}$ T perpendicular a su velocidad. Calcule el radio de la trayectoria que seguirá. **Resp.** 5.2 cm.

30.19 [II] Un electrón se dispara desde el origen de coordenadas con una rapidez de 5.0×10^6 m/s. Su velocidad inicial hace un ángulo de 20° con el eje $+x$. Describa su movimiento si en la dirección $+x$ existe un campo magnético $B = 2.0$ mT. **Resp.** helicoidal, $r = 0.49$ cm, paso $= 8.5$ cm.

30.20 [II] Un haz de electrones pasa sin desviarse a través de dos campos, uno eléctrico y el otro magnético, mutuamente perpendiculares. Si el campo eléctrico se apaga y el mismo campo magnético se mantiene, los electrones se mueven en el campo magnético en trayectorias circulares de 1.14 cm de radio. Determine la razón de la carga electrónica a la masa del electrón si $E = 8.00$ kV/m y el campo magnético tiene una densidad de flujo de 2.00 mT. **Resp.** $e/m_e = 175$ GC/kg.

30.21 [I] Un alambre recto de 15 cm de longitud, que lleva una corriente de 6.0 A, se encuentra en un campo uniforme de 0.40 T. ¿Cuál es la fuerza sobre el alambre cuando está *a*) en ángulo recto con el campo y *b*) a 30° con el campo? **Resp.** *a*) 0.36 N; *b*) 0.18 N.

30.22 [I] ¿Cuál es la dirección de la fuerza, debida al campo magnético terrestre, sobre un alambre que lleva una corriente verticalmente hacia abajo? **Resp.** horizontalmente hacia el este.

30.23 [I] Encuentre la fuerza sobre cada segmento del alambre que se muestra en la figura 30-16, si $B = 0.15$ T. Suponga que la corriente en el alambre es de 5.0 A. **Resp.** En las secciones *AB* y *DE*, la fuerza es cero; en la sección *BC*, 0.12 N hacia la página; en la sección *CD*, 0.12 N hacia afuera de la página.

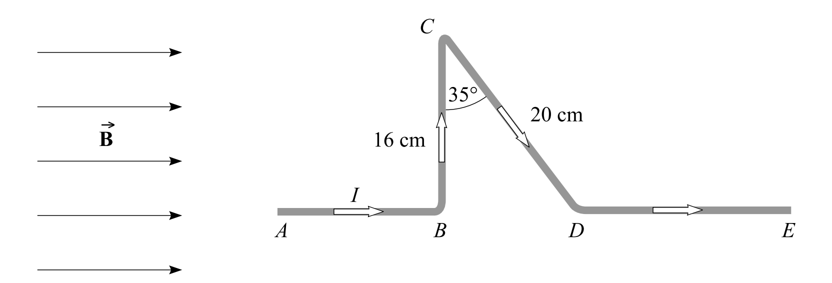


Figura 30-16

30.24 [II] Una bobina rectangular plana de 25 vueltas está suspendida en un campo magnético uniforme de 0.20 Wb/m^2. El plano de la bobina es paralelo a la dirección del campo. Las dimensiones de la bobina son: 15 cm perpendicular a las líneas de campo y 12 cm paralelas a ellas. ¿Cuál es la corriente en la bobina si sobre ella actúa una torca de 5.4 N · m? **Resp.** 60 A.

30.25 [II] Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 800 V. Después se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 30 G. Encuentre el radio de su órbita y su frecuencia orbital. **Resp.** 3.2 cm, 84 MHz.

30.26 [II] Un protón y un deuterón ($m_d \approx 2m_p$, $qd = e$) se aceleran a través de la misma diferencia de potencial y entran en un campo magnético a lo largo de la misma línea. Si el protón sigue una trayectoria de radio R_p, ¿cuál será el radio de la trayectoria del deuterón? **Resp.** $R_d = R_p\sqrt{2}$.

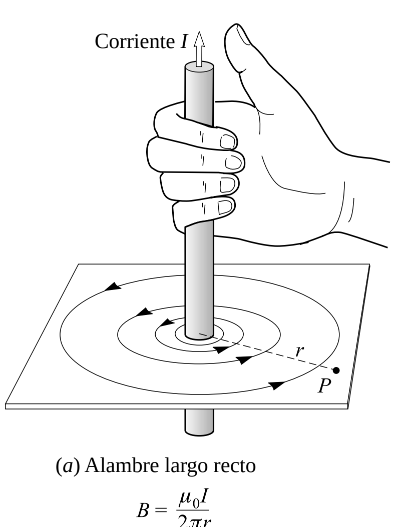
FUENTES DE CAMPOS MAGNÉTICOS 31

LOS CAMPOS MAGNÉTICOS SE PRODUCEN por el movimiento de cargas y, desde luego, eso incluye corrientes eléctricas. La figura 31-1 muestra la naturaleza de los campos magnéticos originados por diversas configuraciones de corriente. Abajo de cada una de ellas se da el valor de B en el punto de referencia P. La constante $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ $\mathrm{T \cdot m/A}$ se llama *permeabilidad del espacio libre (vacío)*. Se supone que el material circundante es el vacío o aire.

LA DIRECCIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO producido por la corriente que circula por un alambre se puede encontrar utilizando la regla de la mano derecha, como se ilustra en la figura 31-1*a*:

> Sujete el alambre con la mano derecha y apunte el pulgar en la dirección de la corriente. Los dedos rodean el alambre en la misma dirección que el campo magnético.

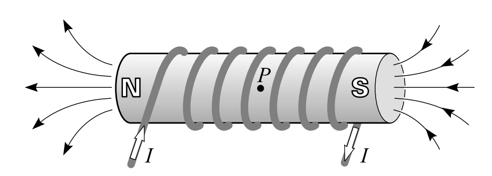
Esta misma regla se puede usar para encontrar la dirección del campo para una espira de corriente como la de la figura 31-1*b*.



(*a*) Alambre largo recto

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

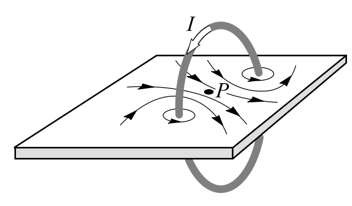
donde r es la distancia a P desde el eje del alambre



(*c*) Punto interior de un solenoide largo con n vueltas por metro:

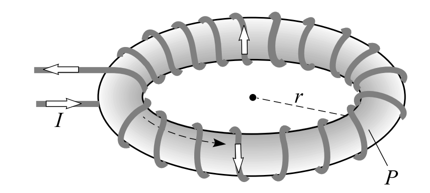
$$B = \mu_0 n I$$

Es constante en el interior



(*b*) Centro de una bobina circular con radio r y N vueltas

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2r}$$



(*d*) Punto interior de un toroide que tiene N vueltas

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

donde r es el radio del círculo donde se encuentra P

Figura 31-1

LOS MATERIALES FERROMAGNÉTICOS, principalmente el hierro y los otros elementos de transición, incrementan enormemente los campos magnéticos. Otros materiales sólo influyen ligeramente en los campos B. Los materiales ferromagnéticos contienen *dominios,* o regiones de átomos alineados, que actúan como pequeños imanes

de barra. Cuando los dominios dentro de un objeto se alinean entre sí, el objeto se convierte en un imán. En un imán permanente no es fácil destruir el alineamiento de los dominios.

EL MOMENTO MAGNÉTICO de una espira plana que porta corriente (corriente $= I$, área $= A$) es IA. El momento magnético es una cantidad vectorial que apunta a lo largo de la línea de campo perpendicular al plano de la espira. En términos del momento magnético, la torca sobre una bobina plana con N espiras ubicada dentro de un campo B es $\tau = N(IA)B$ sen θ, donde θ es el ángulo entre el campo y el vector momento magnético.

CAMPO MAGNÉTICO PRODUCIDO POR UN ELEMENTO DE CORRIENTE: El elemento de corriente de longitud ΔL que se muestra en la figura 31-2 contribuye con una cantidad $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ al campo en P. La magnitud de $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ está dada por la *Ley de Biot-Savart*:

$$\Delta B = \frac{\mu_0 I\,\Delta L}{4\pi r^2}\ \text{sen}\ \theta$$

donde r y θ se definen en la ilustración. La dirección de $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ es perpendicular al plano determinado por ΔL y r (el plano de la página). En el caso que se muestra, la regla de la mano derecha indica que $\Delta\vec{\mathbf{B}}$ apunta hacia afuera de la página.

Cuando r está en línea con ΔL, entonces $\theta = 0$ y por tanto $\Delta B = 0$. Esto quiere decir que el campo debido a un alambre recto en un punto sobre la línea del alambre es cero.

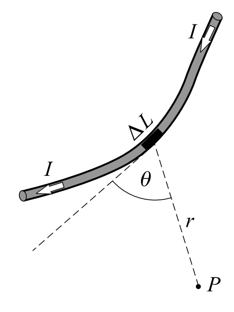


Figura 31-2

PROBLEMAS RESUELTOS

31.1 [I] Calcule el valor de B en el aire en un punto a 5 cm de un largo alambre recto que porta una corriente de 15 A.

De la figura 31-1*a*,

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(15\ \text{A})}{2\pi(0.05\ \text{m})} = 6 \times 10^{-5}\ \text{T}$$

31.2 [I] Una bobina circular plana con 40 espiras de alambre tiene un diámetro de 32 cm. ¿Qué corriente debe fluir por los alambres para producir en su centro un campo de 3×10^{-4} Wb/m^2?

De la figura 31-1*b*,

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2r} \qquad \text{o bien} \qquad 3.0 \times 10^{-4}\ \text{T} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(40)(I)}{2(0.16\ \text{m})}$$

de donde $I = 1.9$ A.

31.3 [I] Un solenoide con núcleo de aire y 2 000 espiras tiene una longitud de 60 cm y un diámetro de 2.0 cm. Si por él pasa una corriente de 5.0 A, ¿cuál será la densidad de flujo en su interior?

De la figura 31-3*c*,

$$B = \mu_0 nI = (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})\left(\frac{2\,000}{0.60\ \text{m}}\right)(5.0\ \text{A}) = 0.021\ \text{T}$$

31.4 [I] En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón viaja con una rapidez de 2.2×10^6 m/s en un círculo ($r = 5.3 \times 10^{-11}$ m) alrededor del núcleo. Calcule el valor de B en el núcleo debido al movimiento del electrón.

En el problema 26.17 se encontró que el electrón en órbita corresponde a una espira de corriente con $I = 1.06$ mA. El campo en el centro de la espira de corriente es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(1.06 \times 10^{-3}\ \text{A})}{2(5.3 \times 10^{-11}\ \text{m})} = 13\ \text{T}$$

31.5 [II] Un alambre largo recto coincide con el eje *x* y otro coincide con el eje *y*. Cada uno lleva una corriente de 5 A en la dirección positiva de los ejes coordenadas (vea la figura 31-3). ¿En qué punto el campo combinado es igual a cero?

El uso de la regla de la mano derecha debe convencerlo de que el campo tiende a cancelarse en el primer y tercer cuadrantes. Una línea a $\theta = 45°$ que pasa por el origen es equidistante de los dos alambres en estos cuadrantes. En consecuencia, los campos se anulan exactamente a lo largo dºe la línea $x = y$, la línea de 45º.

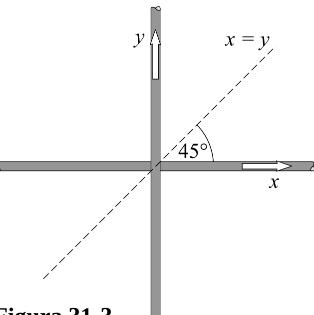


Figura 31-3

31.6 [II] Un alambre de gran longitud lleva una corriente de 20 A a lo largo del eje de un solenoide de gran longitud. El campo debido al solenoide es de 4.0 mT. Encuentre el campo resultante en un punto a 3.0 mm del eje del solenoide.

La situación se muestra en la figura 31-4. El campo del solenoide, $\vec{\mathbf{B}}_s$, es paralelo al alambre. El campo del alambre largo recto, $\vec{\mathbf{B}}_w$, rodea el alambre y es perpendicular a $\vec{\mathbf{B}}_s$. Se tiene que $B_s = 4.0$ mT y

$$B_w = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(20\ \mathrm{A})}{2\pi(3.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m})} = 1.33\ \mathrm{mT}$$

Como $\vec{\mathbf{B}}_s$ y $\vec{\mathbf{B}}_w$ son perpendiculares, sus $\vec{\mathbf{B}}$ resultantes tienen magnitud

$$B = \sqrt{(4.0\ \mathrm{mT})^2 + (1.33\ \mathrm{mT})^2} = 4.2\ \mathrm{mT}$$

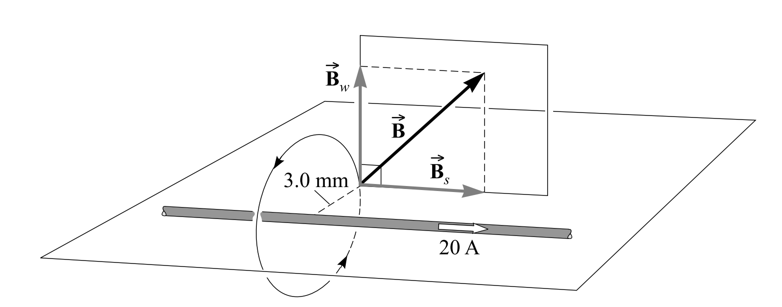


Figura 31-4

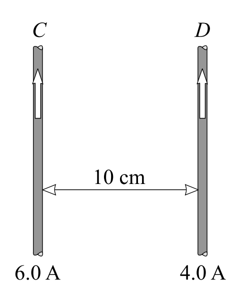


Figura 31-5

31.7 [II] Como se muestra en la figura 31-5, dos largos alambres paralelos están separados 10 cm y llevan corrientes de 6.0 A y 4.0 A. Calcule la fuerza sobre 1.0 m del alambre *D* si las corrientes son *a*) paralelas y *b*) antiparalelas.

a) Ésta es la situación que se muestra en la figura 31-5. El campo en el alambre *D* debido al alambre *C* está dirigido hacia adentro de la página y tiene un valor

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T \cdot m/A})(6.0\ \mathrm{A})}{2\pi(0.10\ \mathrm{m})} = 1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{T}$$

La fuerza sobre 1 m del alambre *D* debido a este campo es

$$F_M = ILB \text{ sen } \theta = (4.0\ \mathrm{A})(1.0\ \mathrm{m})(1.2 \times 10^{-5}\ \mathrm{T})(\text{sen } 90°) = 48\ \mu\mathrm{N}$$

Al aplicar la regla de la mano derecha al alambre *D* se encuentra que la fuerza sobre *D* se dirige hacia la izquierda. Los alambres se atraen mutuamente.

b) Si la corriente en *D* fluye en sentido opuesto, la dirección de la fuerza se invierte. Los alambres se repelen mutuamente. La fuerza por metro de longitud todavía es de 48 μN.

31.8 [III] Considere los tres alambres largos paralelos rectos que se observan en la figura 31-6. Encuentre la fuerza que experimentan 25 cm de longitud del alambre *C*.

Los campos debidos a los alambres D y G en el alambre C son

$$B_D = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(30\ \text{A})}{2\pi(0.030\ \text{m})} = 2.0 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

hacia la página, y

$$B_G = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(20\ \text{A})}{2\pi(0.050\ \text{m})} = 0.80 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

hacia afuera de la página. Por consiguiente, el campo en la posición del alambre C es

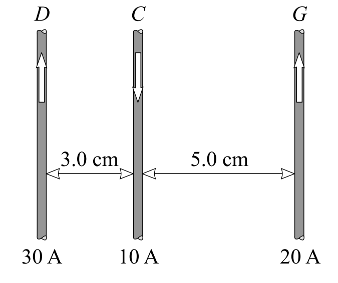


Figura 31-6

$$B = 2.0 \times 10^{-4} - 0.80 \times 10^{-4} = 1.2 \times 10^{-4}\ \text{T}$$

hacia la página. La fuerza sobre los 25 cm de longitud de C es

$$F_M = ILB \text{ sen } \theta = (10\ \text{A})(0.25\ \text{m})(1.2 \times 10^{-4}\ \text{T})(\text{sen } 90°) = 0.30\ \text{mN}$$

Al usar la regla de la mano derecha en el alambre C se encuentra que la fuerza sobre el alambre C se dirige a la derecha.

31.9 [III] Una bobina circular plana con 10 espiras de alambre tiene un diámetro de 2.0 cm y lleva una corriente de 0.50 A. Ésta se monta dentro de un solenoide que tiene 200 espiras en sus 25 cm de longitud. La corriente en el solenoide es de 2.4 A. Calcule la torca que se requiere para mantener la bobina con su eje central perpendicular al del solenoide.

Se eligen los subíndices s y c para referirse al solenoide y la bobina, respectivamente. Entonces

$$\tau = N_c I_c A_c B_s \text{ sen } 90°$$

Pero $B_s = \mu_0 n I_s = \mu_0 (N_s/L_s) I_s$, que da

$$\tau = \frac{\mu_0 N_c N_s I_c I_s (\pi r_c^2)}{L_s}$$
$$= \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(10)(200)(0.50\ \text{A})(2.4\ \text{A})\pi(0.010\ \text{m})^2}{0.25\ \text{m}}$$
$$= 3.8 \times 10^{-6}\ \text{N}\cdot\text{m}$$

31.10 [III] El alambre que se muestra en la figura 31-7 lleva una corriente de 40 A. Encuentre el campo en el punto P.

Como P se halla sobre las líneas de los alambres rectos, éstos no contribuyen al campo en P. Una espira circular de radio r da un campo $B = \mu_0 I/2r$ en el punto central. Aquí solamente se tienen tres cuartos de la espira, y por tanto se puede suponer que

$$B \text{ en el punto } P = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{\mu_0 I}{2r}\right) = \frac{(3)(4\pi \times 10^{-7}\ \text{T}\cdot\text{m/A})(40\ \text{A})}{(4)(2)(0.020\ \text{m})}$$
$$= 9.4 \times 10^{-4}\ \text{T} = 0.94\ \text{mT}$$

El campo apunta hacia afuera de la página.

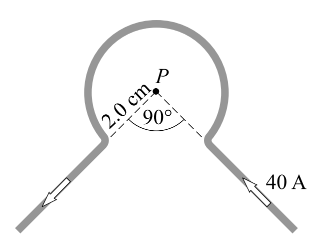


Figura 31-7

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

31.11 [I] Calcule la magnitud del campo magnético en el aire en un punto a 6.0 cm de un largo alambre recto que lleva una corriente de 9.0 A. **Resp.** 30 μT.

31.12 [I] Una bobina circular plana con devanado cerrado y 25 vueltas de alambre tiene un diámetro de 10 cm y lleva una corriente de 4.0 A. Determine el valor de B en su centro. **Resp.** 1.3×10^{-3} Wb/m^2.

31.13 [I] Un solenoide con núcleo de aire de 50 cm de longitud tiene 4 000 vueltas de alambre enrolladas en él. Calcule B en su interior cuando en el devanado existe una corriente de 0.25 A. **Resp.** 2.5 mT.

31.14 [I] Un toroide con núcleo de aire y devanado uniforme tiene 750 espiras. El radio del círculo que pasa por el centro del devanado es de 5 cm. ¿Qué corriente producirá en el devanado un campo de 1.8 mT en el círculo central? **Resp.** 0.6 A.

31.15 [II] Dos alambres largos paralelos están separados 4 cm y llevan corrientes de 2 A y 6 A en la misma dirección. Calcule la fuerza entre los alambres por metro de longitud de alambre. **Resp.** 6×10^{-5} N/m, atracción.

31.16 [II] Dos alambres largos fijos paralelos, A y B, están separados 10 cm en aire y llevan 40 A y 20 A, respectivamente, en direcciones opuestas. Determine el campo resultante *a*) en una línea a medio camino entre los alambres y paralela a ellos y *b*) en una línea a 8.0 cm del alambre A y 18 cm del alambre B. *c*) ¿Cuál es la fuerza por metro sobre un tercer alambre largo, a la mitad del camino entre A y B y en sus planos, cuando lleva una corriente de 5.0 A en la misma dirección que la corriente en A? **Resp.** *a*) 2.4×10^{-4} T; *b*) 7.8×10^{-5} T; *c*) 1.2×10^{-3} N/m, hacia A.

31.17 [II] Los alambres largos rectos de la figura 31-3 conducen ambos una corriente de 12 A en la dirección mostrada. Calcule B en los puntos *a*) $x = -5.0$ cm, $y = 5.0$ cm y *b*) $x = -7.0$ cm, $y = -6.0$ cm. **Resp.** *a*) 96 μT, hacia afuera; *b*) 5.7 μT, hacia adentro.

31.18 [II] Cierto electroimán está formado por un solenoide (5.0 cm de longitud con 200 vueltas de alambre) devanado sobre un núcleo de hierro dulce que intensifica el campo 130 veces. (Se dice que la *permeabilidad relativa* del hierro es de 130.) Encuentre B dentro del hierro cuando la corriente en el solenoide es de 0.30 A.
Resp. 0.20 T.

31.19 [III] Un solenoide particular (50 cm de largo con 2 000 vueltas de alambre) lleva una corriente de 0.70 A y está en el vacío. Se dispara un electrón en un ángulo de 10º respecto al eje del solenoide desde un punto sobre el mismo eje. *a*) ¿Cuál debe ser la rapidez del electrón para que apenas no golpee el interior del solenoide de 1.6 cm de diámetro? *b*) ¿Cuál será el paso de la trayectoria helicoidal del electrón? **Resp.** *a*) 1.4×10^7 m/s; *b*) 14 cm.

FEM INDUCIDA; FLUJO MAGNÉTICO

32

EFECTOS MAGNÉTICOS DE LA MATERIA: La mayoría de los materiales sólo tienen ligeros efectos sobre un campo magnético estacionario. Para explorar dicho fenómeno aún más, suponga que un solenoide muy largo o un toroide se encuentran en el vacío. Cuando se establece una corriente en la bobina, el campo magnético en cierto punto del interior del solenoide o toroide es B_0, donde el subíndice $_0$ significa que se trata del vacío. Si ahora el núcleo del solenoide o toroide se llena con un material, el campo en ese punto cambiará a un nuevo valor B. Se define

$$\textit{Permeabilidad relativa} \text{ de un material} = k_M = \frac{B}{B_0}$$

$$\textit{Permeabilidad} \text{ de un material} = \mu = k_M \mu_0$$

Recuerde que μ_0 es la permeabilidad del vacío, $4\pi \times 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A}$.

Los **materiales diamagnéticos** tienen valores para k_M ligeramente menores que la unidad (por ejemplo, 0.999984 para el plomo sólido). Estos materiales hacen disminuir ligeramente el valor de B en el solenoide o toroide.

Los **materiales paramagnéticos** tienen valores para k_M ligeramente mayores que la unidad (por ejemplo, 1.000 021 para el aluminio sólido). Estos materiales incrementan ligeramente el valor de B en el solenoide o toroide.

Los **materiales ferromagnéticos**, como el hierro y sus aleaciones, tienen valores k_M de alrededor de 50 o mayores, y en consecuencia aumentan considerablemente el valor de B en un solenoide o toroide.

LÍNEAS DE CAMPO MAGNÉTICO: Un campo magnético puede representarse gráficamente con el uso de líneas, a las que $\vec{\mathbf{B}}$ siempre es tangente. Estas líneas de campo magnético se construyen de tal modo que el número de líneas que inciden en una unidad de área perpendicular a ellas es proporcional al valor local de B.

EL FLUJO MAGNÉTICO (Φ_M) a través de un área A se define como el producto de $B_\perp$ y A, donde $B_\perp$ es la componente de $\vec{\mathbf{B}}$ perpendicular a la superficie de área A:

$$\Phi_M = B_\perp A = BA = \cos\theta$$

en donde θ es el ángulo entre la dirección del campo magnético y la perpendicular al área. El flujo se expresa en **webers** (Wb).

UNA FEM INDUCIDA existe en una espira de alambre siempre que ocurra un cambio en el flujo magnético que pasa a través del área que rodea la espira. La fem inducida sólo existe durante el tiempo en que cambia el flujo a través del área, ya sea al aumentar o disminuir.

LEY DE FARADAY PARA LA FEM INDUCIDA: Suponga que una bobina con N vueltas se somete a un flujo magnético variable que pasa a través de la bobina. Si en un tiempo Δt ocurre un cambio $\Delta\Phi_M$ en el flujo, entonces la fem inducida promedio entre las dos terminales de la bobina está dada por

$$\mathscr{E} = -N\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}$$

La fem $\mathscr{E}$ está en volts si $\Delta\Phi_M/\Delta t$ está en Wb/s. El signo menos indica que la fem inducida se opone al cambio que la produce, como se establece generalmente en la **ley de Lenz**.

LEY DE LENZ: Una fem inducida está siempre en una dirección que se opone al cambio en el flujo magnético que la produce. Por ejemplo, si aumenta el flujo a través de una bobina, la corriente producida por la fem inducida generará un flujo que tiende a cancelar el incremento en el flujo (aunque por lo general no tiene éxito en hacerlo por completo). O, si disminuye el flujo a través de la bobina, dicha corriente producirá un flujo que tiende a restituir la disminución del flujo (aunque por lo general no tiene éxito en hacerlo por completo). La ley de Lenz es una consecuencia de la conservación de la energía. Si este no fuera el caso, las corrientes inducidas acrecentarían el cambio de flujo que hace que inicien y el proceso se llevaría a cabo indefinidamente.

FEM GENERADA POR MOVIMIENTO: Cuando un conductor se mueve a través de un campo magnético de manera que corta las líneas de campo, en él existirá una fem inducida, de acuerdo con la ley de Faraday. En este caso,

$$|\mathscr{E}| = \frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}$$

El símbolo $|\mathscr{E}|$ significa que aquí sólo se considera la magnitud de la fem inducida promedio; su dirección se tomará en cuenta más adelante.

La fem inducida en un conductor recto de longitud L que se mueve con velocidad $\vec{\mathbf{v}}$ perpendicular a un campo $\vec{\mathbf{B}}$ está dada por

$$|\mathscr{E}| = BLv$$

donde $\vec{\mathbf{B}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ y el alambre deben ser mutuamente perpendiculares.

En este caso, la ley de Lenz todavía indica que la fem inducida se opone al proceso. Pero ahora la oposición se produce por medio de la fuerza ejercida por el campo magnético sobre la corriente inducida en el conductor. La dirección de la corriente debe ser tal que la fuerza se oponga al movimiento del conductor (aunque por lo general no lo cancela completamente). Si se conoce la dirección de la corriente, también se conoce la dirección de $\mathscr{E}$.

PROBLEMAS RESUELTOS

32.1 [II] Un solenoide de 40 cm de largo tiene un área en su sección transversal de 8.0 cm² y está devanado con 300 vueltas de alambre que lleva una corriente de 1.2 A. La permeabilidad relativa de su núcleo de hierro es de 600. Calcule *a*) B en un punto interior y *b*) el flujo a través del solenoide.

a) De la figura 31-1*c*,

$$B_0 = \frac{\mu_0 NI}{L} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A})(300)(1.2\ \mathrm{A})}{0.40\ \mathrm{m}} = 1.13\ \mathrm{mT}$$

y así $\quad B = k_M B_0 = (600)(1.13 \times 10^{-3}\ \mathrm{T}) = 0.68\ \mathrm{T}$

b) Dado que las líneas de campo son perpendiculares a la sección transversal del solenoide,

$$\Phi_M = B_\perp A = BA = (0.68\ \mathrm{T})(8.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}) = 54\ \mu\mathrm{Wb}$$

32.2 [I] El flujo a través de una bobina toroidal que porta corriente cambia de 0.65 mWb a 0.91 mWb cuando su núcleo de aire se reemplaza con otro material. ¿Cuáles son la permeabilidad relativa y la permeabilidad del material?

El núcleo de aire es esencialmente el mismo que un núcleo de vacío. Entonces, $k_M = B/B_0$ y $\Phi_M = B_\perp A$,

$$k_M = \frac{0.91\ \mathrm{mWb}}{0.65\ \mathrm{mWb}} = 1.40$$

Ésta es la permeabilidad relativa. La permeabilidad magnética es

$$\mu = k_M \mu_0 = (1.40)(4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}) = 5.6\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\cdot m/A}$$

32.3 [I] La espira de un cuarto de círculo que se muestra en la figura 32-1 tiene un área de 15 cm². Un campo magnético constante, $B = 0.16$ T, que apunta en la dirección $+x$, llena el espacio independiente de la espira. Encuentre el flujo a través de la espira para cada una de las orientaciones mostradas.

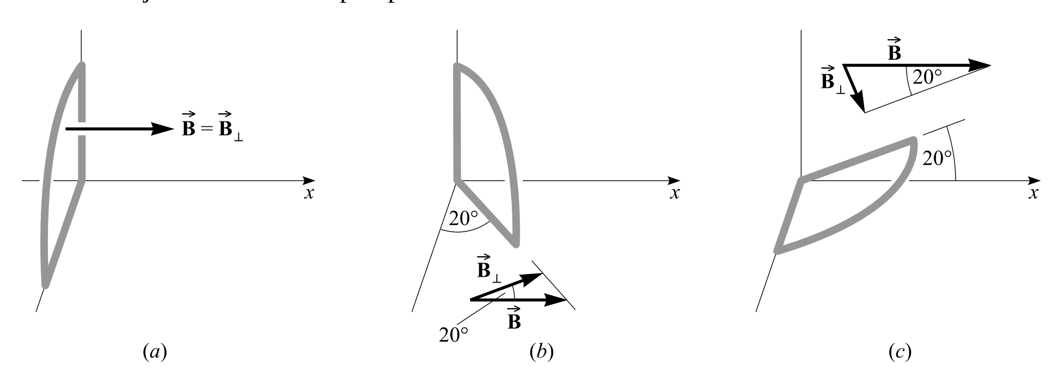


Figura 32-1

El flujo magnético está determinado por la cantidad de campo $\vec{\mathbf{B}}$ que pasa perpendicularmente por el área particular, multiplicada por dicha área. Esto es, $\Phi_M = B_\perp A$.

a) $\Phi_M = B_\perp A = BA = (0.16\ \text{T})(15 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) = 2.4 \times 10^{-4}\ \text{Wb}$

b) $\Phi_M = (B \cos 20º)A = (2.4 \times 10^{-4}\ \text{Wb})(\cos 20º) = 2.3 \times 10^{-4}\ \text{Wb}$

c) $\Phi_M = (B\ \text{sen}\ 20º)A = (2.4 \times 10^{-4}\ \text{Wb})(\text{sen}\ 20º) = 8.2 \times 10^{-5}\ \text{Wb}$

32.4 [II] Una superficie semiesférica de radio R se coloca en un campo magnético uniforme $\vec{\mathbf{B}}$, como se muestra en la figura 32-2. ¿Cuál es el flujo magnético a través de la superficie semiesférica?

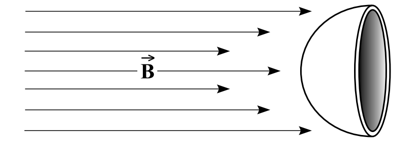


Figura 32-2

El mismo número de líneas de campo que atraviesan por la superficie curva pasan a través de la sección transversal circular plana sombreada. Por ende,

$$\text{Flujo a través de la superficie curva} = \text{Flujo a través de la superficie plana} = B_\perp A$$

donde, en este caso, $B_\perp = B$ y $A = \pi R^2$. Entonces $\Phi_M = \pi BR^2$.

32.5 [I] Una bobina circular de 50 espiras tiene un radio de 3.0 cm. Está orientada de modo que las líneas de campo de un campo magnético son normales al área de la bobina. Suponga que el campo magnético varía de tal manera que B aumenta de 0.10 T a 0.35 T en un tiempo de 2.0 milisegundos. Encuentre la fem inducida promedio en la bobina.

$$\Delta\Phi_M = B_{\text{final}}A - B_{\text{inicial}}A = (0.25\ \text{T})(\pi r^2) = (0.25\ \text{T})\pi(0.030\ \text{m})^2 = 7.1 \times 10^{-4}\ \text{Wb}$$

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (50)\left(\frac{7.1 \times 10^{-4}\ \text{Wb}}{2 \times 10^{-3}\ \text{s}}\right) = 18\ \text{V}$$

32.6 [II] El imán cilíndrico permanente en el centro de la figura 32-3 induce una fem en las bobinas cuando el imán se mueve a derecha o izquierda. Encuentre las direcciones de las corrientes inducidas a través de ambos resistores cuando el imán se mueve *a*) hacia la derecha y *b*) hacia la izquierda. En cada caso analice el voltaje que pasa por el resistor:

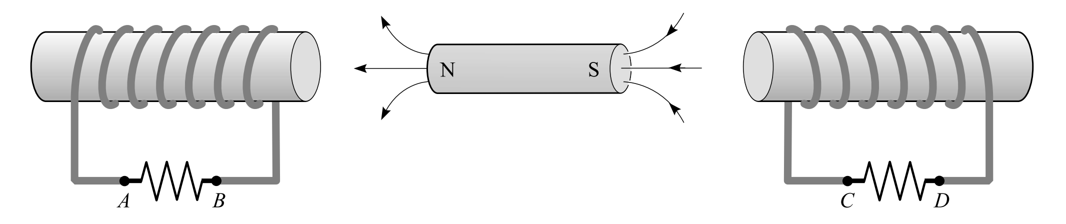


Figura 32-3

a) Considere primero la bobina de la izquierda. Conforme el imán se mueve hacia la derecha, el flujo a través de dicha bobina, que se dirige más o menos a la izquierda, disminuye. Para compensar esto, la corriente inducida en la bobina de la izquierda fluirá de tal manera que producirá un flujo hacia la izquierda a través de sí misma. Aplique la regla de la mano derecha para la espira de la izquierda. Para que produzca un flujo hacia la izquierda adentro de la bobina, la corriente debe fluir directamente a través del resistor de B a A. El voltaje en B es mayor que en A.

Ahora considere la bobina de la derecha. Conforme el imán de mueve hacia la derecha, el flujo adentro de la bobina de la derecha, que se dirige más o menos hacia la izquierda, aumenta. La corriente inducida en la bobina producirá un flujo hacia la derecha para cancelar este incremento de flujo. Al aplicar la regla de la mano derecha a la espira de la derecha se observa que la espira genera flujo hacia la derecha adentro de sí misma si la corriente fluye de D a C directamente a través del resistor. El voltaje en D es mayor que en C.

b) En este caso, el cambio de flujo causado por el movimiento del imán hacia la izquierda se opone al que se encontró en el inciso *a*). Si se aplica el mismo tipo de razonamiento, se encuentra que las corrientes inducidas fluyen a través de los resistores directamente de *A* a *B* y de *C* a *D*. El voltaje en *A* es mayor que en *B* y es mayor en *C* que en *D*.

32.7 [III] En la figura 32-4*a* hay un campo magnético uniforme en la dirección $+x$, con $B = 0.20$ T. La espira circular de alambre está en el plano *yz*. La espira tiene un área de 5.0 cm² y gira alrededor de la línea *CD* como eje. El punto *A* gira hacia valores positivos de *x* desde la posición mostrada. Si, como se muestra en la figura 32-4*b*, la espira gira 50º desde la posición indicada, en un tiempo de 0.20 s, *a*) ¿cuál es el cambio en el flujo a través de la bobina?, *b*) ¿cuál es la fem inducida promedio? y *c*) ¿la corriente inducida fluirá directamente de *A* a *C* o de *C* a *A* en la parte superior de la bobina?

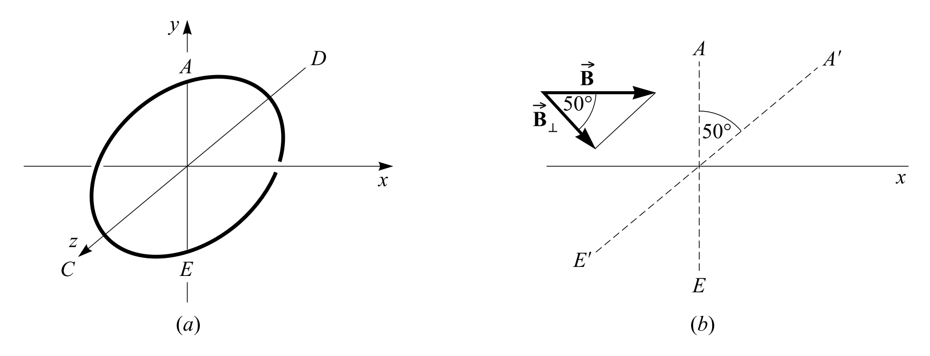


Figura 32-4

a) $$\text{Flujo inicial} = B_{\perp}A = BA = (0.20\text{ T})(5.0 \times 10^{-4}\text{ m}^2) = 1.0 \times 10^{-4}\text{ Wb}$$
$$\text{Flujo final} = (B\cos 50^{\circ})A = (1.0 \times 10^{-4}\text{ Wb})(\cos 50^{\circ}) = 0.64 \times 10^{-4}\text{ Wb}$$
$$\Delta\Phi_M = 0.64 \times 10^{-4}\text{ Wb} - 1.0 \times 10^{-4}\text{ Wb} = -0.36 \times 10^{-4}\text{ Wb} = -36\mu\text{Wb}$$

b) $$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (1)\left(\frac{0.36 \times 10^{-4}\text{ Wb}}{0.20\text{ s}}\right) = 1.8 \times 10^{-4}\text{ V} = 0.18\text{ mV}$$

c) El flujo a través de la espira de izquierda a derecha disminuye. La corriente inducida tenderá a establecer un flujo de izquierda a derecha a través de la espira. Por la regla de la mano derecha, la corriente fluye directamente de *A* a *C*. Dicho de otra manera, se debe establecer una torca que tienda a rotar la espira de vuelta a su posición original. La regla de la mano derecha del capítulo 30 de nuevo indica que la corriente fluye directamente de *A* a *C*.

32.8 [I] Una bobina de 50 vueltas de alambre se remueve en 0.020 s de entre los polos de un imán, donde su área intercepta un flujo de 3.1×10^{-4} Wb, hasta un lugar donde el flujo interceptado es de 0.10×10^{-4} Wb. Determine la fem promedio inducida en la bobina.

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = 50\,\frac{(3.1 - 0.10) \times 10^{-4}\text{ Wb}}{0.020\text{ s}} = 0.75\text{ V}$$

32.9 [I] Una barra de cobre de 30 cm de longitud está perpendicular a un campo magnético uniforme de 0.80 Wb/m² y se mueve en ángulo recto respecto al campo con una rapidez de 0.50 m/s. Determine la fem inducida en la barra.

$$|\mathscr{E}| = BLv = (0.80\text{ Wb/m}^2)(0.30\text{ m})(0.50\text{ m/s}) = 0.12\text{ V}$$

32.10 [II] Como se muestra en la figura 32-5, una barra metálica hace contacto con dos alambres paralelos y completa el circuito. El circuito es perpendicular a un campo magnético con $B = 0.15$ T. Si la resistencia es de 3.0 Ω, ¿cuál es la magnitud de la fuerza necesaria para mover la barra a la derecha con una rapidez constante de 2.0 m/s? ¿Con qué rapidez se disipa la energía en el resistor?

Conforme el alambre se mueve, el flujo descendente a través de la espira se incrementa. De acuerdo con esto, la fem inducida en la barra origina una corriente en el circuito que fluye en sentido contrario a las manecillas del reloj para producir en la espira un campo $\vec{\mathbf{B}}$ inducido hacia arriba que se opone al incremento de flujo hacia abajo. Debido a esta corriente en la barra, experimenta una fuerza hacia la izquierda debida al campo magnético. Para jalar la barra hacia la derecha con una rapidez constante, dicha fuerza debe estar balanceada.

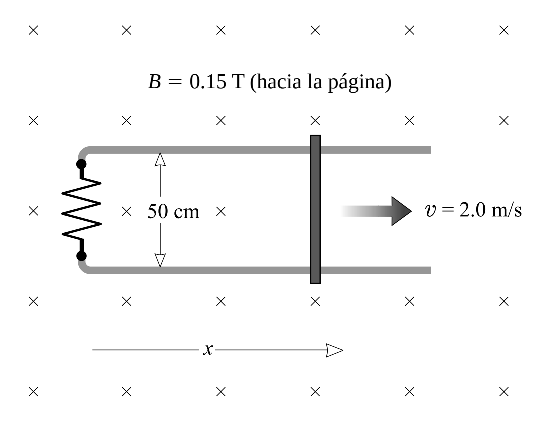


Figura 32-5

Método 1

La fem inducida en la barra es

$$|\mathscr{E}| = BLv = (0.15\text{ T})(0.50\text{ m})(2.0\text{ m/s}) = 0.15\text{ V}$$

y
$$I = \frac{|\mathscr{E}|}{R} = \frac{0.15\text{ V}}{3.0\ \Omega} = 0.050\text{ A}$$

de donde
$$F_M = ILB \text{ sen } 90° = (0.050\text{ A})(0.50\text{ m})(0.15\text{ T})(1) = 3.8\text{ mN}$$

Método 2

La fem inducida en la espira es

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (1)\frac{B\,\Delta A}{\Delta t} = \frac{B(L\,\Delta x)}{\Delta t} = BLv$$

como antes. Ahora se procede como en el método 1.

Para calcular la potencia perdida en el resistor se puede utilizar

$$\text{P} = I^2R = (0.050\text{ A})^2(3.0\ \Omega) = 7.5\text{ mW}$$

Alternativamente,
$$\text{P} = Fv = (3.75 \times 10^{-3}\text{ N})(2.0\text{ m/s}) = 7.5\text{ mW}$$

32.11 [III] La barra metálica de longitud L, masa m y resistencia R que se muestra en la figura 32-6*a* se desliza sin fricción sobre un circuito rectangular compuesto de un alambre sin resistencia que descansa sobre un plano inclinado. Ahí existe un campo magnético uniforme vertical $\vec{\mathbf{B}}$. Encuentre la rapidez terminal de la barra (esto es, la rapidez constante que alcanza).

La gravedad jala a la barra por el plano inclinado como se muestra en la figura 32-6*b*. La corriente inducida que fluye en la barra interactúa con el campo de modo que retarda su movimiento.

Debido al movimiento de la barra en el campo magnético, se induce una fem en la barra:

$$\mathscr{E} = (Blv)_\perp = BL(v\cos\theta)$$

Esto provoca una corriente

$$I = \frac{\text{fem}}{R} = \left(\frac{BLv}{R}\right)\cos\theta$$

en la espira. Un alambre que conduzca una corriente eléctrica en un campo magnético experimenta una fuerza perpendicular al plano definido por el alambre y las líneas del campo magnético. En consecuencia, la barra experimenta una fuerza horizontal $\vec{\mathbf{F}}_h$ (perpendicular al plano de $\vec{\mathbf{B}}$ y a la barra) dada por

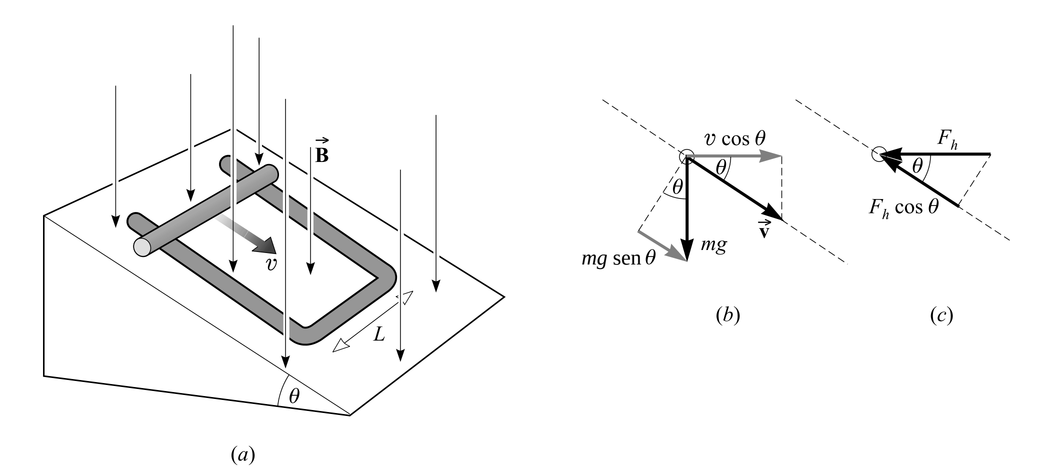


Figura 32-6

$$F_h = BIL = \left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos\,\theta$$

y que se muestra en la figura 32-6*c*. Sin embargo, se necesita la componente de la fuerza a lo largo del plano, que es

$$F_{\text{hacia arriba del plano}} = F_h \cos\theta = \left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos^2\theta$$

Cuando la barra alcanza su velocidad terminal, esta fuerza es igual a la fuerza gravitacional hacia abajo del plano. Es decir,

$$\left(\frac{B^2L^2v}{R}\right)\cos^2\theta \;= mg\,\text{sen}\,\theta$$

de donde la rapidez terminal es

$$v = \left(\frac{Rmg}{B^2L^2}\right)\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta}\right)$$

¿Podría demostrar que esta respuesta es razonable en los casos límite $\theta = 0$, $B = 0$ y $\theta = 90º$, y para R muy grandes o muy pequeñas?

32.12 [III] La barra que se muestra en la figura 32-7 rota alrededor del punto *C*, que funge como pivote, con una frecuencia constante de 5.0 rev/s. Encuentre la diferencia de potencial entre sus dos extremos, que están separados 80 cm, debida al campo magnético $B = 0.30$ T dirigido hacia adentro de la página.

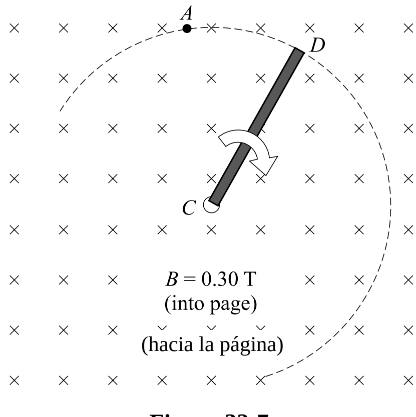


Figura 32-7

Considere una espira imaginaria *CADC*. Conforme pasa el tiempo, su área y el flujo a través de ella se incrementarán. La fem inducida en esta espira igualará la diferencia de potencial que se busca.

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = (1)\left(\frac{B\,\Delta A}{\Delta t}\right)$$

Toma un quinto de segundo para que el área cambie de cero a la de un círculo completo, πr^2. Por tanto,

$$|\mathscr{E}| = B\frac{\Delta A}{\Delta t} = B\frac{\pi r^2}{0.20\ \text{s}} = (0.30\ \text{T})\frac{\pi(0.80\ \text{m})^2}{0.20\ \text{s}} = 3.0\ \text{V}$$

32.13 [III] Una bobina de 5.0 Ω de 100 vueltas y 6.0 cm de diámetro se coloca entre los polos de un imán de tal forma que el flujo magnético es máximo a través del área seccional transversal de la bobina. Cuando la bobina se remueve súbitamente del campo del imán, una carga de 1.0×10^{-4} C fluye a través de un galvanómetro de 595 Ω conectado a la bobina. Calcule B entre los polos del imán.

Conforme se remueve la bobina, el flujo cambia de BA, donde A es el área seccional transversal de la bobina, hasta cero. Por tanto,

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = N\frac{BA}{\Delta t}$$

Se tiene que $\Delta q = 1.0 \times 10^{-4}$ C. Pero, por la ley de Ohm,

$$|\mathscr{E}| = IR = \frac{\Delta q}{\Delta t}R$$

donde $R = 600\ \Omega$ es la resistencia total. Si ahora se igualan estas dos expresiones para $\mathscr{E}$ y se resuelve para B, se encuentra

$$B = \frac{R\,\Delta q}{NA} = \frac{(600\ \Omega)(1.0 \times 10^{-4}\ \text{C})}{(100)(\pi \times 9.0 \times 10^{-4}\ \text{m}^2)} = 0.21\ \text{T}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

32.14 [II] Un flujo de 9.0×10^{-4} Wb se produce en el núcleo de hierro de un solenoide. Cuando el núcleo se quita, la misma corriente produce en el mismo solenoide un flujo (en aire) de 5.0×10^{-7} Wb. ¿Cuál es la permeabilidad relativa del hierro? **Resp.** 1.8×10^3.

32.15 [I] En la figura 32-8 existe un campo magnético uniforme de 0.2 T, en la dirección $+x$, que llena el espacio. Encuentre el flujo magnético a través de cada cara de la caja que se muestra. **Resp.** Cero a través del fondo y los lados anterior y posterior; por la cara superior, 1 mWb; a través del lado izquierdo, 2 mWb; y por el lado derecho, 0.8 mWb.

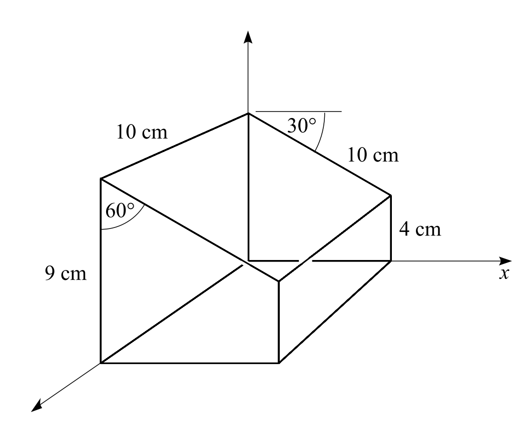


Figura 32-8

32.16 [II] Un solenoide de 60 cm de longitud tiene 5 000 vueltas de alambre y está enrollado en una barra de hierro de 0.75 cm de radio. Encuentre el flujo a través del solenoide cuando la corriente a través del alambre es de 3.0 A. La permeabilidad relativa del hierro es de 300. **Resp.** 1.7 mWb.

32.17 [II] Una habitación tiene las paredes exactamente alineadas respecto al norte, sur, este y oeste. La pared norte tiene un área de 15 m², la pared este tiene un área de 12 m² y el área del piso es de 35 m². La habitación está situada en un lugar de la Tierra donde el campo magnético tiene un valor de 0.60 G y se dirige 50º bajo la horizontal y 7.0° al noreste. Determine el flujo magnético a través de la pared norte, de la pared este y del piso. **Resp.** 0.57 mWb, 56 μWb, 1.6 mWb.

32.18 [I] El flujo a través del solenoide del problema 32.16 se reduce a un valor de 1.0 mWb en un tiempo de 0.050 s. Determine la fem inducida en el solenoide. **Resp.** 67 V.

32.19 [II] Una bobina plana con radio de 8.0 mm tiene 50 vueltas de alambre. Se coloca en un campo magnético $B = 0.30$ T, de tal manera que a través de ella pase el flujo máximo. Más tarde, en 0.020 s se hace girar hasta una posición tal que no hay flujo a través de ella. Encuentre la fem promedio inducida entre las terminales de la bobina. **Resp.** 0.15 V.

32.20 [II] La bobina cuadrada que se muestra en la figura 32-9 tiene 20 cm por lado y 15 vueltas de alambre. Se mueve hacia la derecha a 3.0 m/s. Determine la fem inducida (magnitud y dirección) en ella *a*) en el instante mostrado y *b*) cuando toda la bobina está en la región del campo. El campo magnético uniforme es de 0.40 T hacia la página. **Resp.** *a*) 3.6 V en sentido contrario a las manecillas del reloj; *b*) cero.

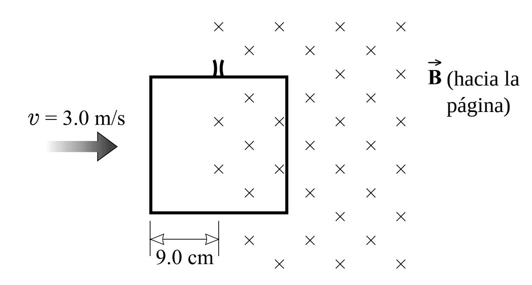


Figura 32-9

32.21 [I] El imán cilíndrico en el centro de la figura 32-10 gira como se muestra sobre un pivote que pasa por su centro. En el instante que se muestra, ¿en qué dirección fluye la corriente inducida? *a*) ¿en el resistor *AB*? y *b*) ¿en el resistor *CD*? **Resp.** *a*) directamente de *B* a *A*; *b*) directamente de *C* a *D*.

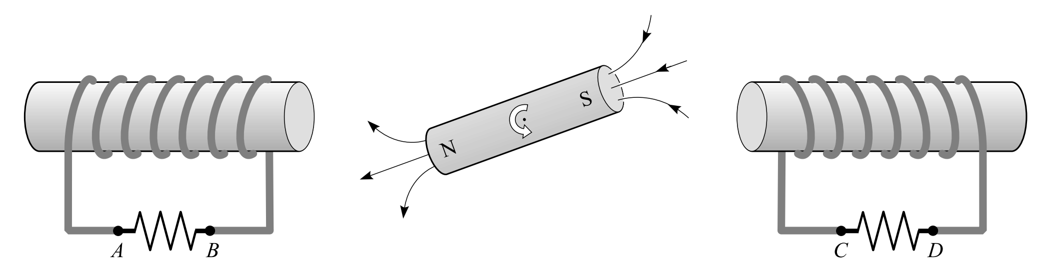


Figura 32-10

32.22 [II] Un tren se mueve directamente hacia el sur con una rapidez constante de 10 m/s. Si la componente vertical hacia abajo del campo magnético de la Tierra es de 0.54 G, calcule la magnitud y la dirección de la fem inducida en el eje de 1.2 m de largo de un vagón. **Resp.** 0.65 mV de oeste a este.

32.23 [III] Un disco de cobre de 10 cm de radio rota a 20 rev/s alrededor de su eje de simetría central. El plano del disco es perpendicular a un campo magnético uniforme $B = 0.60$ T. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre el centro y el perímetro del disco? (*Sugerencia*: Hay cierta similitud con el problema 32.12.) **Resp.** 0.38 V.

32.24 [II] ¿Cuánta carga fluirá a través de un galvanómetro de 200 Ω conectado a una bobina circular de 400 Ω y 1 000 vueltas enredadas en un palo de madera de 2.0 cm de diámetro, si un campo magnético $B = 0.0113$ T paralelo al eje del palo disminuye súbitamente hasta cero? **Resp.** 5.9 μC.

32.25 [III] En la figura 32-6, descrita en el problema 32.11, ¿cuál es la aceleración de la barra cuando su rapidez de bajada en el plano inclinado es v? **Resp.** $g \operatorname{sen} \theta - (B^2L^2v/Rm) \cos^2 \theta$.

GENERADORES Y MOTORES ELÉCTRICOS 33

LOS GENERADORES ELÉCTRICOS son máquinas que convierten la energía mecánica en energía eléctrica. En la figura 33-1*a* se muestra un generador simple que produce un voltaje de ca. Una fuente de energía externa (como un motor diesel o una turbina de vapor) hace girar la bobina de la armadura dentro de un campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. Los alambres de la bobina cortan las líneas de campo e inducen una fem

$$\mathscr{E} = 2\pi NABf \cos 2\pi ft$$

entre las terminales de la bobina. En esta relación, N es el número de espiras (cada una con área A) en la bobina y f es la frecuencia con la que gira. La figura 33-1*b* muestra la gráfica de una fem.

A medida que el generador induce una corriente, los alambres de la bobina experimentan una fuerza retardadora debido a la interacción entre la corriente y el campo. En consecuencia, el trabajo que se requiere para hacer girar la bobina es la fuente de energía eléctrica que suministra el generador. Para cualquier generador

$$(\text{energía mecánica de entrada}) = (\text{energía eléctrica de salida}) + (\text{pérdidas por fricción y calentamiento})$$

Generalmente las pérdidas sólo son una fracción muy pequeña de la energía de entrada.

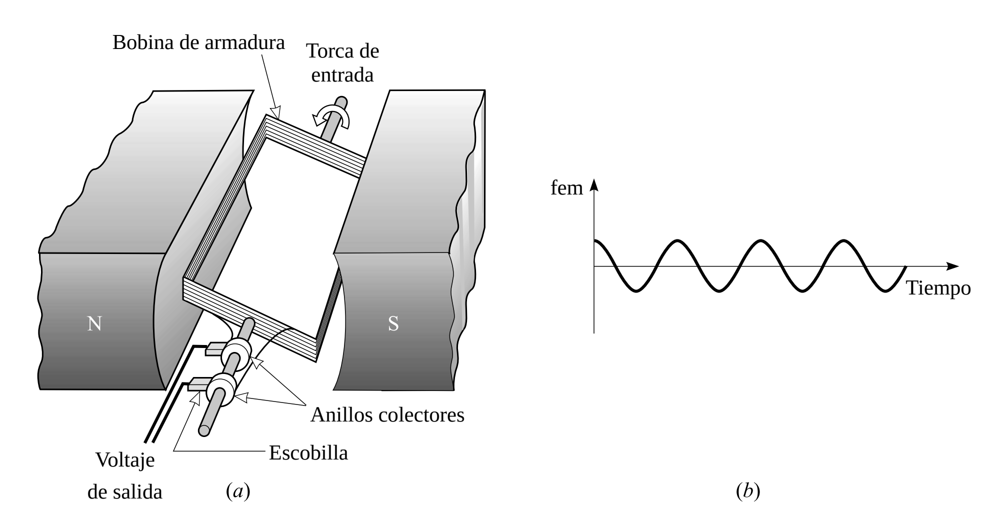


Figura 33-1

LOS MOTORES ELÉCTRICOS convierten la energía eléctrica en energía mecánica. En la figura 33-2 se muestra un motor simple de cd (esto es, uno que trabaja a voltaje constante). La corriente que pasa por la bobina de la armadura interactúa con el campo magnético y produce una torca

$$\tau = NIAB \text{ sen } \theta$$

sobre la bobina (vea el capítulo 30), la cual hace girar la bobina y la flecha. Aquí θ es el ángulo entre las líneas de campo y la normal al plano de la bobina. Los anillos colectores invierten I cada vez que sen θ cambia de signo, asegurando que la torca haga girar a la bobina siempre en el mismo sentido. Para estos motores,

$$\text{Torca promedio} = (\text{constante}) |NIAB|$$

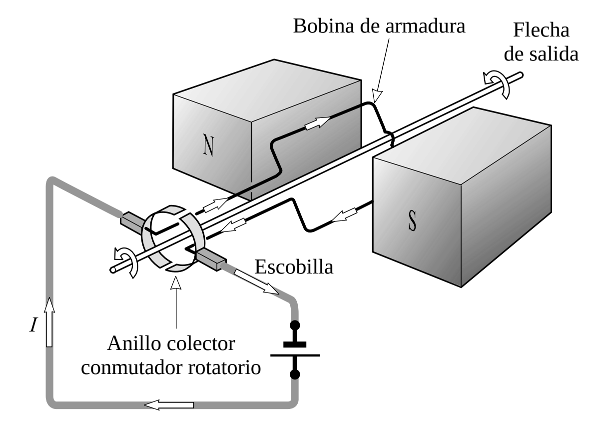


Figura 33-2

Ya que la bobina de armadura del motor al girar actúa como un generador, se induce en la bobina una **fuerza contraelectromotriz** (u **opuesta**, también llamada fuerza contrafem). La contrafem se opone al voltaje de la fuente que impulsa al motor. Entonces, la diferencia de potencial neta que genera una corriente a través de la armadura es

$$\text{d.p. neta a través de la armadura} = (\text{voltaje de la línea}) - (\text{contrafem})$$

y

$$\text{Corriente en la armadura} = \frac{(\text{voltaje de la línea}) - (\text{contrafem})}{\text{resistencia de la armadura}}$$

La potencia mecánica P producida dentro de la armadura de un motor es

$$\text{P} = (\text{corriente en la armadura})(\text{contrafem})$$

La potencia mecánica útil cedida por el motor es ligeramente menor, debido a la fricción, la resistencia aerodinámica y el desgaste del hierro.

PROBLEMAS RESUELTOS

GENERADORES ELÉCTRICOS

33.1 [I] Un generador de ca produce un voltaje de salida $\mathscr{E} = 170$ sen $377t$ volts, donde t está en segundos. ¿Cuál es la frecuencia del voltaje de ca?

La gráfica de una curva seno como función del tiempo no es diferente de una curva coseno, excepto por la posición de $t = 0$. Como $\mathscr{E} = 2\pi NABf \cos 2\pi ft$, se tiene que $377t = 2\pi ft$, de donde se encuentra que la frecuencia es $f = 60$ Hz.

33.2 [II] ¿Qué tan rápido debe girar una bobina de 1 000 espiras (cada una de 20 cm^2 de área) en el campo magnético de la Tierra (0.70 G) para generar un voltaje que tenga un valor máximo (esto es, una amplitud) de 0.50 V?

Suponga que el eje de la bobina está orientado en el campo de tal forma que da variaciones de flujo máximos cuando gira. Entonces $B = 7.0 \times 10^{-5}$ T en la siguiente expresión

$$\mathscr{E} = 2\pi NABf \cos 2\pi ft$$

Como el valor máximo de cos $2\pi ft$ es la unidad, la amplitud del voltaje es $2\pi NABf$. Por consiguiente,

$$f = \frac{0.50 \text{ V}}{2\pi NAB} = \frac{0.50 \text{ V}}{(2\pi)(1\,000)(20 \times 10^{-4} \text{ m}^2)(7.0 \times 10^{-5} \text{ T})} = 0.57 \text{ kHz}$$

33.3 [I] Cuando gira a 1 500 rev/min, un generador produce 100.0 V. ¿Cuál debe ser su frecuencia en rev/min si tiene que producir 120 V?

Como la amplitud de la fem es proporcional a la frecuencia, se tiene, para dos frecuencia f_1 y f_2,

$$\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{f_1}{f_2} \qquad \text{o bien} \qquad f_2 = f_1 \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = (1\,500 \text{ rev/min})\left(\frac{120.0 \text{ V}}{100.0 \text{ V}}\right) = 1\,800 \text{ rev/min}$$

33.4 [II] Un generador tiene una resistencia de 0.080 Ω en la armadura y desarrolla una fem inducida de 120 V cuando se impulsa a su rapidez nominal. ¿Cuál es el voltaje entre las terminales cuando la corriente inducida es de 50.0 A?

El generador actúa como una batería con una fem = 120 V y una resistencia interna $r = 0.080$ Ω. Como en una batería,

$$\text{d.p. en las terminales} = (\text{fem}) - Ir = 120 \text{ V} - (50.0 \text{ A})(0.080 \ \Omega) = 116 \text{ V}$$

33.5 [III] Algunos generadores, llamados *generadores en derivación*, utilizan electroimanes en lugar de imanes permanentes, donde el campo de las bobinas del electroimán está activado por un voltaje inducido. La bobina del imán se encuentra en paralelo con la bobina de la armadura (deriva la armadura). Como se muestra en la figura 33-3, cierto generador en derivación tiene una resistencia de armadura de 0.060 Ω y una resistencia en derivación de 100 Ω. ¿Qué potencia se desarrolla en la armadura cuando a un circuito externo entrega 40 kW a 250 V?

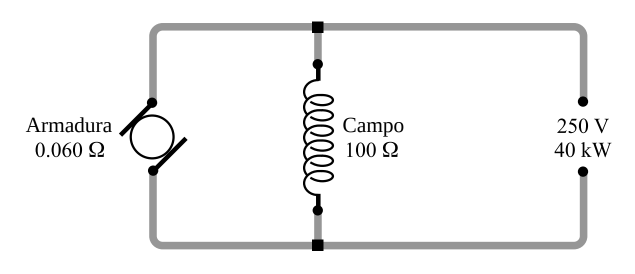


Figura 33-3

De P = VI,

$$\text{Corriente al circuito externo} = I_x = \frac{P}{V} = \frac{40\,000 \text{ W}}{250 \text{ V}} = 160 \text{ A}$$

$$\text{Corriente de campo} = I_f = \frac{V_f}{r_f} = \frac{250 \text{ V}}{100\ \Omega} = 2.5 \text{ A}$$

$$\text{Corriente en la armadura} = I_a = I_x + I_f = 162.5 \text{ A}$$

$$\text{Fem total inducida} = |\mathscr{E}| = (250 \text{ V} + I_a r_a \text{ caída en la armadura})$$

$$= 250 \text{ V} + (162.5 \text{ A})(0.06\ \Omega) = 260 \text{ V}$$

$$\text{Potencia en la armadura} = I_a|\mathscr{E}| = (162.5 \text{ A})(260 \text{ V}) = 42 \text{ kW}$$

Método alterno

$$\text{Pérdida de potencia en la armadura} = I_a^2 r_a = (162.5 \text{ A})^2(0.06\ \Omega) = 1.6 \text{ kW}$$

$$\text{Pérdida de potencia en el campo} = I_f^2 r_f = (2.5 \text{ A})^2(100\ \Omega) = 0.6 \text{ kW}$$

Potencia desarrollada = (potencia entregada) + (pérdida de potencia en la armadura) + (pérdida de potencia en el campo)

= 40 kW + 1.6 kW + 0.6 kW = 42 kW

MOTORES ELÉCTRICOS

33.6 [II] La resistencia de la armadura del motor que se muestra en la figura 33-2 es de 2.30 Ω. Éste consume una corriente de 1.60 A cuando opera a 120 V. ¿Cuál es la contrafem bajo estas circunstancias?

El motor actúa como una contrafem conectada en serie con la caída de potencial IR a través de su resistencia interna. Por consiguiente,

$$\text{Voltaje de la línea} = \text{contrafem} + Ir$$

o

$$\text{Contrafem} = 120 \text{ V} - (1.60 \text{ A})(2.30\ \Omega) = 116 \text{ V}$$

33.7 [II] Un motor de 0.250 hp (como el de la figura 33-2) tiene una resistencia de 0.500 Ω. *a*) ¿Cuánta corriente consume con 110 V cuando su salida es de 0.250 hp? *b*) ¿Cuál es su contrafem?

a) Suponga que el motor tiene una eficiencia de 100% de modo que la potencia de entrada VI es igual a la potencia de salida (0.250 hp). Entonces

$$(110 \text{ V})(I) = (0.250 \text{ hp})(746 \text{ W/hp}) \qquad \text{o} \qquad I = 1.695 \text{ A}$$

b)
$$\text{Contrafem} = (\text{voltaje de la línea}) - Ir = 110 \text{ V} - (1.695 \text{ A})(0.500\ \Omega) = 109 \text{ V}$$

33.8 [III] En un *motor en derivación*, el imán permanente se sustituye con un electroimán activado con una bobina de campo que deriva la armadura. El motor en derivación que se ve en la figura 33-4 tiene una resistencia en la armadura de 0.050 Ω y se conecta a una línea de 120 V. *a*) ¿Cuál es la corriente en la armadura en el arranque, esto es, antes de que la armaduara desarrolle una contrafem? *b*) ¿Cuál será la resistencia R de arranque de un reóstato, conectado en serie con la armadura, que limitará la corriente de arranque a 60 A? *c*) Sin resistencia de arranque, ¿qué contrafem se genera cuando la corriente en la armadura es de 20

A? *d*) Si esta máquina operase como un generador, ¿cuál sería la fem inducida total desarrollada por la armadura cuando ésta entrega 20 A a 120 V al campo en derivación y al circuito externo?

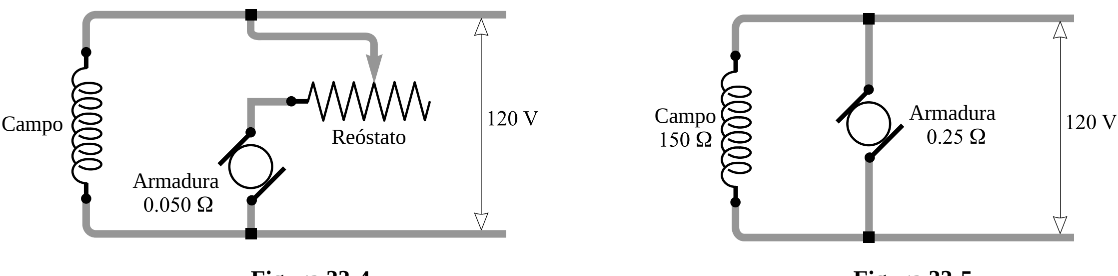


Figura 33-4 **Figura 33-5**

a) $$\text{Corriente en la armadura} = \frac{\text{voltaje aplicado}}{\text{resistencia de la armadura}} = \frac{120\ \text{V}}{0.050\ \Omega} = 2.4\ \text{kA}$$

b) $$\text{Corriente en la armadura} = \frac{\text{voltaje aplicado}}{0.050\ \text{Ý} + R} \quad \text{o} \quad 60\ \text{A} = \frac{120\ \text{V}}{0.050\ \Omega + R}$$

de donde $R = 2.0\ \Omega$.

c) $$\text{Contrafem} = (\text{voltaje aplicado}) - (\text{caída de voltaje en la resistencia de la armadura})$$
$$= 120\ \text{V} - (20\ \text{A})(0.050\ \Omega) = 119\ \text{V} = 0.12\ \text{kV}$$

d) $$\text{Fem inducida} = (\text{voltaje en las terminales}) + (\text{caída de voltaje en la resistencia de la armadura})$$
$$= 120\ \text{V} + (20\ \text{A})(0.050\ \Omega) = 121\ \text{V} = 0.12\ \text{kV}$$

33.9 [III] El motor en derivación que se muestra en la figura 33-5 tiene una resistencia en la armadura de 0.25 Ω y una resistencia de campo de 150 Ω. Se conecta a la línea principal de 120 V y genera una contrafem de 115 V. Calcule *a*) la corriente de la armadura I_a, la corriente de campo I_f y la corriente total I_t que consume el motor; *b*) la potencia total que consume el motor; *c*) la pérdida de potencia en forma de calor en la armadura y los circuitos de campo; *d*) la eficiencia eléctrica de la máquina (cuando sólo se consideran pérdidas por calor en la armadura y el campo).

a) $$I_a = \frac{(\text{voltaje aplicado}) - (\text{contrafem})}{\text{resistencia de la armadura}} = \frac{(120 - 115)}{0.25\ \Omega} = 20\ \text{A}$$
$$I_f = \frac{\text{voltaje aplicado}}{\text{resistencia del campo}} = \frac{120\ \text{V}}{150\ \Omega} = 0.80\ \text{A}$$
$$I_t = I_a + I_f = 20.80\ \text{A} = 21\ \text{A}$$

b) $$\text{Entrada de potencia} = (120\ \text{V})(20.80\ \text{A}) = 2.5\ \text{kW}$$

c) $$I_a^2 r_a\ \text{pérdida en la armadura} = (20\ \text{A})^2(0.25\ \Omega) = 0.10\ \text{kW}$$
$$I_f^2 r_f\ \text{pérdida en el campo} = (0.80\ \text{A})^2(150\ \Omega) = 96\ \text{W}$$

d) Salida de potencia = (entrada de potencia) − (pérdidas de potencia) = 2 496 − (100 + 96) = 2.3 kW

Alternativamente:

$$\text{Salida de potencia} = (\text{corriente en la armadura})(\text{contrafem}) = (20\ \text{A})(115\ \text{V}) = 2.3\ \text{kW}$$

Entonces $$\text{Eficiencia} = \frac{\text{salida de potencia}}{\text{entrada de potencia}} = \frac{2300\ \text{W}}{2\,496\ \text{W}} = 0.921 = 92\%$$

33.10 [II] Un motor tiene una contrafem de 110 V y una corriente de armadura de 90 A cuando opera a 1 500 rpm. Determine la potencia y la torca desarrollados dentro de la armadura.

$$\text{Potencia} = (\text{corriente en la armadura})(\text{contrafem}) = (90\ \text{A})(110\ \text{V}) = 9.9\ \text{kW}$$

Del capítulo 10, potencia $= \tau\omega$, donde $\omega = 2\pi f = 2\pi(1\,500 \times 1/60)$ rad/s

$$\text{Torca} = \frac{\text{potencia}}{\text{rapidez angular}} = \frac{9900\ \text{W}}{(2\pi \times 25)\ \text{rad/s}} = 63\ \text{N}\cdot\text{m}$$

33.11 [III] La armadura de un motor origina una torca de 100 N · m cuando consume 40 A de la línea. Encuentre la torca desarrollada si la corriente de la armadura aumenta a 70 A y la intensidad del campo magnético se reduce a 80% de su valor inicial.

La torca desarrollada por la armadura de un motor es proporcional a la corriente en la armadura y a la intensidad del campo (vea el capítulo 30). En otras palabras, la razón de la torca es igual a la razón de los dos conjuntos de valores de $|IB|$. Al usar los subíndices *i* y *f* para los valores *inicial* y *final*, $\tau_f/\tau_i = I_f B_f / I_i B_i$, se obtiene,

$$\tau_f = (100\,\text{N}\cdot\text{m})\left(\frac{70}{40}\right)(0.80) = 0.14\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

GENERADORES ELÉCTRICOS

33.12 [I] Determine los efectos separados sobre la fem inducida de un generador si *a*) el flujo en cada polo se duplica y *b*) la rapidez de la armadura se duplica. **Resp.** *a*) se duplica; *b*) se duplica.

33.13 [II] La fem inducida en la armadura de un generador en derivación es de 596 V. La resistencia de la armadura es de 0.100 Ω. *a*) Calcule el voltaje en las terminales cuando la corriente en la armadura es de 460 A. *b*) Si la resistencia de campo equivale a 110 Ω, determine la corriente de campo, la potencia y la corriente entregada al circuito externo. **Resp.** *a*) 550 V; *b*) 5 A, 455 A, 250 kW.

33.14 [II] Una dínamo (generador) entrega 30.0 A a 120 V a un circuito externo cuando opera a 1 200 rpm. ¿Cuál es la torca que se requiere para impulsar al generador a esta rapidez si las pérdidas totales en la potencia son de 400 W? **Resp.** 31.8 N · m.

33.15 [II] Un generador en derivación de 75.0 kW y 230 V tiene una fem generada de 243.5 V. Si la corriente de campo es de 12.5 A a la salida nominal, ¿cuál es la resistencia de la armadura? **Resp.** 0.039 9 Ω.

33.16 [III] Un generador de 120 V es impulsado por un molino de viento que tiene aspas de 2.0 m de largo. El viento, que se mueve a 12 m/s, disminuye a 7.0 m/s después de pasar por el molino de viento. La densidad del aire es de 1.29 kg/m^3. Si el sistema no tiene pérdidas, ¿cuál es la corriente más grande que puede producir el generador? (*Sugerencia*: ¿Cuánta energía por segundo pierde el viento?) **Resp.** 77 A.

MOTORES ELÉCTRICOS

33.17 [II] Un generador tiene una armadura con 500 vueltas, que cortan un flujo de 8.00 mWb en cada rotación. Calcule la contrafem que desarrolla cuando trabaja como un motor a 1 500 rpm. **Resp.** 100 V.

33.18 [I] La longitud activa de cada conductor de la armadura de un motor es de 30 cm, y los conductores están en un campo de 0.40 Wb/m^2. En cada conductor fluye una corriente de 15 A. Determine la fuerza que actúa sobre cada conductor. **Resp.** 1.8 N.

33.19 [II] Un motor en derivación, con una resistencia en la armadura de 0.080 Ω, está conectado a la línea principal de 120 V. Con 50 A en la armadura, ¿cuáles son la contrafem y la potencia mecánica desarrolladas dentro de la armadura? **Resp.** 0.12 kV, 5.8 kW.

33.20 [II] Un motor en derivación se conecta a una línea de 110 V. Cuando la armadura genera una contrafem de 104 V, la corriente en la armadura es de 15 A. Calcule la resistencia de la armadura. **Resp.** 0.40 Ω.

33.21 [II] Una dínamo en derivación tiene una resistencia de armadura de 0.120 Ω. *a*) Si se conecta a una línea de 220 V y opera como un motor, ¿cuál es la contrafem inducida cuando la corriente en la armadura es de 50.0 A? *b*) Si esta máquina opera como un generador, ¿cuál es la fem inducida cuando la armadura entrega 50.0 A a 220 V al campo en derivación y al circuito externo? **Resp.** *a*) 214 V; *b*) 226 V.

33.22 [II] Un motor en derivación tiene una frecuencia de 900 rpm cuando se conecta a una línea de 120 V y entrega 12 hp. Las pérdidas totales son de 1 048 W. Calcule la entrada de potencia, la corriente de la línea y la torca en el motor. **Resp.** 10 kW, 83 A, 95 N · m.

33.23 [II] Un motor en derivación tiene una resistencia de armadura de 0.20 Ω y una resistencia de campo de 150 Ω; además consume 30 A cuando se conecta a una línea de alimentación de 120 V. Determine la corriente de campo, la corriente en la armadura, la contrafem, la potencia mecánica desarrollada dentro de la armadura y la eficiencia eléctrica de la máquina. **Resp.** 0.80 A, 29 A, 0.11 kV, 3.3 kW, 93%.

33.24 [II] Un motor en derivación desarrolla una torca de 80 N · m cuando la densidad de flujo en la abertura de aire es de 1.0 Wb/m^2 y la corriente en la armadura es de 15 A. ¿Cuál es la torca cuando la densidad de flujo es de 1.3 Wb/m^2 y la corriente en la armadura es de 18 A? **Resp.** 0.13 kN · m.

33.25 [II] Un motor en derivación tiene una resistencia de campo de 200 Ω y una resistencia de armadura de 0.50 Ω y está conectado a una línea de 120 V. El motor consume una corriente de 4.6 A cuando opera a su rapidez máxima. ¿Qué corriente consumirá el motor si su rapidez se reduce a 90% de la rapidez máxima al aplicarle una carga? **Resp.** 28 A.

INDUCTANCIA; CONSTANTES DE TIEMPO *R-C* Y *R-L*

34

AUTOINDUCTANCIA (L)**:** Una bobina puede inducir una fem en sí misma. Si la corriente en una bobina cambia, el flujo a través de ella debido a la corriente también se modifica. Así, como resultado del cambio de la corriente en la bobina se induce una fem en la misma bobina.

Ya que la fem inducida $\mathscr{E}$ es proporcional a $\Delta\Phi_M/\Delta t$ y puesto que $\Delta\Phi_M$ es proporcional a Δi, donde i es la corriente que produce el flujo,

$$\mathscr{E} = -\,(\text{constante})\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Donde i es la corriente a través de la misma bobina en la cual se induce $\mathscr{E}$. (Una corriente que varía en el tiempo se denotará con i, en lugar de I.) El signo negativo indica que la fem autoinducida $\mathscr{E}$ es una contrafem que se opone al cambio de la corriente.

La constante de proporcionalidad depende de la geometría de la bobina. Se representará por L y se denominará **autoinductancia** de la bobina. Entonces

$$\mathscr{E} = -L\frac{\Delta i}{\Delta t}$$

Para $\mathscr{E}$ en unidades de V, i en unidades A y t en s, L está en **henrys** (H).

INDUCTANCIA MUTUA (M)**:** Cuando el flujo de una bobina penetra a través de una segunda bobina, se puede inducir una fem en cada una por el efecto de la otra. La bobina que tiene la fuente de potencia se llama *bobina primaria.* La otra bobina, en la que se induce la fem debido al cambio de corriente en la primaria, se conoce como *bobina secundaria.* La fem $\mathscr{E}_s$ inducida en la secundaria es proporcional a la rapidez de cambio de la corriente en la primaria, $\Delta i_p/\Delta t$:

$$\mathscr{E}_s = M\frac{\Delta i_p}{\Delta t}$$

donde M es una constante llamada **inductancia mutua** del sistema de dos bobinas.

ENERGÍA ALMACENADA EN UN INDUCTOR: Debido a su contrafem autoinducida, se debe efectuar un trabajo para incrementar la corriente a través del inductor desde 0 hasta I. La energía suministrada a la bobina en el proceso se almacena en ella y se puede recuperar conforme la corriente de la bobina disminuye nuevamente a cero. Si una corriente I fluye en un inductor de autoinductancia L, entonces la energía almacenada en él es

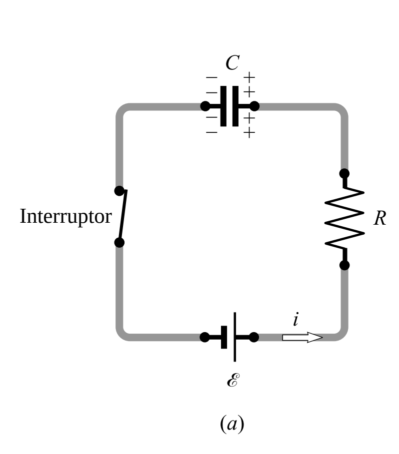
$$\text{Energía almacenada} = \tfrac{1}{2}LI^2$$

Para L en unidades de H e I en unidades de A, la energía está en J.

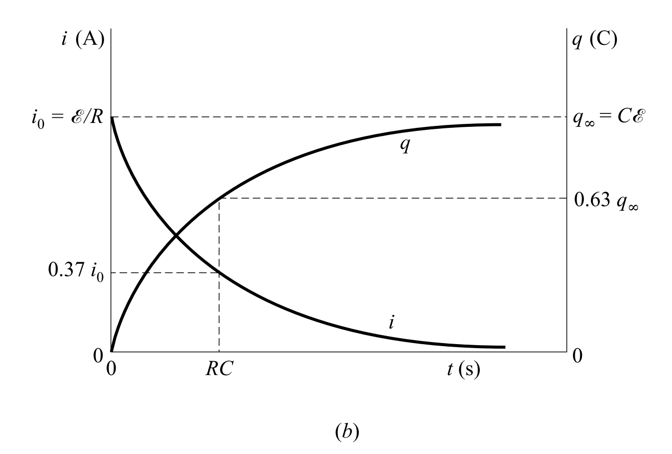
CONSTANTE DE TIEMPO R-C**:** Considere el circuito R-C que se ve en la figura 34-1*a*. El capacitor está descargado inicialmente. Si el interruptor se cierra, la corriente i en el circuito y la carga q en el capacitor varían como se muestra en la figura 34-1*b*. Si se llama v_c a la d.p. en el capacitor, al escribir la regla de la malla para este circuito se obtiene

$$-iR - v_c + \mathscr{E} = 0 \qquad \text{o} \qquad i = \frac{\mathscr{E} - v_c}{R}$$

En el primer instante después de que se cerró el interruptor, $v_c = 0$ e $i = \mathscr{E}/R$. Conforme pasa el tiempo, v_c aumenta mientras que i disminuye. El tiempo, en segundos, que toma a la corriente caer hasta $1/2.718$ o 0.368 de su valor inicial es RC, que se llama **constante de tiempo** del circuito R-C.



(*a*)



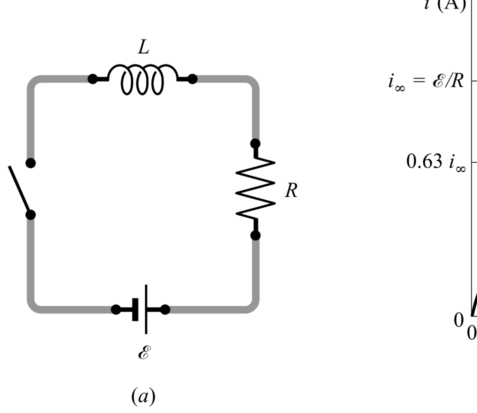
(*b*)

Figura 34-1

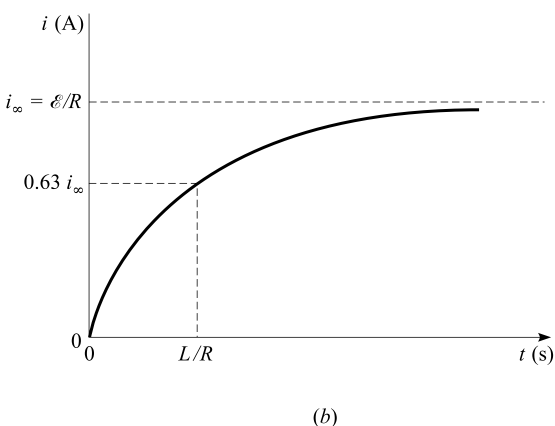
En la figura 34-1*b* también se muestra la variación con el tiempo de q, la carga en el capacitor. En $t = RC$, q alcanza 0.632 de su valor final.

Cuando un capacitor C cargado con una carga inicial q_0 se descarga a través de un resistor R, la corriente de descarga sigue la misma curva que la del proceso de carga. La carga q en el capacitor sigue una curva similar a la de la corriente de descarga. Al tiempo RC, $i = 0.368i_0$ y $q = 0.368q_0$ durante la descarga.

CONSTANTE DE TIEMPO ***R-L*****:** Considere el circuito de la figura 34-2*a*. El símbolo ⅏ representa una bobina que tiene una autoinductancia de L henrys. Cuando el interruptor en el circuito se cierra, la corriente se eleva como se muestra en la figura 34-2*b*. La corriente no salta a su valor final porque el cambio de flujo a través de la bobina induce una contrafem en la bobina, la cual se opone a la elevación de la corriente. Después de transcurridos L/R segundos, la corriente se ha elevado a 0.632 de su valor final i_∞. Esta vez $t = L/R$ se llama **constante de tiempo** del circuito *R-L*. Luego de un tiempo prolongado, la corriente cambia tan lentamente que la contrafem en el inductor, $L(\Delta i/\Delta t)$, es despreciable. Entonces $i = i_\infty = \mathscr{E}/R$.



(*a*)



(*b*)

Figura 34-2

LAS FUNCIONES EXPONENCIALES se utilizan del modo siguiente para describir las curvas de las figuras 34-1 y 34-2:

$i = i_0 e^{-t/RC}$	carga y descarga de capacitor
$q = q_\infty(1 - e^{-t/RC})$	carga de capacitor
$q = q_\infty e^{-t/RC}$	descarga de capacitor
$i = i_\infty(1 - e^{-t/(L/R)})$	acumulación de corriente en inductor

donde $e = 2.718$ es la base de los logaritmos naturales.

Cuando t es igual a la constante de tiempo, las relaciones para el capacitor dan $i = 0.368i_0$ y $q = 0.632q_\infty$ para la carga, y $q = 0.368q_\infty$ para la descarga. La ecuación para la corriente en el inductor da $i = 0.632i_\infty$ cuando t es igual a la constante de tiempo.

La ecuación para i en el circuito capacitor (así como para q en el caso de descarga del capacitor) tiene la siguiente propiedad: después de transcurridas n constantes de tiempo,

$$i = i_0(0.368)^n \qquad \text{y} \qquad q = q_\infty(0.368)^n$$

Por ejemplo, después de transcurridas cuatro constantes de tiempo,

$$i = i_0(0.368)^4 = 0.0183i_0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

34.1 [II] Una corriente constante de 2 A en una bobina de 400 vueltas causa un flujo de 10^{-4} Wb para enlazar (pasar a través de) las espiras de la bobina. Calcule *a*) la contrafem promedio inducida en la bobina si la corriente se interrumpe en 0.08 s, *b*) la inductancia de la bobina y *c*) la energía almacenada en la bobina.

a)
$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| = 400\,\frac{(10^{-4} - 0)\text{ Wb}}{0.08\text{ s}} = 0.5\text{ V}$$

b)
$$|\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right| \qquad \text{o} \qquad L = \left|\frac{\mathscr{E}\Delta t}{\Delta i}\right| = \frac{(0.5\text{ V})(0.08\text{ s})}{(2-0)\text{ A}} = 0.02\text{ H}$$

c)
$$\text{Energía} = \tfrac{1}{2}LI^2 = \tfrac{1}{2}(0.02\text{ H})(2\text{ A})^2 = 0.04\text{ J}$$

34.2 [III] Un solenoide largo con núcleo de aire tiene un área de sección transversal A y N vueltas de alambre en su longitud d. *a*) Encuentre su autoinductancia. *b*) ¿Cuál es su inductancia si la permeabilidad del material de su núcleo es μ?

a) Se puede escribir

$$|\mathscr{E}| = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| \qquad \text{y} \qquad |\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right|$$

Igualar estas dos expresiones para $\mathscr{E}$ produce

$$L = N\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta i}\right|$$

Si la corriente cambia de cero a I, entonces el flujo cambia de cero a Φ_M. Por tanto, $\Delta i = I$ y $\Delta\Phi_M = \Phi_M$ en este caso. La autoinductancia, considerada constante para todos los casos, es entonces

$$L = N\frac{\Phi_M}{I} = N\frac{BA}{I}$$

Pero, para un solenoide con núcleo de aire, $B = \mu_0 nI = \mu_0(N/d)I$. Al sustituir se obtiene $L = \mu_0 N^2A/d$.

b) Si el material del núcleo tiene permeabilidad μ en lugar de μ_0 entonces B, y por tanto L, aumentarán por un factor μ/μ_0. En este caso, $L = \mu N^2A/d$. Un solenoide con núcleo de hierro tiene una autoinductancia mucho mayor que la que tiene un solenoide con núcleo de aire.

34.3 [II] Un solenoide de 30 cm de longitud está fabricado con 2 000 vueltas de alambre devanadas en torno a una barra de hierro con un área en su sección transversal de 1.5 cm^2. Si la permeabilidad relativa del hierro es de 600, ¿cuál es la autoinductancia del solenoide? ¿Qué fem promedio se induce en el solenoide cuando la corriente en él disminuye de 0.60 A a 0.10 A en un tiempo de 0.030 s? Consulte nuevamente el problema 34.2.

Del problema 34.2*b*, con $k_M = \mu/\mu_0$,

$$L = \frac{k_m\mu_0 N^2 A}{d} = \frac{(600)(4\pi\times 10^{-7}\text{ T}\cdot\text{m/A})(2\,000)^2(1.5\times 10^{-4}\text{ m}^2)}{0.30\text{ m}} = 1.51\text{ H}$$

y $$|\mathscr{E}| = L\left|\frac{\Delta i}{\Delta t}\right| = (1.51\ \text{H})\frac{0.50\ \text{A}}{0.030\ \text{s}} = 25\ \text{V}$$

34.4 [II] En cierto instante, una bobina con una resistencia de 0.40 Ω y una autoinductancia de 200 mH porta una corriente de 0.30 A que aumenta a razón de 0.50 A/s. *a*) ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de la bobina en ese instante? *b*) Repita si la corriente disminuye a razón de 0.50 A/s.

Se puede representar la bobina mediante una resistencia en serie con una fem (la fem inducida), tal como se muestra en la figura 34-3.

a) Puesto que la corriente aumenta, $\mathscr{E}$ se opone a la corriente y por tanto tiene la polaridad mostrada. Es posible escribir la ecuación de la malla para el circuito:

$$V_{ba} - iR - \mathscr{E} = 0$$

Dado que V_{ba} es el voltaje a través de la bobina, y ya que $\mathscr{E} = L|\Delta i/\Delta t|$, se tiene

$$V_{\text{bobina}} = iR + \mathscr{E} = (0.30\text{A})(0.40\ \Omega) + (0.200\ \text{H})(0.50\ \text{A/s}) = 0.22\ \text{V}$$

b) Cuando i disminuye, la fem inducida debe invertirse en la figura 34-3. Esto da: $V_{\text{bobina}} = iR - \mathscr{E} = 0.020$ V.

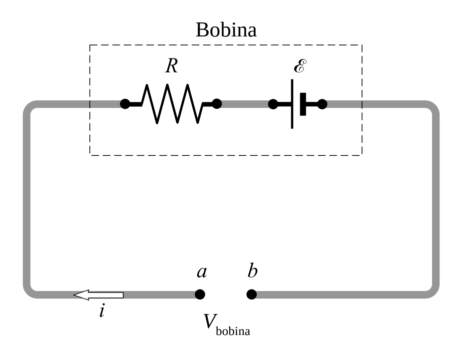


Figura 34-3

34.5 [II] Una bobina, de 15 Ω de resistencia y 0.60 H de inductancia, se conecta a una fuente estacionaria de 120 V. ¿A qué tasa se elevará la corriente en la bobina *a*) en el momento cuando la bobina se conecta a la fuente y *b*) en el instante cuando la corriente alcanza 80% de su valor máximo?

El voltaje motriz efectivo en el circuito son los 120 V de la fuente de alimentación menos la contrafem inducida, $L(\Delta i/\Delta t)$. Esto es igual a la d.p. en la resistencia de la bobina:

$$120\ \text{V} - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = iR$$

[Esta misma ecuación se puede obtener al escribir la ecuación de la malla para el circuito de la figura 34-2*a*. Cuando utilice este procedimiento, recuerde que la inductancia actúa como una contrafem de valor $L\ \Delta i/\Delta t$.]

a) En el primer instante, i es esencialmente cero. Entonces

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{120\ \text{V}}{L} = \frac{120\ \text{V}}{0.60\ \text{H}} = 0.20\ \text{mA/s}$$

b) La corriente alcanza su máximo valor de (120 V)/R cuando la corriente finalmente deja de cambiar (es decir, cuando $\Delta i/\Delta t = 0$). En este caso se tiene interés en el momento cuando

$$i = (0.80)\left(\frac{120\ \text{V}}{R}\right)$$

Al sustituir este valor para i en la ecuación de la malla se obtiene

$$120\ \text{V} - L\frac{\Delta i}{\Delta t} = (0.80)\left(\frac{120\ \text{V}}{R}\right)R$$

de donde $$\frac{\Delta i}{\Delta t} = \frac{(0.20)(120\ \text{V})}{L} = \frac{(0.20)(120\ \text{V})}{0.60\ \text{H}} = 40\ \text{A/s}$$

34.6 [II] Cuando la corriente en una bobina cambia a una tasa de 3.0 A/s, se encuentra que, en una bobina cercana, se induce una fem de 7.0 mV. ¿Cuál es la inductancia mutua de la combinación?

$$\mathscr{E}_s = M\frac{\Delta i_p}{\Delta t} \qquad \text{o} \qquad M = \mathscr{E}_s\frac{\Delta t}{\Delta i_p} = (7.0 \times 10^{-3}\ \text{V})\frac{1.0\ \text{s}}{3.0\ \text{A}} = 2.3\ \text{mH}$$

34.7 [II] Dos bobinas están devanadas sobre la misma barra de hierro, así que el flujo generado por una pasa también por la otra. La bobina primaria tiene N_p vueltas y, cuando a través de ella fluye una corriente de 2.0 A, el flujo

es de 2.5×10^{-4} Wb. Determine la inductancia mutua de las dos bobinas si la bobina secundaria tiene N_s vueltas.

$$|\mathscr{E}_s| = N_s\left|\frac{\Delta\Phi_{Ms}}{\Delta t}\right| \qquad \text{y} \qquad |\mathscr{E}_s| = M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

se obtiene $$M = N_s\left|\frac{\Delta\Phi_{Ms}}{\Delta i_p}\right| = N_s\frac{(2.5 \times 10^{-4} - 0)\ \text{Wb}}{(2.0 - 0)\ \text{A}} = (1.3 \times 10^{-4}\ N_s)\ \text{H}$$

34.8 [II] Un solenoide de 2 000 vueltas está devanado uniformemente en una barra de hierro con longitud d y sección transversal A. La permeabilidad relativa del hierro es k_m. En la parte superior de éste está enrollada una bobina de 50 vueltas que se utiliza como secundaria. Encuentre la inductancia mutua del sistema.

El flujo a través del solenoide es

$$\Phi_M = BA = (k_M\mu_0 nI_p)A = (k_M\mu_0 I_p A)\left(\frac{2\ 000}{d}\right)$$

Este mismo flujo va a través de la secundaria. De este modo,

$$|\mathscr{E}_s| = N_s\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta t}\right| \qquad \text{y} \qquad |\mathscr{E}_s| = M\left|\frac{\Delta i_p}{\Delta t}\right|$$

de donde

$$M = N_s\left|\frac{\Delta\Phi_M}{\Delta i_p}\right| = N_s\frac{\Phi_M - 0}{I_p - 0} = 50\frac{k_M\mu_0 I_p A(2\ 000/d)}{I_p} = \frac{10 \times 10^4\ k_M\mu_0 A}{d}$$

34.9 [II] Cierto circuito en serie consta de una batería de 12 V, un interruptor, un resistor de 1.0 MΩ y un capacitor de 2.0 μF, inicialmente descargado. Si el interruptor se cierra, determine *a*) la corriente inicial en el circuito, *b*) el tiempo para que la corriente caiga hasta 0.37 de su valor inicial, *c*) la carga en el capacitor en ese instante y *d*) la carga final del capacitor.

a) Al aplicar la regla de la malla al circuito de la figura 34-1*a* para cualquier instante se tiene

$$12\ \text{V} - iR - v_c = 0$$

donde v_c es la d.p. a través del capacitor. En el primer instante, q es esencialmente cero y de este modo $v_c = 0$. Entonces

$$12\ \text{V} - iR - 0 = 0 \qquad \text{o} \qquad i = \frac{12\ \text{V}}{1.0 \times 10^6\ \Omega} = 12\ \mu\text{A}$$

b) La corriente cae hasta 0.37 de su valor inicial cuando

$$t = RC = (1.0 \times 10^6\ \Omega)(2.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 2.0\ \text{s}$$

c) En $t = 2.0$ s la carga en el capacitor aumentó a 0.63 de su valor final. [Vea la parte *d*) abajo.]

d) La carga deja de aumentar cuando $i = 0$ y $v_c = 12$ V. Por tanto,

$$q_{\text{final}} = Cv_c = (2.0 \times 10^{-6}\ \text{F})(12\ \text{V}) = 24\ \mu\text{C}$$

34.10 [II] Un capacitor de 5.0 μF se carga a una diferencia de potencial de 20 kV a través de sus placas. Después de desconectarse de la fuente, se conecta a través de un resistor de 7.0 MΩ para descargarlo. ¿Cuál es la corriente de descarga inicial y cuánto tiempo tardará el voltaje del capacitor en disminuir a 37% de los 20 kV?

La ecuación de la malla para la descarga de un capacitor es

$$v_c - iR = 0$$

donde v_c es la d.p. a través del capacitor. En el primer instante, $v_c = 20$ kV, así que

$$i = \frac{v_c}{R} = \frac{20 \times 10^3\ \text{V}}{7.0 \times 10^6\Omega} = 2.9\ \text{mA}$$

El potencial a través del capacitor, así como la carga sobre él, se reducirán a 0.37 de su valor inicial en una constante de tiempo. El tiempo requerido es

$$RC = (7.0 \times 10^6\ \Omega)(5.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 35\ \text{s}$$

34.11 [II] Una bobina tiene una inductancia de 1.5 H y una resistencia de 0.60 Ω. Si la bobina se conecta repentinamente a una batería de 12 V, encuentre el tiempo requerido para que la corriente se eleve hasta 0.63 de su valor final. ¿Cuál será la corriente final a través de la bobina?

El tiempo requerido es la constante de tiempo del circuito:

$$\text{Constante de tiempo} = \frac{L}{R} = \frac{1.5\ \text{H}}{0.60\ \Omega} = 2.5\ \text{s}$$

Después de un tiempo muy grande, la corriente será constante, así que no existirá contrafem en la bobina. En estas condiciones,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{12\ \text{V}}{0.60\ \Omega} = 20\ \text{A}$$

34.12 [I] Un capacitor que ha sido cargado a 2.0×10^5 V se descarga a través de un resistor. ¿Cuál será el voltaje a través del capacitor después de transcurridas cinco constantes de tiempo?

Se sabe que después de n constantes de tiempo, $q = q_\infty(0.368)^n$. Ya que v es proporcional a q (es decir, $v = q/C$), se puede escribir

$$v_{n=5} = (2.0 \times 10^5\ \text{V})(0.368)^5 = 1.4\ \text{kV}$$

34.13 [II] Un capacitor de 2.0 μF se carga a través de un resistor de 30 MΩ por una batería de 45 V. Encuentre *a*) la carga en el capacitor y *b*) la corriente a través del resistor, ambos después de 83 s de haber iniciado el proceso de carga.

La constante de tiempo del circuito es $RC = 60$ s. Por otro lado,

$$q_\infty = V_\infty C = (45\ \text{V})(2.0 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 9.0 \times 10^{-5}\ \text{C}$$

a)
$$q = q_\infty(1 - e^{-t/RC}) = (9.0 \times 10^{-5}\ \text{C})(1 - e^{-83/60})$$

Pero
$$e^{-83/60} = e^{-1.383} = 0.25$$

Entonces, al sustituir, se obtiene

$$q = (9.0 \times 10^{-5}\ \text{C})(1 - 0.25) = 67\ \mu\text{C}$$

b)
$$i = i_0 e^{-t/RC} = \left(\frac{45\ \text{V}}{30 \times 10^6\ \Omega}\right)(e^{-1.383}) = 0.38\ \mu\text{A}$$

34.14 [II] Si en la figura 34-2 $R = 20\ \Omega$, $L = 0.30$ H y $\mathscr{E} = 90$ V, ¿cuál será la corriente en el circuito después de 0.050 s de haber cerrado el interruptor?

Se usa la ecuación exponencial para i de la página 287.
La constante de tiempo para este circuito es $L/R = 0.015$ s, e $i_\infty = \mathscr{E}/R = 4.5$ A. Entonces

$$i = i_\infty(1 - e^{-t/(L/R)}) = (4.5\ \text{A})(1 - e^{-3.33}) = (4.5\ \text{A})(1 - 0.0357) = 4.3\ \text{A}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

34.15 [I] Una fem de 8.0 V se induce en una bobina cuando la corriente en ella cambia a razón de 32 A/s. Calcule la inductancia de la bobina. **Resp.** 0.25 H.

34.16 [I] Una corriente estacionaria de 2.5 A genera un flujo de 1.4×10^{-4} Wb en una bobina de 500 vueltas. ¿Cuál es la inductancia de la bobina? **Resp.** 28 mH.

34.17 [I] La inductancia mutua entre la primaria y la secundaria de un transformador es de 0.30 H. Calcule la fem inducida en la secundaria cuando la corriente en la primaria cambia a razón de 4.0 A/s. **Resp.** 1.2 V.

34.18 [II] Una bobina, de 0.20 H de inductancia y 1.0 Ω de resistencia, se conecta a una fuente constante de 90 V. ¿Con qué rapidez aumentará la corriente en la bobina *a*) en el instante cuando la bobina se conecta a la fuente y *b*) en el instante cuando la corriente alcanza dos terceras partes de su valor máximo? **Resp.** *a*) 0.45 kA/s; *b*) 0.15 kA/s.

34.19 [II] Dos bobinas vecinas, *A* y *B*, tienen 300 y 600 vueltas, respectivamente. Una corriente de 1.5 A en *A* origina que 1.2×10^{-4} Wb pasen a través de *A* y 0.90×10^{-4} Wb pasen a través de *B*. Determine *a*) la autoinductancia de *A*, *b*) la inductancia mutua de *A* y *B* y *c*) la fem inducida promedio en *B* cuando la corriente en *A* es interrumpida en 0.20 s. **Resp.** *a*) 24 mH; *b*) 36 mH; *c*) 0.27 V.

34.20 [I] Una bobina de 0.48 H lleva una corriente de 5 A. Calcule la energía almacenada en ella. **Resp.** 6 J.

34.21 [I] El núcleo de hierro de un solenoide tiene 40 cm de longitud y una sección transversal de 5.0 cm^2 y está devanado con 10 vueltas de alambre por centímetro de longitud. Calcule la inductancia del solenoide, si supone que la permeabilidad relativa del hierro es constante a 500. **Resp.** 0.13 H.

34.22 [I] Demuestre que *a*) $1\ N/A^2 = 1\ T \cdot m/A = 1\ Wb/A \cdot m = 1\ H/m$ y *b*) $1\ C^2/N \cdot m^2 = 1\ F/m$.

34.23 [II] Un circuito en serie que consta de un capacitor de 2.0 μF inicialmente descargado y de un resistor de 10 MΩ se conecta a través de una fuente de 100 V. ¿Cuáles serán la corriente en el circuito y la carga en el capacitor *a*) después de una constante de tiempo y *b*) cuando el capacitor tiene 90% de su carga final?
Resp. *a*) 3.7 μA, 0.13 mC; *b*) 1.0 μA, 0.18 mC.

34.24 [II] Un capacitor cargado se conecta a través de un resistor de 10 kΩ y se le permite descargarse. La diferencia de potencial a través del capacitor cae hasta 0.37 de su valor original después de un tiempo de 7.0 s. ¿Cuál es la capacitancia del capacitor? **Resp.** 0.70 mF.

34.25 [II] Cuando un solenoide largo con núcleo de hierro se conecta a través de una batería de 6 V, la corriente se eleva a 0.63 de su valor máximo después de un tiempo de 0.75 s. Entonces se repite el experimento sin el núcleo de hierro. Ahora el tiempo requerido para alcanzar 0.63 del máximo es de 0.0025 s. Calcule *a*) la permeabilidad relativa del hierro y *b*) *L* para el solenoide de núcleo de aire, si la corriente máxima es de 0.5 A.
Resp. *a*) 0.3×10^3; *b*) 0.03 H.

34.26 [I] ¿Qué fracción de la corriente inicial todavía fluye en el circuito de la figura 34-1, siete constantes de tiempo después de cerrar el interruptor? **Resp.** 0.00091.

34.27 [II] ¿En qué fracción difiere la corriente de la figura 34-2 de i_∞, tres constantes de tiempo después de cerrar el interruptor? **Resp.** $(i_\infty - i)/i_\infty = 0.050$.

34.28 [II] En la figura 34-2, $R = 5.0\ \Omega$, $L = 0.40$ H y $\mathscr{E} = 20$ V. Encuentre la corriente en el circuito 0.20 s después de cerrar el interruptor. **Resp.** 3.7 A.

34.29 [II] El capacitor de la figura 34-1 está inicialmente descargado cuando el interruptor se cierra. Encuentre la corriente en el circuito y la carga en el capacitor cinco segundos más tarde. Use $R = 7.00$ MΩ, $C = 0.300\ \mu$F y $\mathscr{E} = 12.0$ V. **Resp.** 159 nA, 3.27 μC.

CORRIENTE ALTERNA 35

LA FEM GENERADA POR UNA BOBINA QUE GIRA en un campo magnético tiene una gráfica similar a la que se muestra en la figura 35-1. A esta fem se le da el nombre de *voltaje de ca* debido a que se tiene una inversión de la polaridad (es decir, el voltaje cambia de signo); los voltajes de ca no son sinusoidales de necesidad. Si la bobina gira con una frecuencia de f revoluciones por segundo, entonces la fem tiene una frecuencia de f hertz (ciclos por segundo). El voltaje instantáneo v que se genera tiene la forma

$$v = v_0 \text{ sen } \omega t = v_0 \text{ sen } 2\pi f t$$

donde v_0 es la amplitud (valor máximo) del voltaje en volts y $\omega = 2\pi f$ es la velocidad angular en rad/s. La frecuencia f del voltaje se relaciona con su periodo T por

$$T = \frac{1}{f}$$

donde T está en segundos.

Las bobinas giratorias no son la única fuente de voltaje de ca; los dispositivos electrónicos que generan voltajes de ca son muy comunes. Los voltajes alternos producen corrientes alternas.

Una corriente alterna producida por un generador típico tiene una gráfica muy parecida a la del voltaje que se ve en la figura 35-1. Su valor instantáneo es i y su amplitud es i_0. Con frecuencia, la corriente y el voltaje no alcanzan su valor máximo al mismo tiempo, aunque ambos tengan idéntica frecuencia.

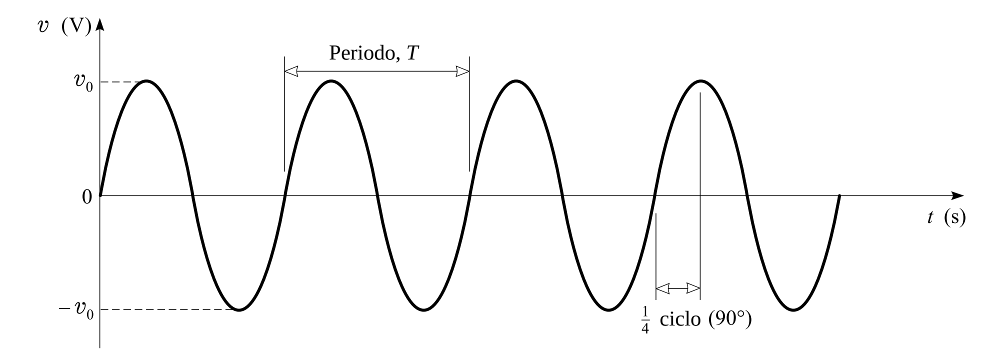


Figura 35-1

LOS MEDIDORES que se utilizan para tomar lecturas en los circuitos de ca miden el valor **efectivo**, o **raíz cuadrática media** (rms) de la corriente y del voltaje. Estos valores siempre son positivos y se relacionan con la amplitud de los valores sinusoidales instantáneos a través de

$$V = V_{\text{rms}} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = 0.707 v_0$$

$$I = I_{\text{rms}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0.707 i_0$$

Se acostumbra representar las lecturas de los medidores con letras mayúsculas (V, I), mientras que los valores instantáneos se representan con letras minúsculas (v, i).

EL CALOR GENERADO O LA POTENCIA PERDIDA por una corriente rms I en un resistor R está dado por I^2R.

FORMAS DE LA LEY DE OHM: Suponga que una corriente sinusoidal de frecuencia f con valor rms I fluye a través de un resistor puro R o de un inductor puro L o de un capacitor puro C. Entonces un voltímetro de ca, conectado a través del elemento en cuestión, leerá un voltaje rms V del modo siguiente:

$$\text{Resistor puro: } V = IR$$
$$\text{Inductor puro: } V = IX_L$$

donde $X_L = 2\pi fL$ se llama **reactancia inductiva**. Sus unidades son ohms cuando L está en henrys y f en hertz.

$$\text{Capacitor puro: } V = IX_C$$

donde $X_C = 1/2\pi fC$ se llama **reactancia capacitiva**. Sus unidades son ohms cuando C está en farads.

FASE: Cuando un voltaje de ca se aplica a una resistencia pura, el voltaje a través de la resistencia y la corriente que pasa por ella alcanzan sus valores máximos en el mismo instante y sus valores cero también en el mismo instante; se dice que el voltaje y la corriente están *en fase.*

Cuando un voltaje de ca se aplica a una inductancia pura, el voltaje a través de la inductancia alcanza su valor máximo un cuarto de ciclo adelante de la corriente, es decir, cuando la corriente es cero. La contrafem de la inductancia ocasiona que la corriente a través de la inductancia se retrace respecto al voltaje un cuarto de ciclo (o 90º) y los dos están *fuera de fase* en 90º.

Cuando un voltaje de ca se aplica a un capacitor puro, el voltaje a través de él se retrasa 90º respecto a la corriente que fluye a través de él. La corriente debe fluir antes de que el voltaje a través del (y la carga en el) capacitor se acumule.

En situaciones más complicadas que involucran combinaciones de R, L y C, el voltaje y la corriente normalmente están fuera de fase (aunque no siempre). El ángulo con el cual el voltaje se atrasa o adelanta a la corriente se llama **ángulo de fase**.

LA IMPEDANCIA (Z) en un circuito formado por resistencias, inductancias y capacitores conectados en serie está dada por

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

con Z en ohms. Si un voltaje V se aplica a un circuito en serie de este tipo, entonces una forma de la ley de Ohm relaciona V con la corriente I a través de él:

$$V = IZ$$

El ángulo de fase ϕ entre V e I está dado por

$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} \qquad \text{o} \qquad \cos\phi = \frac{R}{Z}$$

FASORES: Un **fasor** es una cantidad que se comporta, en muchos aspectos, como un vector. Los fasores se usan para describir circuitos R-L-C en serie, ya que la expresión anterior para la impedancia se puede asociar con el teorema de Pitágoras para un triángulo rectángulo. Como se muestra en la figura 35-2*a*, Z es la hipotenusa del triángulo rectángulo, mientras que R y $(X_L - X_C)$ son los dos lados. El ángulo denotado por ϕ es el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje.

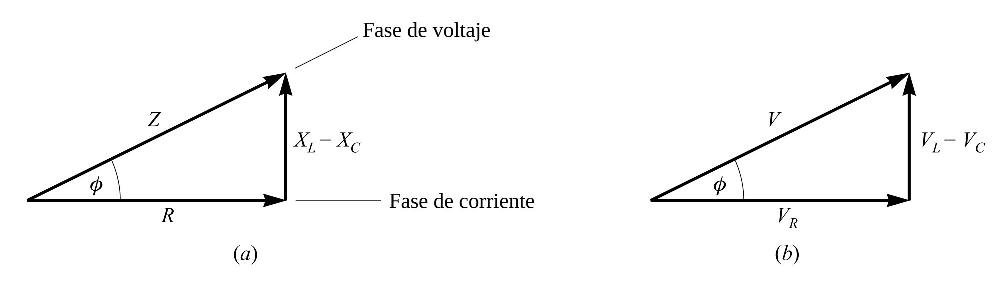


Figura 35-2

Una relación similar se aplica a los voltajes a través de cada elemento en un circuito en serie. Como se muestra en la figura 35-2*b*, esto es

$$V^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2$$

Debido a las diferencias de fase, una medición del voltaje a través de un circuito en serie no es igual a la suma algebraica de las lecturas de voltaje individuales de cada elemento. En vez de ello, se debe utilizar la relación anterior.

LA RESONANCIA en un circuito *R-L-C* en serie se presenta cuando $X_L = X_C$. Bajo esta condición, $Z = R$ es mínima, de modo que I es un máximo para un valor dado de V. Al igualar X_L a X_C, se encuentra la **frecuencia de resonancia** (o **natural**) del circuito

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

PÉRDIDA DE POTENCIA: Suponga que se aplica un voltaje de ca V a través de una impedancia de algún tipo. Esto da origen a una corriente I a través de la impedancia, y el ángulo de fase entre V e I es ϕ. La pérdida de potencia en la impedancia está dada por

$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi$$

La cantidad $\cos\phi$ se llama **factor de potencia**. Para un resistor puro su valor es la unidad, pero es cero para un inductor o un capacitor puros (no hay pérdidas de potencia en un inductor o capacitor puros).

UN TRANSFORMADOR es un dispositivo que se usa para elevar o bajar el voltaje en un circuito de ca. Está constituido por una bobina primaria y una secundaria, devanadas sobre el mismo núcleo de hierro. Una corriente alterna en una bobina genera a través del núcleo un flujo magnético que cambia continuamente. Estos cambios en el flujo inducen una fem alterna en la otra bobina.

En un transformador, la eficiencia normalmente es muy alta. Entonces, por lo general se pueden *despreciar las pérdidas* y escribir

$$\text{Potencia en la primaria} = \text{potencia en la secundaria}$$

$$V_1 I_1 = V_2 I_2$$

La razón de los voltajes es igual a la razón del número de vueltas en las dos bobinas; la razón de las corrientes es igual al inverso de la razón del número de vueltas:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \text{e} \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

35.1 [I] En un voltímetro ca ordinario, la lectura de un voltaje ca sinusoidal de 60.0 Hz es de 120 V. *a*) ¿Cuál es el valor máximo que puede alcanzar el voltaje en un ciclo? *b*) ¿Cuál es la ecuación que describe al voltaje?

a) $$V = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \qquad \text{o} \qquad v_0 = \sqrt{2}V = \sqrt{2}(120\ \text{V}) = 170\ \text{V}$$

b) $$v = v_0 \operatorname{sen} 2\pi f t = (170\ \text{V}) \operatorname{sen} 120\pi t$$

donde t está en s y v_0 es el voltaje máximo.

35.2 [I] Un voltaje $v = (60.0\ \text{V}) \operatorname{sen} 120\pi t$ se aplica a un resistor de 20.0 Ω. ¿Cuál será la lectura en un amperímetro de ca conectado en serie con el resistor?

El voltaje rms a través del resistor es

$$V = 0.707 v_0 = (0.707)(60.0\ \text{V}) = 42.4\ \text{V}$$

Entonces $$I = \frac{V}{R} = \frac{42.4\ \text{V}}{20.0\ \Omega} = 2.12\ \text{A}$$

35.3 [II] Una fuente de voltaje ca de 120 V se conecta a las terminales de un capacitor de 2.0 μF. Encuentre la corriente que entra al capacitor si la frecuencia de la fuente es *a*) 60 Hz y *b*) 60 kHz. *c*) ¿Cuál es la pérdida de potencia en el capacitor?

a) $$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60\ \text{s}^{-1})(2.0\times10^{-6}\ \text{F})} = 1.33\ \text{k}\Omega$$

Entonces $$I = \frac{V}{X_C} = \frac{120\ \text{V}}{1330\ \Omega} = 0.090\ \text{A}$$

b) Ahora $X_C = 1.33\ \Omega$, entonces $I = 90$ A. Note que la impedancia del capacitor varía inversamente con la frecuencia.

c) Ya que $\cos\phi = R/Z$ y $R = 0$;

$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = VI\cos 90^\circ = 0$$

35.4 [II] Una fuente de voltaje ca de 120 V se conecta a las terminales de un inductor de 0.700 H. Calcule la corriente que pasa por el inductor si la frecuencia de la fuente es *a*) 60.0 Hz y *b*) 60.0 kHz. *c*) ¿Cuál es la pérdida de potencia en el inductor?

a) $$X_L = 2\pi fL = 2\pi(60.0\ \text{s}^{-1})(0.700\ \text{H}) = 264\ \Omega$$

Entonces $$I = \frac{V}{X_L} = \frac{120\ \text{V}}{264\ \Omega} = 0.455\ \text{A}$$

b) Ahora $X_L = 264\times10^3\ \Omega$, de tal forma que $I = 0.455\times10^{-3}$ A. Note que la impedancia de un inductor varía directamente con la frecuencia.

c) Ya que $\cos\phi = R/Z$ y $R = 0$;

$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = VI\cos 90^\circ = 0$$

35.5 [II] Una bobina que tiene 0.14 H de inductancia y 12 Ω de resistencia se conecta a una línea de 110 V y 25 Hz. Calcule *a*) la corriente en la bobina, *b*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje suministrado, *c*) el factor de potencia y *d*) la pérdida de potencia en la bobina.

a) $$X_L = 2\pi fL = 2\pi(25)(0.14) = 22.0\ \Omega$$

y $$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(12)^2 + (22-0)^2} = 25.1\ \Omega$$

así $$I = \frac{V}{Z} = \frac{110\ \text{V}}{25.1\ \Omega} = 4.4\ \text{A}$$

b) $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{22-0}{12} = 1.83 \qquad \text{o} \qquad \phi = 61.3^\circ$$

El voltaje se adelanta a la corriente en 61°.

c) $$\text{Factor de potencia} = \cos\phi = \cos 61.3^\circ = 0.48$$

d) $$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = (110\ \text{V})(4.4\ \text{A})(0.48) = 0.23\ \text{kW}$$

O, como las pérdidas de potencia sólo ocurren debido a la resistencia de la bobina,

$$\text{Pérdida de potencia} = I^2R = (4.4\ \text{A})^2(12\ \Omega) = 0.23\ \text{kW}$$

35.6 [II] Un capacitor está en serie con una resistencia de 30 Ω y se conecta a una línea ca de 220 V. La reactancia del capacitor es de 40 Ω. Determine *a*) la corriente en el circuito, *b*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje aplicado y *c*) la pérdida de potencia en el circuito.

a) $$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(30)^2 + (0-40)^2} = 50\ \Omega$$

entonces $$I = \frac{V}{Z} = \frac{220\ \text{V}}{50\ \Omega} = 4.4\ \text{A}$$

b) $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{0-40}{30} = -1.33 \qquad \text{o} \qquad \phi = -53^\circ$$

El signo menos indica que el voltaje se *retrasa* con respecto a la corriente en 53º. El ángulo ϕ en la figura 35-2 estará abajo del eje horizontal.

c) **Método 1**

$$\text{Pérdida de potencia} = VI\cos\phi = (220)(4.4)\cos(-53^\circ) = (220)(4.4)\cos 53^\circ = 0.58 \text{ kW}$$

Método 2

Como la pérdida de potencia ocurre sólo en el resistor, y no en el capacitor puro,

$$\text{Pérdida de potencia} = I^2R = (4.4 \text{ A})^2(30\ \Omega) = 0.58 \text{ kW}$$

35.7[III] Un circuito en serie que consta de un resistor no inductivo de 100 Ω, una bobina con 0.10 H de inductancia y resistencia despreciable, y un capacitor de 20 μF, se conecta a una fuente de alimentación de 110 V y 60 Hz. Calcule *a*) la corriente, *b*) la pérdida de potencia, *c*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente y *d*) la lectura de voltaje a través de los tres elementos.

a) Para todo el circuito, $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, con

$$R = 100\ \Omega$$
$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(60 \text{ s}^{-1})(0.10 \text{ H}) = 37.7\ \Omega$$
$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(60 \text{ s}^{-1})(20\times10^{-6} \text{ F})} = 1\,327\ \Omega$$

de donde

$$Z = \sqrt{(100)^2 + (38 - 133)^2} = 138\ \Omega \qquad \text{y} \qquad I = \frac{V}{Z} = \frac{110 \text{ V}}{138\ \Omega} = 0.79 \text{ A}$$

b) Toda la pérdida de la potencia ocurre en el resistor, de modo que

$$\text{Pérdida de potencia} = I^2R = (0.79 \text{ A})^2(100\ \Omega) = 63 \text{ W}$$

c)
$$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{-95\ \Omega}{100\ \Omega} = -0.95 \qquad \text{o} \qquad \phi = -44^\circ$$

El voltaje se atrasa respecto a la corriente.

d)
$$V_R = IR = (0.79 \text{ A})(100\ \Omega) = 79 \text{ V}$$
$$V_C = IX_C = (0.79 \text{ A})(132.7\ \Omega) = 0.11 \text{ kV}$$
$$V_L = IX_L = (0.79 \text{ A})(37.7\ \Omega) = 30 \text{ V}$$

Note que $V_C + V_L + V_R$ no iguala al voltaje de la fuente. De la figura 35-2*b*, la relación correcta es

$$V = \sqrt{V_R^2 + (V_L - V_C)^2} = \sqrt{(79)^2 + (-75)^2} = 109 \text{ V}$$

que está dentro de los límites de los errores de redondeo.

35.8 [III] Una resistencia de 5.00 Ω está en un circuito en serie con una inductancia pura de 0.200 H y una capacitancia pura de 40.0 nF. La combinación se conecta a una fuente de alimentación de 30.0 V y 1 780 Hz. Encuentre *a*) la corriente en el circuito, *b*) el ángulo de fase entre el voltaje de la fuente y la corriente, *c*) la pérdida de potencia en el circuito y *d*) la lectura del voltímetro a través de cada elemento del circuito.

a)
$$X_L = 2\pi fL = 2\pi(1780 \text{ s}^{-1})(0.200 \text{ H}) = 2.24 \text{ k}\Omega$$
$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{2\pi(1780 \text{ s}^{-1})(4.00\times10^{-8} \text{ F})} = 2.24 \text{ k}\Omega$$

y
$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R = 5.00\ \Omega$$

Entonces
$$I = \frac{V}{Z} = \frac{30.0 \text{ V}}{5.00\ \Omega} = 6.00 \text{ A}$$

b) $$\tan\phi = \frac{X_L - X_C}{R} = 0 \qquad \text{o} \qquad \phi = 0^\circ$$

c) Pérdida de potencia $= VI\cos\phi = (30.0\text{ V})(6.00\text{ A})(1) = 180\text{ W}$

o Pérdida de potencia $= I^2R = (6.00\text{ A})^2(5.00\ \Omega) = 180\text{W}$

d)
$$V_R = IR = (6.00\text{ A})(5.00\ \Omega) = 30.00\text{ V}$$
$$V_C = IX_C = (6.00\text{ A})(2\,240\ \Omega) = 13.4\text{ kV}$$
$$V_L = IX_L = (6.00\text{ A})(2\,240\ \Omega) = 13.4\text{ kV}$$

Este circuito está en resonancia porque $X_C = X_L$. Note cuán grandes se vuelven los voltajes a través del inductor y del capacitor, aun cuando el voltaje de la fuente es bajo.

35.9 [III] Como se muestra en la figura 35-3, un circuito en serie conectado a una línea de 200 V, 60 Hz, consiste en un capacitor con reactancia capacitiva de 30 Ω, un resistor no inductivo de 44 Ω y una bobina con reactancia inductiva de 90 Ω y resistencia de 36 Ω. Determine *a*) la corriente en el circuito, *b*) la diferencia de potencial a través de cada elemento, *c*) el factor de potencia del circuito y *d*) la potencia absorbida por el circuito.

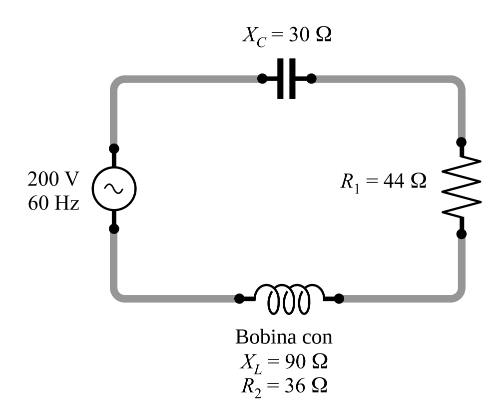


Figura 35-3

a) $$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(44 + 36)^2 + (90 - 30)^2} = 0.10\text{ k}\Omega$$

de modo que $$I = \frac{V}{Z} = \frac{200\text{ V}}{100\ \Omega} = 2.0\text{ A}$$

b)
d.p. a través del capacitor $= IX_C = (2.0\text{ A})(30\ \Omega) = 60\text{ V}$

d.p. a través del resistor $= IR_1 = (2.0\text{ A})(44\ \Omega) = 88\text{ V}$

Impedancia de la bobina $= \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = \sqrt{(36)^2 + (90)^2} = 97\ \Omega$

d.p. a través de la bobina $= (2.0\text{ A})(97\ \Omega) = 0.19\text{ kV}$

c) $$\text{Factor de potencia} = \cos\phi = \frac{R}{Z} = \frac{80}{100} = 0.80$$

d) Potencia absorbida $= VI\cos\phi = (200\text{ V})(2\text{ A})(0.80) = 0.32\text{ kW}$

o Potencia absorbida $= I^2R = (2\text{ A})^2(80\ \Omega) = 0.32\text{ kW}$

35.10 [I] Calcule la frecuencia de resonancia de un circuito con resistencia despreciable que contiene una inductancia de 40.0 mH y una capacitancia de 600 pF.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{(40.0\times10^{-3}\text{ H})(600\times10^{-12}\text{ F})}} = 32.5\text{ kHz}$$

35.11 [I] Un transformador elevador se utiliza en una línea de 120 V para suministrar 1 800 V. La primaria tiene 100 vueltas. ¿Cuántas vueltas hay en la secundaria?

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \text{o} \qquad \frac{120\ \text{V}}{1\,800\ \text{V}} = \frac{100\ \text{vueltas}}{N_2}$$

de donde $\boldsymbol{N_2} = 1.50 \times 10^3$ vueltas.

35.12 [I] Un transformador utilizado en una línea de 120 V suministra 2.0 A a 900 V. ¿Qué corriente se extrae de la línea? Suponga una eficiencia de 100%.

$$\text{Potencia en la primaria} = \text{potencia en la secundaria}$$
$$I_1(120\ \text{V}) = (2.0\ \text{A})(900\ \text{V})$$
$$I_1 = 15\ \text{A}$$

35.13 [I] Un transformador reductor opera en una línea de 2.5 kV y alimenta a una carga con 80 A. La razón del devanado primario al devanado secundario es 20:1. Suponga una eficiencia de 100% y determine el voltaje secundario V_2, la corriente primaria I_1 y la salida de potencia P_2.

$$V_2 = \left(\frac{1}{20}\right)V_1 = 0.13\ \text{kV} \qquad I_1 = \left(\frac{1}{20}\right)I_2 = 4.0\ \text{A} \qquad \text{P}_2 = V_2 I_2 = 10\ \text{kW}$$

La última expresión es correcta sólo si se supone que la carga es resistiva pura, de modo que el factor de potencia sea la unidad.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

35.14 [I] La lectura en un voltímetro es de 80.0 V cuando se conecta a las terminales de una fuente de alimentación sinusoidal con $f = 1\,000$ Hz. Escriba la ecuación del voltaje instantáneo suministrado por la fuente.
Resp. $\upsilon = (113\ \text{V})$ sen $2\,000\pi t$ para t en segundos.

35.15 [I] Una corriente ca en una resistencia de 10 Ω produce calor a razón de 360 W. Determine los valores efectivos de la corriente y del voltaje. **Resp.** 6.0 A, 60 V.

35.16 [I] Un resistor de 40.0 Ω se conecta a un oscilador electrónico de frecuencia variable de 15.0 V. Calcule la corriente a través del resistor cuando la frecuencia es *a*) 100 Hz y *b*) 100 kHz. **Resp.** *a*) 0.375 A; *b*) 0.375 A.

35.17 [I] Resuelva el problema 35.16 si el resistor de 40.0 Ω se reemplaza con un inductor de 2.00 mH.
Resp. *a*) 11.9 A; *b*) 11.9 mA.

35.18 [I] Resuelva el problema 35.16 si el resistor de 40.0 Ω se reemplaza con un capacitor de 0.300 μF.
Resp. *a*) 2.83 mA; *b*) 2.83 A.

35.19 [II] Una bobina tiene 20 Ω de resistencia y 0.35 H de inductancia. Calcule la reactancia y la impedancia para una corriente alterna con una frecuencia de 25 ciclos/s. **Resp.** 55 Ω, 59 Ω.

35.20 [II] Una corriente de 30 mA entra a un capacitor de 4.0 μF conectado a una línea de corriente alterna que tiene una frecuencia de 500 Hz. Calcule la reactancia del capacitor y el voltaje a través de sus terminales.
Resp. 80 Ω, 2.4 V.

35.21 [II] Una bobina, conectada a una línea de 110 V y 60.0 Hz, tiene una inductancia de 0.100 H y una resistencia de 12.0 Ω. Determine *a*) la reactancia de la bobina, *b*) la impedancia de la bobina, *c*) la corriente que pasa por la bobina, *d*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente de alimentación, *e*) el factor de potencia del circuito y *f*) la lectura en un wattímetro conectado al circuito. **Resp.** *a*) 37.7 Ω; *b*) 39.6 Ω; *c*) 2.78 A; *d*) el voltaje se adelanta a la corriente en 72.3º; *e*) 0.303; *f*) 92.6 W.

35.22 [III] Un capacitor de 10.0 μF está conectado en serie con una resistencia de 40.0 Ω y la combinación se conecta a una línea de 110 V y 60.0 Hz. Calcule *a*) la reactancia capacitiva, *b*) la impedancia del circuito, *c*) la corriente en el circuito, *d*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente y *e*) el factor de potencia para el circuito. **Resp.** *a*) 266 Ω; *b*) 269 Ω; *c*) 0.409 A; *d*) el voltaje se retrasa en 81.4º; *e*) 0.149.

35.23 [III] Un circuito en serie que consta de una resistencia, una inductancia y una capacitancia está conectado a una línea ca de 110 V. Para el circuito, $R = 9.0$ Ω, $X_L = 28$ Ω y $X_C = 16$ Ω. Calcule *a*) la impedancia del circuito, *b*) la corriente, *c*) el ángulo de fase entre la corriente y el voltaje de la fuente y *d*) el factor de potencia del circuito. **Resp.** *a*) 15 Ω; *b*) 7.3 A; *c*) el voltaje se adelanta en 53º; *d*) 0.60.

35.24 [II] Un experimentador tiene una bobina de 3.0 mH de inductancia y quiere construir un circuito cuya frecuencia de resonancia sea de 1.0 MHz. ¿Cuál debe ser el valor del capacitor que use? **Resp.** 8.4 pF.

35.25 [II] Un circuito tiene una resistencia de 11 Ω, una bobina con una reactancia inductiva de 120 Ω y un capacitor con una reactancia de 120 Ω, todos conectados en serie a una fuente de alimentación a 110 V y 60 Hz. ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada elemento del circuito? **Resp.** $V_R = 0.11$ kV, $V_L = V_C = 1.2$ kV.

35.26 [II] Una fuente de 120 V y 60 Hz se conecta en serie a una resistencia no inductiva de 800 Ω y una capacitancia de valor desconocido. La caída de voltaje a través del resistor es de 102 V. *a*) ¿Cuál es la caída de voltaje a través del capacitor? *b*) ¿Cuál es la reactancia del capacitor? **Resp.** *a*) 63 V; *b*) 0.50 kΩ.

35.27 [II] Una bobina de resistencia despreciable se conecta en serie con un resistor de 90 Ω a través de una línea de 120 V y 60 Hz. Un voltímetro lee 36 V a través de la resistencia. Encuentre el voltaje a través de la bobina y la inductancia de ésta. **Resp.** 0.11 kV, 0.76 H.

35.28 [I] Un transformador reductor se utiliza en una línea de 2.2 kV para suministrar 110 V. ¿Cuántas vueltas hay en el devanado primario si el secundario tiene 25 vueltas? **Resp.** 5.0×10^2.

35.29 [I] Un transformador reductor se utiliza en una línea de 1 650 V para suministrar 45 A a 110 V. ¿Qué corriente se extrae de la línea? Suponga una eficiencia de 100%. **Resp.** 3.0 A.

35.30 [II] Un transformador elevador opera en una línea a 110 V y suministra 2.0 A a una carga. La razón del devanado primario al secundario es de 1:25. Determine el voltaje secundario, la corriente primaria y la salida de potencia. Suponga una carga resistiva y una eficiencia de 100%. **Resp.** 2.8 kV, 50 A, 5.5 kW.

REFLEXIÓN DE LA LUZ

36

NATURALEZA DE LA LUZ: La luz (junto con todas las otras formas de radiación electromagnética) es una entidad fundamental y la física todavía lucha por comprenderla. En un nivel observable, la luz manifiesta dos comportamientos en apariencia contradictorios, representados de manera tosca a través de los modelos ondulatorios y de partículas. Por lo común, la cantidad de energía presente es tan grande que la luz se comporta como si fuera una onda ideal continua, una onda de campos eléctrico y magnético interdependientes. La interacción de la luz con las lentes, los espejos, los prismas, las rendijas, etcétera, se puede comprender de manera satisfactoria mediante el modelo ondulatorio (siempre que no se sondee con demasiada profundidad en lo que sucede microscópicamente). Por otra parte, cuando la luz es emitida o absorbida por los átomos de un sistema, estos procesos ocurren como si la energía radiante tuviera la forma de ráfagas diminutas, localizadas y bien dirigidas; es decir, como si la luz fuera una corriente de "partículas". Por fortuna, sin preocuparse acerca de la naturaleza precisa de la luz, es posible predecir su comportamiento en un amplio rango de situaciones prácticas.

LEY DE REFLEXIÓN: Un rayo es una recta matemática trazada perpendicular a los frentes de onda de una onda luminosa. Muestra la dirección de propagación de la energía electromagnética. En la reflexión *especular* (o *de espejo*), el ángulo de incidencia (θ_i) es igual al ángulo de reflexión (θ_r), como se muestra en la figura 36-1. Más aún, el rayo incidente, el rayo reflejado y la normal a la superficie se ubican todos en el mismo plano, llamado **plano de incidencia**.

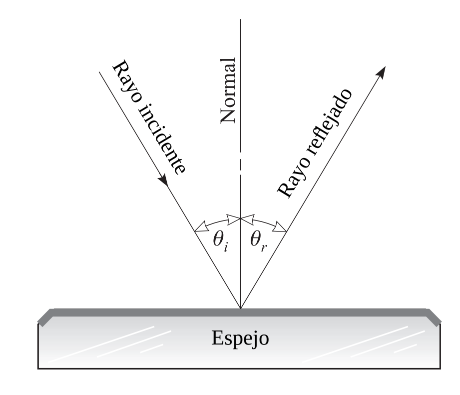


Figura 36-1

LOS ESPEJOS PLANOS forman imágenes que son derechas, del mismo tamaño que el objeto, atrás de la superficie reflectora y a la misma distancia que se encuentra el objeto de la superficie. A este tipo de imágenes se les llama **virtuales**; es decir, la imagen no se formará en una pantalla que se coloque en la posición de la imagen, ya que la luz no converge en ese lugar.

ESPEJOS ESFÉRICOS: El **foco principal** de un espejo esférico, como los que se muestran en la figura 36-2, es el punto *F* donde los rayos paralelos al **eje óptico** o *central* del espejo y los más cercanos a este eje están enfocados. El foco es real para un espejo cóncavo y virtual para un espejo convexo. Este foco se localiza sobre el eje óptico y a media distancia entre el centro de curvatura *C* y el espejo.

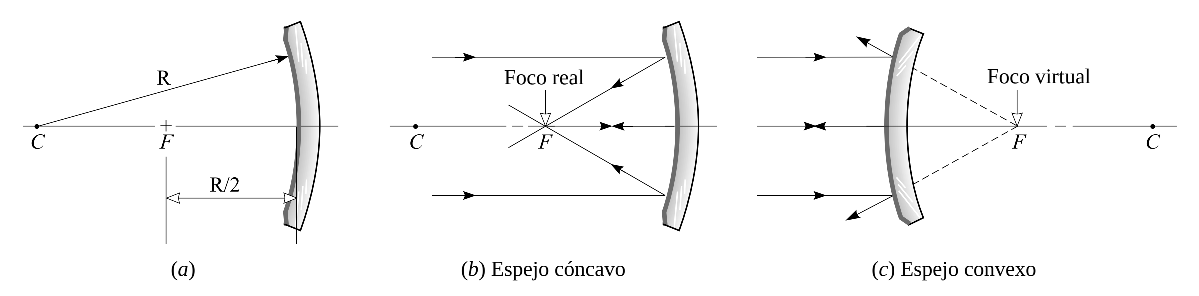


Figura 36-2

Los **espejos cóncavos** forman imágenes reales invertidas de un objeto que se encuentre atrás del foco principal. Si el objeto se halla entre el foco principal y el espejo, la imagen es virtual, derecha y aumentada.

Los **espejos convexos** sólo producen imágenes virtuales derechas de un objeto colocado frente a ellos. Las imágenes son disminuidas (más pequeñas que el objeto) en tamaño.

TRAZO DE RAYOS: Es posible localizar la imagen de cualquier punto en un objeto mediante el trazo de por lo menos dos rayos que partan de dicho punto a través del sistema óptico que forma la imagen; en este caso el sistema es

un espejo. Hay cuatro rayos especialmente convenientes para usar porque se conoce, sin hacer cálculos, exactamente cómo se reflejan desde el espejo. Estos rayos se muestran en la figura 36-3 para un espejo cóncavo esférico, en la figura 36-4 para un espejo convexo esférico. Note que la recta trazada desde C hasta el punto de reflexión es un radio y por tanto es normal a la superficie del espejo. Esa recta siempre biseca el ángulo formado por los rayos incidentes y reflejados (es decir, $\theta_i = \theta_r$).

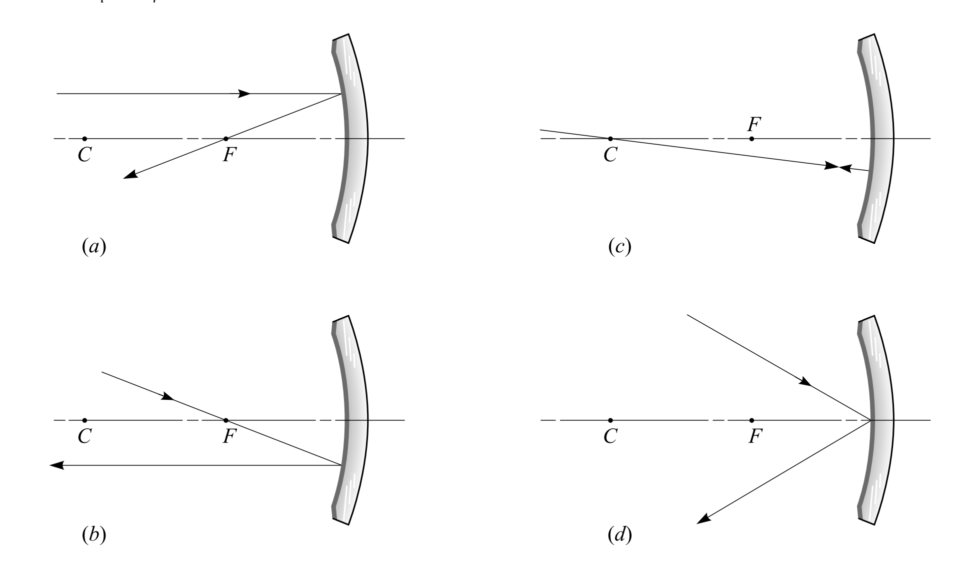


Figura 36-3

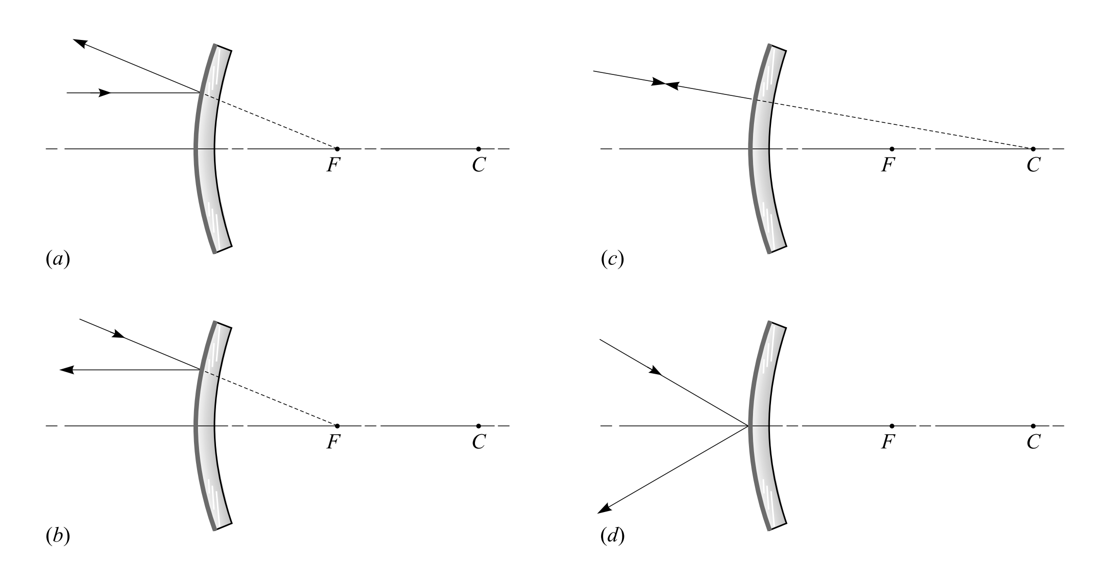


Figura 36-4

LA ECUACIÓN DE LOS ESPEJOS esféricos, tanto cóncavos como convexos, es

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

donde s_o = distancia del objeto medida desde el espejo

s_i = distancia de la imagen medida desde el espejo

R = radio de curvatura del espejo

f = distancia focal del espejo = $-R/2$

Hay varias convenciones de signos; la siguiente es la más ampliamente usada. Con la luz que entra desde la izquierda:

- s_o es positiva cuando el objeto está frente al espejo (es decir, a la izquierda).
- s_i es positiva cuando la imagen es real, es decir, enfrente o a la izquierda del espejo.
- s_i es negativa cuando la imagen es virtual, o sea, atrás o a la derecha del espejo.
- f es positiva para un espejo cóncavo y negativa para un espejo convexo.
- R es positiva cuando C está a la derecha del espejo (es decir, cuando el espejo es convexo).
- R es negativa cuando C está a la izquierda del espejo (es decir, cuando el espejo es cóncavo).

EL TAMAÑO DE LA IMAGEN formada por un espejo esférico está dada por

$$\text{Magnificación transversal} = \frac{\text{longitud de la imagen}}{\text{longitud del objeto}} = -\frac{\text{distancia de la imagen al espejo}}{\text{distancia del objeto al espejo}}$$

$$M_T = \frac{y_i}{y_o} = -\frac{s_i}{s_o}$$

Una ampliación negativa indica que la imagen está invertida. Aquí y_i y y_o son las alturas de la imagen y del objeto, respectivamente, donde cualquiera de ellas es positiva cuando se encuentra arriba del eje central y negativa cuando está abajo de él.

PROBLEMAS RESUELTOS

36.1 [II] Dos espejos planos forman un ángulo de 30º entre sí. Localice gráficamente cuatro imágenes de un punto luminoso A colocado entre los dos espejos (vea la figura 36-5).

Desde A trace las normales AA' y AB' hacia los espejos OY y OX, respectivamente, haciendo $\overline{AL} = \overline{LA'}$ y $\overline{AM} = \overline{MB'}$. Entonces A' y B' son imágenes de A.

A continuación, desde A' y B' trace normales a OX y OY, haciendo $\overline{A'N} = \overline{NA''}$ y $\overline{B'P} = \overline{PB''}$. Entonces A'' es la imagen de A' en OX y B'' es la imagen de B' en OY.

Las cuatro imágenes de A son A', B', A'', B''. También existen imágenes adicionales, por ejemplo, de A'' y B''.

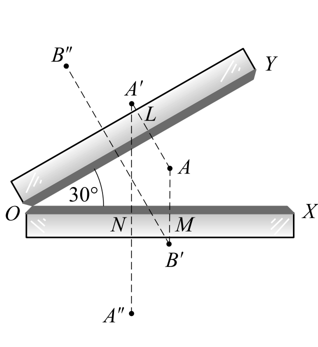


Figura 36-5

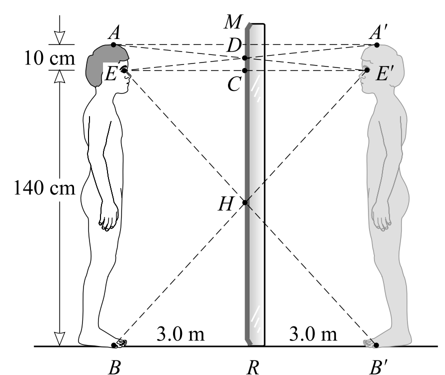


Figura 36-6

36.2 [II] Un muchacho de 1.50 m de estatura apenas puede ver su imagen en un espejo plano vertical que se encuentra a 3.0 m de distancia. Sus ojos están a 1.40 m del piso. Determine la altura del espejo y la elevación desde el piso del espejo más corto en que puede ver su imagen completa.

En la figura 36-6, AB representa al muchacho. Sus ojos se localizan en E. Entonces $A'B'$ es la imagen de AB en el espejo MR, y DH representa al espejo más pequeño que se necesita para que los ojos vean la imagen $A'B'$.

Los triángulos DEC y $DA'M$ son congruentes y por tanto

$$\overline{CD} = \overline{DM} = 5.0 \text{ cm}$$

Los triángulos HRB' y HCE son congruentes y por consiguiente

$$\overline{RH} = \overline{HC} = 70 \text{ cm}$$

La altura del espejo es $\overline{HC} + \overline{CD} = 75$ cm y su elevación es $\overline{RH} = 70$ cm del piso.

36.3 [II] Como se muestra en la figura 36-7, un rayo de luz *IO* incide sobre un pequeño espejo plano. El espejo refleja el rayo de vuelta sobre una escala recta *SC* que está a 1 m de distancia y es paralela al espejo *MM* no desviado. Cuando el espejo gira un ángulo de 8.0º y toma la posición $M'M'$, ¿qué distancia se desplazará sobre la escala la mancha de luz? (El dispositivo, llamado *nivel óptico*, es muy útil para medir pequeñas deflexiones.)

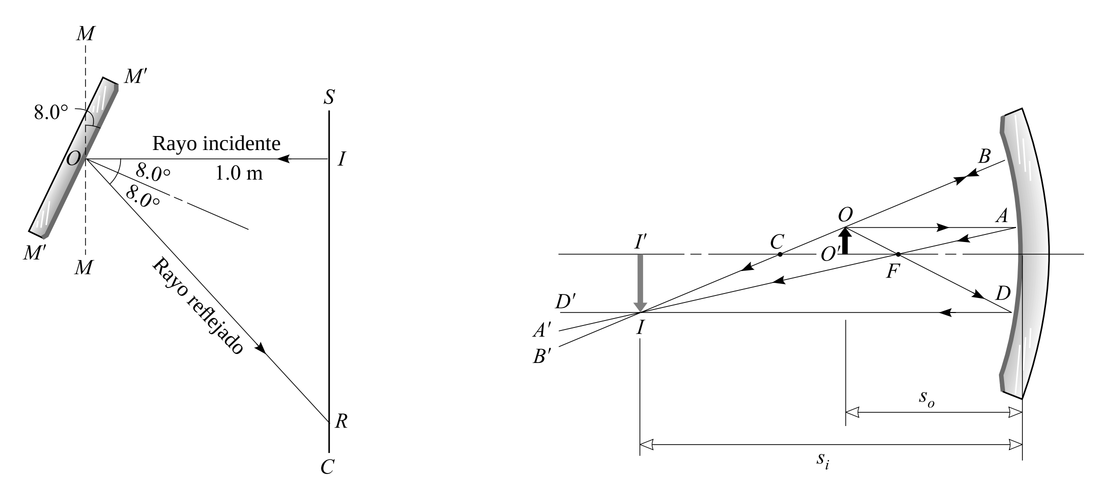


Figura 36-7 **Figura 36-8**

Cuando el espejo gira un ángulo de 8.0º, la normal también gira ese ángulo de 8.0º, y el rayo incidente formará un ángulo de 8.0º con la normal *NO* del espejo inclinado $M'M'$. Como el rayo incidente *IO* y el rayo reflejado *OR* forman ángulos iguales con la normal, el ángulo *IOR* es el doble del ángulo que giró el espejo, o sea, 16º. Entonces

$$\overline{IR} = \overline{IO} \tan 16º = (1.0 \text{ m})(0.287) = 29 \text{ cm}$$

36.4 [II] El espejo esférico cóncavo que se muestra en la figura 36-8 tiene un radio de curvatura de 4 m. Un objeto OO', de 5 cm de altura, se coloca 3 m enfrente de un espejo. Por *a*) construcción y *b*) analíticamente, determine la posición y la altura de la imagen II'.

En la figura 36-8, *C* es el centro de curvatura, a 4 m del espejo, y *F* es el foco principal, a 2 m del espejo.

a) Dos de los siguientes tres rayos convenientes que salen de *O* darán la posición de la imagen.

1. El rayo *OA*, paralelo al eje principal. Este rayo, como todo rayo paralelo al eje, se refleja a través del foco principal *F* en la dirección AFA'.
2. El rayo *OB*, dibujado como si pasara por el centro de curvatura *C*. Este rayo es normal al espejo y se reflejará sobre sí mismo en la dirección BCB'.
3. El rayo *OFD*, que pasa por el foco principal *F* y, como todos los rayos que pasan por *F*, se refleja paralelo al eje principal en la dirección DD'.

El punto de intersección *I* de cualesquier dos de estos rayos reflejados es la imagen de *O*. Por tanto, II' representa la posición y el tamaño de la imagen de OO'. La imagen es real, invertida, amplificada y está a mayor distancia del espejo que el objeto. (*Nota*: Si el objeto estuviese en II', la imagen estaría en OO' y sería real, invertida y más pequeña.)

b) Por la ecuación de los espejos, en que $R = -4$ m,

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{-4} \qquad \text{o} \qquad s_i = 6 \text{ m}$$

La imagen es real (pues s_i es positiva) y se localiza a 6 m del espejo. Asimismo, ya que la imagen está invertida, tanto la ampliación como y_i son negativas:

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{6 \text{ m}}{3 \text{ m}} = -2 \qquad \text{y así} \qquad y_i = (-2)(5 \text{ cm}) = -0.10 \text{ m}$$

36.5 [II] Un objeto OO' está a 25 cm de un espejo esférico cóncavo de 80 cm de radio (figura 36-9). Determine la posición y el tamaño relativo de la imagen II' *a*) por construcción y *b*) con la ecuación de los espejos.

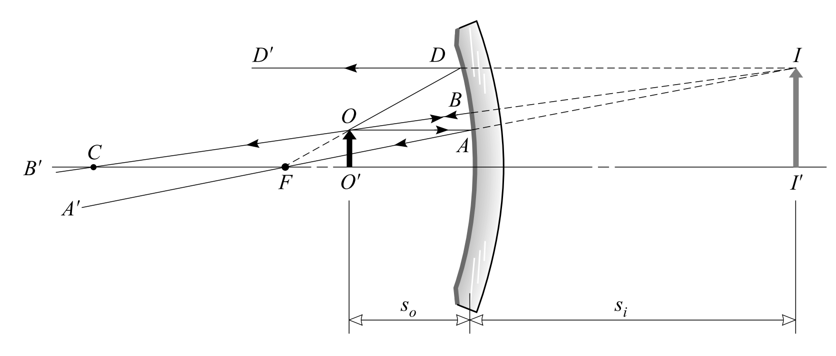


Figura 36-9

a) Dos de los siguientes tres rayos que emanan de *O* ubican la imagen.

1. El rayo *OA*, paralelo al eje principal, se refleja a través del foco *F*, ubicado a 40 cm del espejo.
2. El rayo *OB*, en la línea del radio *COB*, es normal al espejo y se refleja sobre sí mismo a través del centro de curvatura *C*.
3. El rayo *OD*, que pasa (se extiende) por el punto *F*, se refleja paralelo al eje. Debido a la gran curvatura que tiene el espejo entre los puntos *A* y *D*, este rayo no es tan preciso como los otros dos.

Los rayos reflejados (AA', BB' y DD') no se intersecan, ya que aparentemente provienen de un punto *I* atrás del espejo. Entonces II' representa la posición y tamaño relativos de la imagen de OO'. La imagen es virtual (atrás del espejo), derecha y amplificada. Aquí el radio *R* es negativo y por tanto

b)
$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{R} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{25} + \frac{1}{s_i} = -\frac{2}{-80} \qquad \text{o} \qquad s_i = -67 \text{ cm}$$

La imagen es virtual (pues s_i es negativa) y se encuentra a 66.7 cm atrás del espejo. Además,

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{-66.7 \text{ cm}}{25 \text{ cm}} = 2.7 \text{ veces}$$

Note que M_T es positiva y por eso la imagen está derecha.

36.6 [II] Como se muestra en la figura 36-10, un objeto de 6 cm de altura se localiza 30 cm enfrente de un espejo esférico convexo de 40 cm de radio. Determine la posición y la altura de su imagen, *a*) por construcción y *b*) con la ecuación de los espejos.

a) Escoja dos rayos convenientes que emanen de *O* en la parte superior del objeto:

1. El rayo *OA*, paralelo al eje principal, se refleja en la dirección AA' como si pasase a través del foco principal *F*.
2. El rayo *OB*, dirigido al centro de curvatura *C*, es normal al espejo y se refleja de vuelta sobre sí mismo.

Los rayos reflejados, AA' y BO, nunca se intersecan y aparentemente provienen del punto I atrás del espejo. Entonces II' representa el tamaño y la posición de la imagen de OO'.

Todas las imágenes formadas por los espejos convexos son virtuales, derechas y de menor tamaño, siempre y cuando el objeto esté enfrente del espejo (es decir, un objeto real). Para un espejo convexo, el radio es positivo; aquí $R = 40$ cm. De este modo

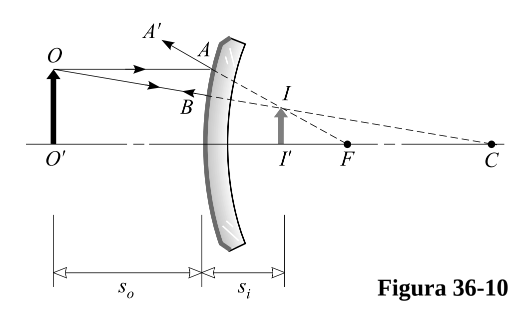


Figura 36-10

b) $$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=-\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{30}+\frac{1}{s_i}=-\frac{2}{40} \quad \text{o} \quad s_i = -12 \text{ cm}$$

La imagen es virtual (s_i es negativa) y está 12 cm atrás del espejo. También,

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{-12 \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = 0.40$$

Más aún, $M_T = y_i/y_o$ y así $y_i = M_T y_o = (0.40)(6.0 \text{ cm}) = 2.4$ cm

36.7 [II] ¿Dónde se debe colocar un objeto, respecto a un espejo esférico cóncavo de 180 cm de radio, para formar una imagen real que tenga la mitad del tamaño del objeto?

Todas las imágenes reales formadas por el espejo están invertidas y por tanto la amplificación es de $-1/2$; en consecuencia, $s_i = s_o/2$. Entonces, ya que $R = -180$ cm

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=-\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{s_o}+\frac{2}{s_o}=-\frac{2}{-180} \quad \text{o} \quad s_o = 0.27 \text{ m desde el espejo}$$

36.8 [II] ¿A qué distancia, enfrente de un espejo esférico cóncavo de 120 cm de radio, se debe parar una niña para ver una imagen derecha de su cara y aumentada cuatro veces su tamaño natural?

La imagen debe ser derecha y virtual; entonces s_i es negativa. Ya que la amplificación es de $+4$ y $M_T = -s_i/s_o$, se sigue que $s_i = -4s_o$. Entonces, al usar $R = -120$ cm

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=-\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{s_o}-\frac{1}{4s_o}=\frac{2}{120} \quad \text{o} \quad s_o = 45 \text{ cm del espejo}$$

36.9 [II] ¿Qué clase de espejo esférico se debe utilizar, y cuál debe ser su radio, para que forme una imagen derecha de un quinto de altura de un objeto colocado a 15 cm frente a él?

Una imagen derecha producida por un espejo esférico es virtual; entonces s_i es negativa. Además, ya que la amplificación es $+1/5$, $s_i = -s_o/5 = -15/5 = -3$ cm. Puesto que la imagen virtual es más pequeña que el objeto, se requiere un espejo convexo. Su radio se puede encontrar mediante

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=-\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad \frac{1}{15}-\frac{1}{3}=-\frac{2}{R} \quad \text{o} \quad R = +7.5 \text{ cm (espejo convexo)}$$

36.10 [II] El diámetro del Sol subtiende un ángulo de aproximadamente 32 minutos (32′) en cualquier punto de la Tierra. Determine la posición y diámetro de la imagen solar formada por un espejo esférico cóncavo de 400 cm de radio. Vea la figura 36-11.

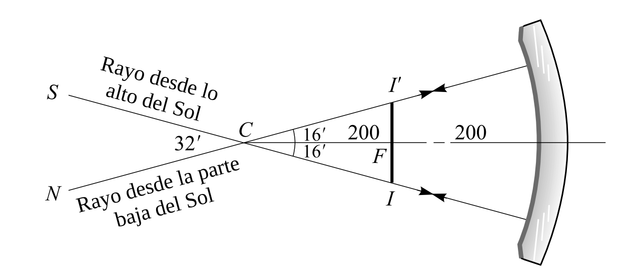


Figura 36-11

Como el Sol se encuentra muy lejos, s_o es muy grande y por lo mismo $1/s_o$ es prácticamente cero. Así, con $R = -400$ cm,

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=-\frac{2}{R} \qquad \text{o} \qquad 0+\frac{1}{s_i}=\frac{2}{400}$$

de donde $s_i = 200$ cm. La imagen está en el foco principal F, a 200 cm del espejo.

El diámetro del Sol y su imagen II' subtienden ángulos iguales en el centro de curvatura C del espejo. De la figura,

$$\tan 16' = \frac{\overline{II'}/2}{\overline{CF}} \qquad \text{o} \qquad \overline{II'} = 2\overline{CF}\ \tan 16' = (2)(2.00 \text{ m})(0.00465) = 1.9 \text{ cm}$$

36.11 [II] Un dentista utiliza un espejo pequeño que da una amplificación de 4.0 cuando se sostiene a 0.60 cm de un diente. ¿Cuál es el radio de curvatura del espejo?

A fin de que el espejo produzca una imagen amplificada recta, debe ser cóncavo. Por consiguiente, R es negativo.

Dado que la amplificación es positiva, $-s_i/s_o = 4$ y con $s_o = 0.60$ cm se deduce que $s_i = -2.4$ cm. La ecuación del espejo se convierte (en cm)

$$\frac{1}{0.60}+\frac{1}{-2.4}=-\frac{2}{R} \qquad \text{o} \qquad 1.667-0.417=-\frac{2}{R}$$

y $R = -1.6$ cm. (Esto concuerda con el hecho de que la imagen formada por un espejo convexo está reducida, no amplificada.)

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

36.12 [I] Si desea retratarse cuando está a 3 m de un espejo plano, ¿a qué distancia debe enfocar la cámara que sostiene? **Resp.** 6 m.

36.13 [I] Dos espejos planos forman entre ellos un ángulo de 90º. Un objeto luminoso puntual se coloca entre ellos. ¿Cuántas imágenes se forman? **Resp.** 3.

36.14 [I] Dos espejos planos se colocan paralelos uno con respecto al otro y separados 20 cm. Un punto luminoso se coloca entre ellos a 5.0 cm de uno de los espejos. Determine la distancia desde cada espejo de las tres imágenes más cercanas en cada uno. **Resp.** 5.0, 35, 45 cm; 15, 25, 55 cm.

36.15 [I] Dos espejos planos forman entre ellos un ángulo de 90º. Un haz de luz se dirige a uno de los espejos, se refleja en éste y en el segundo espejo, y sale de los espejos. ¿Cuál es el ángulo entre el haz incidente y el haz reflejado? **Resp.** 180º.

36.16 [I] Un rayo de luz forma un ángulo de 25º con la normal a un espejo plano. Si el espejo se gira un ángulo de 6.0º, haciendo que el ángulo de incidencia sea de 31º, ¿qué ángulo girará el rayo reflejado? **Resp.** 12º.

36.17 [II] Describa la imagen de la llama de una vela que se encuentra a 40 cm de un espejo esférico cóncavo de 64 cm de radio. **Resp.** real, invertida, a 0.16 m frente al espejo, amplificada cuatro veces.

36.18 [II] Describa la imagen de un objeto que se encuentra a 20 cm de un espejo esférico cóncavo de 60 cm de radio. **Resp.** virtual, derecha, a 60 cm atrás del espejo, amplificada tres veces.

36.19 [II] ¿A qué distancia, enfrente de un espejo esférico cóncavo de 36 cm de radio, se debe colocar un objeto para formar una imagen real de un noveno de su tamaño? **Resp.** 0.18 m.

36.20 [II] Un objeto de 7.0 cm de altura se coloca a 15 cm de un espejo esférico convexo de 45 cm de radio. Describa su imagen. **Resp.** virtual, derecha, a 9.0 cm atrás del espejo, 4.2 cm de altura.

36.21 [II] ¿Cuál es la distancia focal de un espejo esférico convexo que forma una imagen de un sexto del tamaño de un objeto colocado a 12 cm del espejo? **Resp.** −2.4 cm.

36.22 [II] Se desea proyectar la imagen de una lámpara, amplificada cinco veces, sobre una pared que se encuentra a 12 m de la lámpara. ¿Qué clase de espejo esférico se requiere y cuál será su posición? **Resp.** cóncavo, de 5.0 m de radio, a 3.0 m de la lámpara.

36.23 [II] Calcule la posición y el diámetro de la imagen de la Luna sobre una esfera pulida de 20 cm de diámetro. El diámetro de la Luna es de 3 500 km y su distancia a la Tierra es de 384 000 km, aproximadamente. **Resp.** 5.0 cm dentro de la esfera, 0.46 mm de diámetro.

REFRACCIÓN DE LA LUZ 37

LA RAPIDEZ DE LA LUZ (c) medida de manera ordinaria varía de un material a otro. La luz (tratada macroscópicamente) viaja más rápido en el vacío, donde su rapidez es $c = 2.998 \times 10^8$ m/s. Su rapidez en el aire es de c/1.0003. En el agua su rapidez es c/1.33 y en un vidrio ordinario es de aproximadamente c/1.5. Sin embargo, microscópicamente la luz se compone de fotones y éstos sólo existen a la rapidez c. La pérdida aparente de su rapidez en diversos materiales se debe a la absorción y reemisión de la luz a medida que ésta pasa de un átomo a otro.

ÍNDICE DE REFRACCIÓN (n)**:** El ***índice absoluto de refracción*** de un material se define como

$$n = \frac{\text{rapidez de la luz en el vacío}}{\text{rapidez de la luz en el material}} = \frac{c}{v}$$

Para cualesquier dos materiales, el *índice relativo de refracción* del material 1, con respecto al material 2, es

$$\text{Índice relativo} = \frac{n_1}{n_2}$$

donde n_1 y n_2 son los índices de refracción absolutos de los dos materiales.

REFRACCIÓN: Cuando un rayo de luz pasa oblicuamente a través de la frontera entre dos materiales de índices de refracción diferentes, el rayo se desvía o quiebra. Este fenómeno, llamado ***refracción***, se muestra en la figura 37-1. Si $n_t > n_i$, el rayo se refracta como se muestra en la figura; se dobla hacia la normal cuando entra en el material 2. Sin embargo, si $n_t < n_i$, el rayo se refracta alejándose de la normal. Esta sería la situación en la figura 37-1 si la dirección del rayo se invirtiera. En cualquier caso, los rayos incidente y refractado (o transmitido) y la normal están en el mismo plano. Los ángulos θ_i y θ_t en la figura 37-1 se llaman ***ángulo de incidencia*** y ***ángulo de transmisión*** (o de refracción), respectivamente.

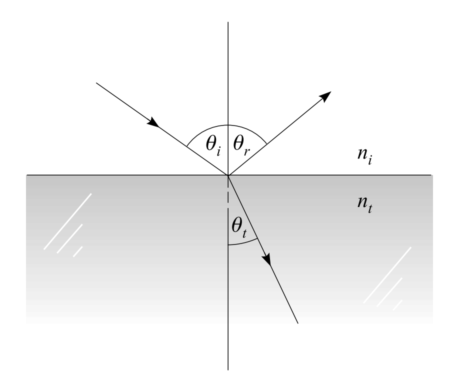


Figura 37-1

LEY DE SNELL: La forma en la que un rayo se refracta en la interfaz entre dos materiales con índices de refracción n_i y n_t está dada por la **ley de Snell***:*

$$n_i \operatorname{sen} \theta_i = n_t \operatorname{sen} \theta_t$$

donde θ_i y θ_t son como se muestra en la figura 37-1. Debido a que esta ecuación se aplica a la luz que se mueve a lo largo del rayo, un rayo de luz sigue la misma trayectoria cuando su dirección se invierte.

ÁNGULO CRÍTICO PARA LA REFLEXIÓN INTERNA TOTAL: Cuando la luz se refleja en una interfaz donde $n_i < n_t$, el proceso se llama ***reflexión externa***, cuando $n_i > n_t$ se trata de ***reflexión interna***. Suponga que un rayo de luz pasa de un material con cierto índice de refracción hacia otro de índice más bajo, como se muestra en la

figura 37-2. Parte de la luz incidente se refracta y parte se refleja en la interfaz. Debido a que θ_t debe ser mayor que θ_i, es posible hacer que este último sea suficientemente grande como para que $\theta_t = 90º$. Este valor de θ_i se conoce como el ***ángulo crítico*** θ_c. Para θ_i mayores que éste, no puede existir rayo refractado; toda la luz se refleja.

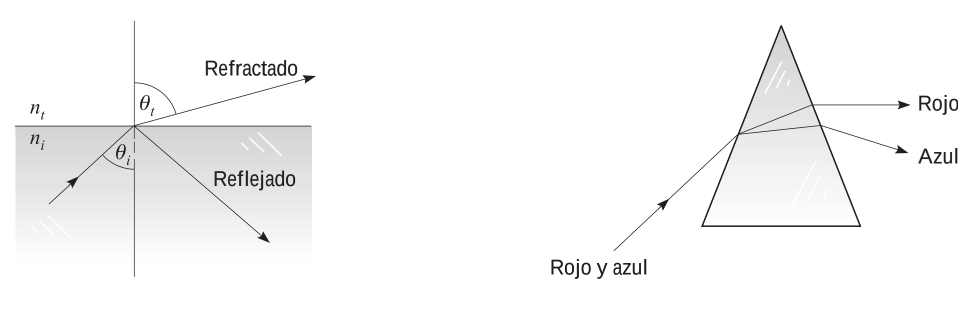


Figura 37-2 **Figura 37-3**

La condición para una ***reflexión total interna*** es que θ_i exceda el ángulo crítico θ_c, donde

$$n_i \text{ sen } \theta_c = n_t \text{ sen } 90º \qquad \text{o} \qquad \text{sen } \theta_c = \frac{n_t}{n_i}$$

Dado que el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que la unidad, esta relación confirma que la reflexión total interna sólo puede ocurrir si $n_i > n_t$.

UN PRISMA se puede usar para dispersar la luz en sus diversos colores, como se muestra en la figura 37-3. Puesto que el índice de refracción de un material varía con la longitud de onda, los distintos colores de la luz se refractan de manera diferente. En la mayoría de los materiales, el rojo es el que menos se refracta y el azul el que más.

PROBLEMAS RESUELTOS

37.1 [I] La rapidez de la luz en el agua es (3/4)c. ¿Cuál es el efecto, sobre la frecuencia y la longitud de onda de la luz, de pasar del vacío (o del aire, como buena aproximación) al agua? Calcule el índice de refracción del agua.

El mismo número de crestas de onda deja el aire cada segundo cuando entra al agua. Por tanto, la frecuencia es la misma en los dos materiales. Pero debido a que longitud de onda = (rapidez)/(frecuencia), la longitud de onda en el agua es tres cuartas partes la del aire.

El índice de refracción (absoluto) del agua es

$$n = \frac{\text{rapidez en el vacio}}{\text{rapidez en el agua}} = \frac{c}{(3/4)c} = \frac{4}{3} = 1.33$$

37.2 [I] Una placa de vidrio de 0.60 cm de espesor tiene un índice de refracción de 1.55. ¿Cuánto tarda un pulso de luz que incide normalmente en pasar a través de la placa?

$$t = \frac{x}{v} = \frac{0.0060 \text{ m}}{(2.998 \times 10^8/1.55) \text{ m/s}} = 3.1 \times 10^{-11} \text{ s}$$

37.3 [I] Como se muestra en la figura 37-4, un rayo de luz en el aire choca con una placa de vidrio ($n = 1.50$) con un ángulo incidente de 50º. Determine los ángulos de los rayos reflejados y transmitidos.

La ley de reflexión se aplica para el rayo reflejado. Por consiguiente, el ángulo de reflexión es de 50º, como se muestra.

Para el rayo refractado, n_i sen $\theta_i = n_t$ sen θ_t se convierte en,

$$\text{sen}\,\theta_t = \frac{n_i}{n_t}\,\text{sen}\,\theta_i = \frac{1.0}{1.5}\,\text{sen}\,50^\circ = 0.51$$

a partir de lo cual se deduce que $\theta_t = 31°$.

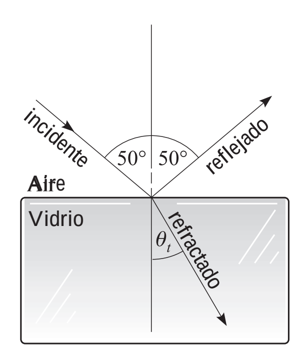


Figura 37-4

37.4 [I] El índice de refracción del diamante es de 2.42. ¿Cuál es el ángulo crítico para la luz que pasa del diamante al aire?

Se utiliza n_i sen $\theta_i = n_t$ sen θ_t para obtener

$$(2.42)\,\text{sen}\,\theta_c = (1)\,\text{sen}\,90.0^\circ$$

de donde se deduce que sen $\theta_c = 0.413$ y $\theta_c = 24.4°$.

37.5 [I] ¿Cuál es el ángulo crítico para la luz que pasa del vidrio ($n = 1.54$) al agua ($n = 1.33$)?

$$n_i\,\text{sen}\,\theta_i = n_t\,\text{sen}\,\theta_t \quad \text{se convierte en} \quad n_i\,\text{sen}\,\theta_c = n_t\,\text{sen}\,90^\circ$$

de donde

$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{n_t}{n_i} = \frac{1.33}{1.54} = 0.864 \qquad \text{o} \qquad \theta_c = 59.7^\circ$$

37.6 [II] Una capa de aceite ($n = 1.45$) flota sobre agua ($n = 1.33$). Un rayo de luz brilla en el aceite con un ángulo incidente de 40.0º. Encuentre el ángulo que el rayo hace en el agua (vea la figura 37-5).

Para la interfaz aire-aceite, la ley de Snell da

$$n_{\text{aire}}\,\text{sen}\,40^\circ = n_{\text{aceite}}\,\text{sen}\,\theta_{\text{aceite}}$$

En la interfaz aceite-agua, se tiene (usando la igualdad de los ángulos alternos)

$$n_{\text{aceite}}\,\text{sen}\,\theta_{\text{aceite}} = n_{\text{agua}}\,\text{sen}\,\theta_{\text{agua}}$$

Entonces, n_{aire} sen 40.0º $= n_{\text{agua}}$ sen θ_{agua}; la refracción completa ocurre como si la capa de aceite estuviera ausente. Al resolver

$$\text{sen}\,\theta_{\text{agua}} = \frac{n_{\text{aire}}\,\text{sen}\,40.0^\circ}{n_{\text{agua}}} = \frac{(1)(0.643)}{1.33} \qquad \text{o} \qquad \theta_{\text{agua}} = 28.9^\circ$$

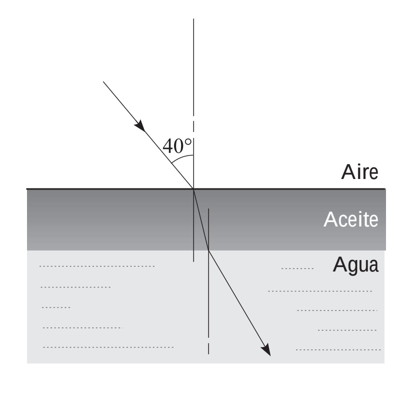


Figura 37-5

37.7 [II] Como se muestra en la figura 37-6, un pequeño cuerpo luminoso, en el fondo de una alberca con agua ($n = 4/3$) de 2.00 m de profundidad, emite rayos hacia arriba en todas direcciones. En la superficie del agua se forma un área circular de luz. Determine el radio R del círculo de luz.

El área circular se forma por los rayos refractados en el aire. El ángulo θ_c debe ser el ángulo crítico, porque la reflexión total interna, y por tanto ninguna refracción, ocurre cuando el ángulo de incidencia en el agua es mayor que el ángulo crítico. Entonces, se tiene,

$$\text{sen}\,\theta_c = \frac{n_a}{n_w} = \frac{1}{4/3} \qquad \text{o} \qquad \theta_c = 48.6^\circ$$

De la figura,

$$R = (2.00\text{ m})\tan\theta_c = (2.00\text{ m})(1.13) = 2.26\text{ m}$$

37.8 [I] ¿Cuál es el mínimo valor del índice de refracción para un prisma de 45.0º que se utiliza para desviar un rayo de luz mediante reflexión interna total a través de su ángulo recto? (Vea la figura 37-7.)

El rayo entra al prisma sin desviarse, ya que choca con el lado *AB* en posición normal. Entonces forma un ángulo incidente de 45.0º con la normal al lado *AC*. El ángulo crítico del prisma debe ser menor a 45.0º si el rayo se reflejará totalmente en el lado *AC* y de esta manera girará 90º. De n_i sen $\theta_c = n_t$ sen 90º con $n_t = 1.00$,

$$n_i \text{ mínimo} = \frac{1}{\text{sen } 45.0°} = 1.41$$

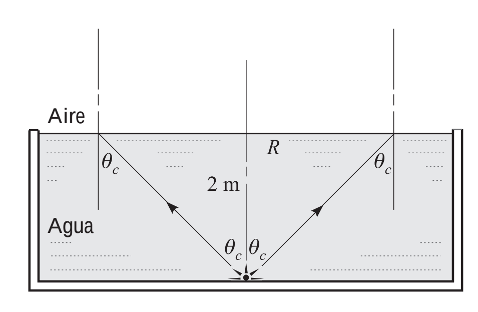


Figura 37-6

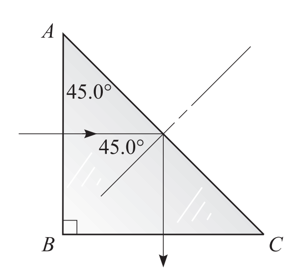


Figura 37-7

37.9 [II] El prisma de vidrio que se muestra en la figura 37-8 tiene un índice de refracción de 1.55. Encuentre el ángulo de desviación *D* para el caso mostrado.

No ocurre desviación en la superficie de entrada porque el ángulo de incidencia es cero. En la segunda superficie, $\theta_i = 30º$ (pues sus lados son mutuamente perpendiculares a los lados del ángulo del vértice). Entonces la ley de Snell da

$$n_i \text{ sen } \theta_i = n_t \text{ sen } \theta_t \qquad \text{o} \qquad \text{sen } \theta_t = \frac{1.55}{1} \text{ sen } 30°$$

de donde $\theta_t = 50.8º$. Pero $D = \theta_t - \theta_i$ así que $D = 21°$.

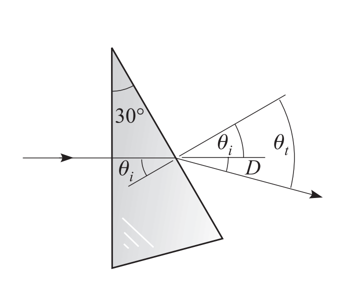


Figura 37-8

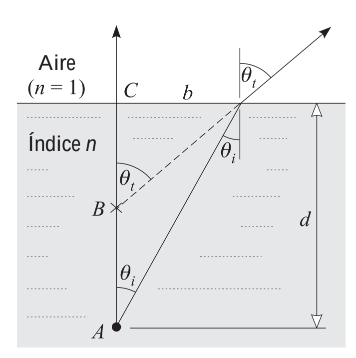


Figura 37-9

37.10 [III] Como se observa en la figura 37-9, un objeto está a una profundidad *d* abajo de la superficie de un material transparente de índice de refracción *n*. Cuando se observa desde un punto casi directamente sobre la superficie, ¿a qué profundidad parece estar el objeto?

Los dos rayos de *A* que se muestran emergiendo al aire parecen venir desde el punto *B*. Por tanto, la profundidad aparente es *CB*. Se tiene que,

$$\frac{b}{\overline{CB}} = \tan\,\theta_t \qquad \text{y} \qquad \frac{b}{\overline{CA}} = \tan\,\theta_i$$

Si el objeto se observa casi directamente desde arriba, entonces los ángulos θ_t y θ_i serán muy pequeños. Para ángulos pequeños, el seno y la tangente son aproximadamente iguales. Por tanto,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{\tan\,\theta_i}{\tan\,\theta_t} \approx \frac{\text{sen}\,\theta_i}{\text{sen}\,\theta_t}$$

Pero n sen $\theta_i = (1)$ sen θ_t, de donde

$$\frac{\text{sen}\,\theta_i}{\text{sen}\,\theta_t} = \frac{1}{n}$$

De aquí que,

$$\text{Profundidad aparente}\ \ \overline{CB} = \frac{\text{profundidad real}\ \ \overline{CA}}{n}$$

La profundidad aparente es sólo una fracción $1/n$ de la profundidad real *d*.

37.11 [I] Una placa de vidrio de 4.00 mm de espesor se observa desde arriba a través de un microscopio. El microscopio debe bajarse 2.58 mm para que el operador cambie de ver la superficie superior a ver la superficie inferior a través del vidrio. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? Use los resultados del problema 37.10.

De acuerdo con el resultado del problema 37.10, la profundidad aparente de la placa será $1/n$ de la profundidad real que tiene. Por tanto,

$$(\text{espesor real})\,(1/n) = \text{espesor aparente}$$

o

$$(4.00\ \text{mm})\,(1/n) = 2.58\ \text{mm}$$

Esto produce $n = 1.55$ para el vidrio.

37.12 [III] Como se muestra en la figura 37-10, un rayo penetra por la cara lateral de un largo bloque rectangular de vidrio que tiene un índice de refracción de n_2. Demuestre que todo rayo que entra se puede reflejar totalmente en su interior sólo si $n_2 > 1.414$.

Entre más grande es θ_1, más grande será θ_2 y más pequeño θ_3. Por tanto, es más probable que el rayo escape por el lado del bloque si $\theta_1 = 90$º. En este caso,

$$n_i\ \text{sen}\ \theta_1 = n_2\ \text{sen}\ \theta_2 \qquad \text{se convierte en} \qquad (1)(1) = n_2\ \text{sen}\ \theta_2$$

Para que el rayo apenas escape, $\theta_4 = 90°$. Entonces

$$n_2\ \text{sen}\ \theta_3 = n_1\ \text{sen}\ \theta_4 \qquad \text{se convierte en} \qquad n_2\ \text{sen}\ \theta_3 = (1)(1)$$

En consecuencia, se tienen que satisfacer dos condiciones: n_2 sen $\theta_2 = 1$ y n_2 sen $\theta_3 = 1$. La razón de éstas da

$$\frac{\text{sen}\,\theta_2}{\text{sen}\,\theta_3} = 1$$

Pero, a partir de la figura, se ve que sen $\theta_3 = \cos\,\theta_2$, y esto da

$$\tan\,\theta_2 = 1 \qquad \text{o} \qquad \theta_2 = 45.00°$$

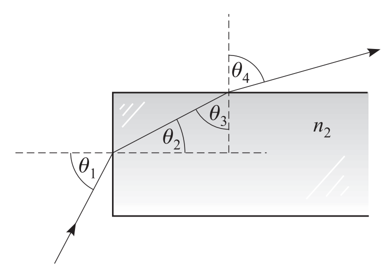


Figura 37-10

Entonces, puesto que n_2 sen $\theta_2 = 1$, se tiene

$$n_2 = \frac{1}{\text{sen } 45.00°} = 1.414$$

Éste es el valor más pequeño posible que puede tener el índice para que exista una reflexión total interna de todos los rayos que entran por el extremo del bloque. Es posible obtener esta respuesta por inspección. ¿Cómo?

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

37.13 [I] La rapidez de la luz en cierto vidrio es de 1.91×10^8 m/s. ¿Cuál es el índice de refracción del vidrio? **Resp.** 1.57.

37.14 [I] ¿Cuál es la frecuencia de la luz que tiene una longitud de onda en el aire de 546 nm? ¿Cuál es su frecuencia en el agua ($n = 1.33$)? ¿Cuál es su rapidez en el agua? ¿Cuál su longitud de onda en el agua? **Resp.** 549 THz, 549 THz, 2.25×10^8 m/s, 411 nm.

37.15 [I] Un haz de luz choca contra una superficie de agua con un ángulo incidente de 60º. Determine la dirección de los rayos reflejado y refractado. Para el agua $n = 1.33$. **Resp.** 60º reflejado en el aire, 41º refractado en el agua.

37.16 [I] El ángulo crítico para la luz que pasa de la sal de roca al aire es de 40.5º. Calcule el índice de refracción de la sal de roca. **Resp.** 1.54.

37.17 [I] ¿Cuál es el ángulo crítico cuando la luz pasa del vidrio ($n = 1.50$) al aire? **Resp.** 41.8º.

37.18 [II] Los índices absolutos de refracción del diamante y del vidrio crown son 5/2 y 3/2, respectivamente. Calcule *a*) el índice de refracción del diamante relativo al vidrio crown y *b*) el ángulo crítico entre el diamante y el vidrio crown. **Resp.** *a*) 5/3; *b*) 37º.

37.19 [II] Una alberca con agua ($n = 4/3$) tiene 60 cm de profundidad. Calcule la profundidad aparente cuando se observa verticalmente a través del aire. **Resp.** 45 cm.

37.20 [III] En un vaso, una capa de benceno ($n = 1.50$) de 6 cm de profundidad flota sobre agua ($n = 1.33$) de 4 cm de profundidad. Determine la distancia aparente de la parte más baja del vaso a la superficie superior del benceno cuando se observa verticalmente a través del aire. **Resp.** 7 cm.

37.21 [II] Un espejo se fabrica con una placa de vidrio ($n = 3/2$) de 1.0 cm de espesor y plateado en su parte posterior. Un hombre se encuentra a 50.0 cm de la cara frontal del espejo. Si él observa de manera perpendicular hacia el espejo, ¿a qué distancia atrás de la cara frontal del espejo parecerá estar su imagen? **Resp.** 51.3 cm.

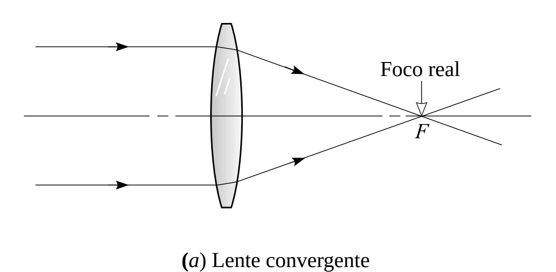
37.22 [II] Una barra recta se sumerge de manera parcial en agua ($n = 1.33$). Su parte sumergida parece estar inclinada a 45º con la superficie cuando se observa verticalmente a través del aire. ¿Cuál es la inclinación real de la barra? **Resp.** arctan 1.33 = 53º.

37.23 [II] El índice de refracción de cierto tipo de vidrio es de 1.640 para la luz azul y de 1.605 para la luz roja. Cuando un haz de luz blanca (que contiene todos los colores) entra en una placa de este vidrio con un ángulo incidente de 40º, ¿cuál es el ángulo en el vidrio entre las partes azul y roja del haz refractado? **Resp.** 0.53º.

LENTES DELGADOS 38

TIPOS DE LENTES: Como se muestra en la figura 38-1, los lentes **convergentes** o **positivos** son más gruesos en su centro que en la periferia y convergirán un haz de luz paralela hasta un foco real. Los lentes **divergentes** o **negativos** son más delgados en su centro que en su periferia y divergirán un haz de luz paralela desde un foco virtual.

El *foco principal* (o **punto focal**) de un lente delgado con superficies esféricas es el punto F donde los rayos paralelos y próximos al eje central u óptico se traen hasta un foco; este foco es real para un lente convergente y virtual para un lente divergente. La **distancia focal** f es la distancia que hay del foco principal al lente. Como cada lente en la figura 38-1 se puede invertir sin alterar los rayos, para cada lente existen dos puntos focales simétricos.



(*a*) Lente convergente

Foco virtual

F

(*b*) Lente divergente

Figura 38-1

TRAZO DE RAYOS: Cuando un rayo pasa a través de un lente se refracta o "comba" en cada interfaz, como se muestra en la figura 38-1. Cuando se trata con lentes delgados se puede suponer, por simplicidad, que la curva se presenta a lo largo de un plano vertical que pasa por la mitad del lente (vea la figura 38-2).

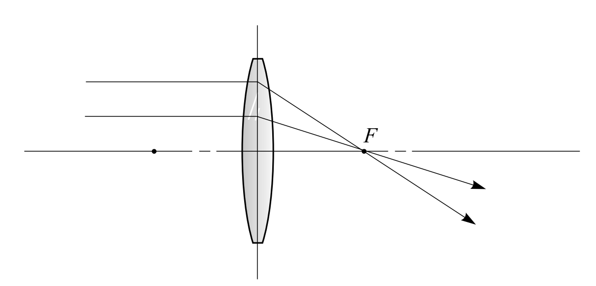


Figura 38-2

Como se trató previamente en el tema de los espejos (capítulo 36), cualquier dos rayos que se originan desde un punto en el objeto, trazados a través del sistema, ubicarán la imagen de dicho punto. Existen tres rayos especialmente convenientes de usar porque se sabe, sin realizar ningún cálculo, exactamente cómo pasarán a través de un lente. Estos rayos, que se muestran en la figura 38-3, se propagan tanto en lentes convexos como en cóncavos. Observe que un rayo originado para el centro (C) de un lente delgado pasa recto sin desviarse.

RELACIÓN OBJETO-IMAGEN para lentes delgados convergentes y divergentes:

Figura 38-3

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f}$$

donde s_o es la distancia del objeto desde el lente, s_i es la distancia de la imagen desde el lente y f es la distancia focal del lente. Se considera que los lentes son delgados y los rayos de luz paraxiales (cercanos al eje principal). Entonces, con luz que entra desde la izquierda,

- s_o es positiva cuando el objeto está a la izquierda del lente.
- s_o es positiva para un objeto real y negativa para un objeto virtual (vea el capítulo 39).
- s_i es positiva cuando la imagen está a la derecha del lente.
- s_i es positiva para una imagen real y negativa para una imagen virtual.
- f es positiva para un lente convergente y negativa para un lente divergente.
- y_i es positiva para una imagen derecha (es decir, una arriba del eje).
- y_o es positiva para un objeto derecho (es decir, arriba del eje).

Además,
$$M_T=\frac{y_i}{y_o}=-\frac{s_i}{s_o}$$

- M_T es negativa cuando la imagen está invertida.

Los lentes convergentes forman imágenes reales invertidas de objetos reales cuando dichos objetos se localizan a la izquierda del punto focal, enfrente del lente (vea la figura 38-4). Cuando el objeto está entre el punto focal y el lente, la imagen resultante es virtual (y del mismo lado en que se encuentra el objeto), derecha y alargada.

Los lentes divergentes sólo producen imágenes virtuales, derechas y más pequeñas que el objeto real.

ECUACIÓN DEL FABRICANTE DE LENTES:

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

donde n es el índice de refracción del material de que está hecha el lente, y R_1 y R_2 son los radios de curvatura de las dos superficies de los lentes. Esta ecuación se cumple para todo tipo de lentes delgados. Un radio de curvatura, R, es positivo cuando su centro de curvatura está a la derecha de la superficie y negativo cuando su centro de curvatura está a la izquierda de la superficie.

Si un lente con índice de refracción n_1 se sumerge en un material con índice n_2, entonces n, en la ecuación del fabricante de lentes, se debe sustituir por n_1/n_2.

LA POTENCIA DE UN LENTE en dioptrías (m^{-1}) es igual a $1/f$, donde f es la distancia focal expresada en metros.

LENTES EN CONTACTO: Cuando dos lentes delgados, que tienen distancias focales f_1 y f_2, están en contacto estrecho, la distancia focal de la combinación está dada por

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$$

Por lo general, para lentes en contacto estrecho, la potencia de la combinación es igual a la suma de sus potencias individuales.

PROBLEMAS RESUELTOS

38.1 [II] Un objeto OO' tiene 4.0 cm de altura y está a 20 cm enfrente de un lente convexo de $+12$ cm de distancia focal. Determine la posición y altura de su imagen II' *a*) por construcción y *b*) analíticamente.

a) Los siguientes dos rayos convenientes que salen de O ubicarán las imágenes (vea la figura 38-4).

1. El rayo OP, paralelo al eje óptico, después de la refracción debe pasar por el foco F.
2. Un rayo que pasa por el centro óptico C de un lente delgado no se desvía de manera apreciable. Entonces el rayo OCI se puede dibujar como una línea recta.

La intersección I de estos dos rayos es la imagen de O. En consecuencia, II' representa la posición y el tamaño de la imagen de OO'. La imagen es real, invertida, aumentada y a una distancia del lente mayor que la del objeto. (Si el objeto estuviese en II', la imagen en OO' sería real, invertida y más pequeña.)

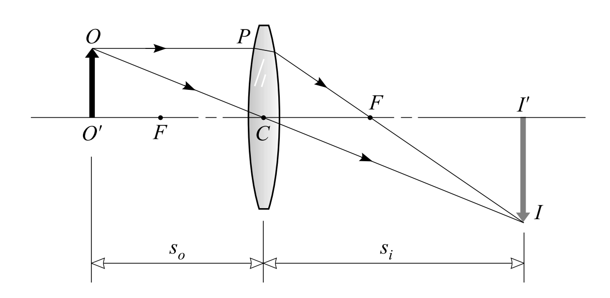


Figura 38-4

b)
$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{20\text{ cm}}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{12\text{ cm}} \quad \text{o} \quad s_i = 30\text{ cm}$$

La imagen es real (pues s_i es positiva) y está 30 cm atrás del lente.

$$M_T=\frac{y_i}{y_o}=-\frac{s_i}{s_o}=-\frac{30\text{ cm}}{20\text{ cm}}=-1.5 \quad \text{o} \quad y_i=M_T y_o=(-1.5)(4.0\text{ cm})=-6.0\text{ cm}$$

La amplificación negativa y la altura de la imagen indican que la imagen está invertida.

38.2 [II] Un objeto OO' está 5.0 cm enfrente de un lente convexo delgado con distancia focal de $+7.5$ cm. Determine la posición y amplificación de su imagen II' *a*) por construcción y *b*) analíticamente.

a) Escoja dos rayos convenientes que salgan de O, como en la figura 38-5.

1. Un rayo OP, paralelo al eje óptico, se refracta de tal manera que pasa por el foco F.
2. Un rayo OCN, que pasa por el centro óptico de la lente, se dibuja como una línea recta.

Estos dos rayos no se intersecan, pero aparentemente se originan en el punto I. Entonces II' representa la posición y el tamaño de la imagen de OO'.

Cuando el objeto está entre F y C, la imagen es virtual, derecha y aumentada, como se muestra.

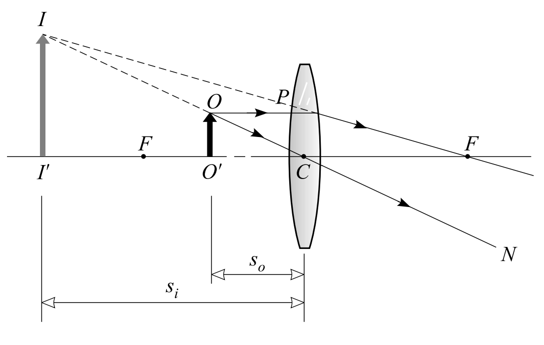


Figura 38-5

b)
$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{5.0\text{ cm}}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{7.5\text{ cm}} \quad \text{o} \quad s_i = -15\text{ cm}$$

Como s_i es negativa, la imagen es virtual (se encuentra del mismo lado del lente que el objeto) y está a 15 cm enfrente del lente. Además,

$$M_T=\frac{y_i}{y_o}=-\frac{s_i}{s_o}=-\frac{-15\text{ cm}}{5.0\text{ cm}}=3.0$$

Puesto que la amplificación es negativa, la imagen está derecha.

38.3 [II] Un objeto OO', de 9.0 cm de altura, se encuentra a 27 cm enfrente de un lente cóncavo delgado de -18 cm de distancia focal. Determine la posición y altura de su imagen II' *a*) por construcción y *b*) analíticamente.

a) Escoja los dos rayos convenientes desde O que se muestran en la figura 38-6.

1. Un rayo OP, paralelo al eje óptico, se refracta hacia afuera en la dirección D como si saliera del foco principal F.
2. Un rayo que pasa por el centro óptico de la lente se dibuja como una línea recta OC.

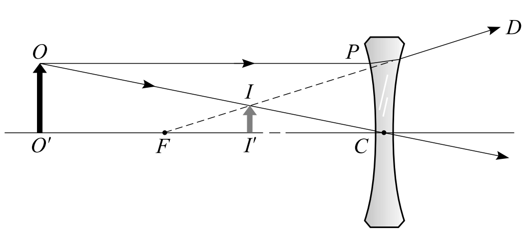


Figura 38-6

Entonces II' es la imagen de OO'. Las imágenes formadas por lentes cóncavos o divergentes son virtuales, derechas y más pequeñas.

b) $$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{f} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{27\text{ cm}}+\frac{1}{s_i}=-\frac{1}{18\text{ cm}} \qquad \text{o} \qquad s_i=-10.8\text{ cm}=-11\text{ cm}$$

Como s_i es negativa, la imagen es virtual y se encuentra 11 cm enfrente del lente.

$$M_T=\frac{y_i}{y_o}=-\frac{s_i}{s_o}=-\frac{-10.8\text{ cm}}{27\text{ cm}}=0.40 \qquad \text{y de este modo} \qquad y_i=y_oM_T=(0.40)(9.0\text{ cm})=3.6\text{ cm}$$

Cuando $M_T > 0$ la imagen está vertical y la misma conclusión se obtiene del hecho de que $y_i > 0$.

38.4 [I] Un lente convergente delgado ($f = 20$ cm) se coloca a 37 cm frente a una pantalla. ¿Dónde se debe situar un objeto si su imagen tiene que aparecer en la pantalla?

Se sabe que $s_i = +37$ cm y $f = +20$ cm. La ecuación de los lentes da

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{37\text{ cm}}=\frac{1}{20\text{ cm}} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{s_o}=0.050\text{ cm}^{-1}-0.027\text{ cm}^{-1}=0.023\text{ cm}^{-1}$$

de donde $s_o = 43.5$ cm. El objeto se debe colocar a 44 cm del lente.

38.5 [II] Calcule la posición y distancia focal del lente delgado convergente que proyectará la imagen de una lámpara, amplificada cuatro veces, sobre una pantalla que está a 10 m de la lámpara.

Aquí $s_o + s_i = 10.0$. Por otra parte, $M_T = -s_i/s_o$, pero tales imágenes reales están invertidas, en consecuencia $M_T = -4$. Y por tanto $s_i = 4s_o$ y por ende $s_o = 2.0$ m y $s_i = 8.0$ m. Entonces

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s_o}+\frac{1}{s_i}=\frac{1}{2.0\text{ m}}+\frac{1}{8.0\text{ m}}=\frac{5}{8.0\text{ m}} \qquad \text{o} \qquad f=\frac{8.0\text{ m}}{5}=+1.6\text{ m}$$

38.6 [II] ¿Cuáles son las dos posiciones donde un lente convergente de $+9.00$ cm de distancia focal formará las imágenes de un objeto luminoso sobre una pantalla colocada a 40.0 cm del objeto?

Dado que $s_o + s_i = 40.0$ cm y $f = +9.00$ cm, se tiene

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{40.0\text{ cm}-s_o}=\frac{1}{9.0\text{ cm}} \qquad \text{o} \qquad s_o^2-40.0s_o+360=0$$

Al utilizar la fórmula cuadrática se obtiene

$$s_o=\frac{40.0\pm\sqrt{1\,600-1\,440}}{2}$$

de donde $s_o = 13.7$ cm y $s_o = 26.3$ cm. Las dos posiciones de la lente son 13.7 cm y 26.3 cm medidas desde el objeto.

38.7 [II] Un lente convergente con 50 cm de distancia focal forma una imagen real que es 2.5 veces más grande que el objeto. ¿Cuán lejos se encuentra el objeto de la imagen?

Las imágenes reales formadas por los lentes convergentes simples están todas invertidas. En consecuencia, $M_T = -s_i/s_o = -2.5$ y así $s_i = 2.5s_o$. Por tanto,

$$\frac{1}{s_o}+\frac{1}{2.5s_o}=\frac{1}{50\text{ cm}} \qquad \text{o} \qquad s_o=70\text{ cm}$$

Esto da $s_i = (2.5)(70\text{ cm}) = 175$ cm. Así que la distancia requerida es

$$s_i+s_o=70\text{ cm}+175\text{ cm}=245\text{ cm}=2.5\text{ m}$$

38.8 [II] Un lente delgado de distancia focal f proyecta sobre una pantalla la imagen de un objeto luminoso amplificado N veces. Demuestre que la distancia del lente a la pantalla es $(N+1)f$.

La imagen es real, ya que ésta se puede ver en una pantalla, y por lo mismo $s_i > 0$. Entonces se tiene

$$N = \left|-\frac{s_i}{s_o}\right| = s_i\left(\frac{1}{s_o}\right) = s_i\left(\frac{1}{f} - \frac{1}{s_i}\right) = \frac{s_i}{f} - 1 \qquad \text{o} \qquad s_i = (N+1)f$$

38.9 [II] Un lente delgado tiene una cara convexa con un radio de 20 cm y la otra cara cóncava con un radio de 40 cm. El lente está hecho de vidrio con índice de refracción de 1.54. Calcule la distancia focal del lente y diga si es un lente convergente o divergente.

En primer lugar, advierta que $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$, porque las dos superficies tienen sus centros de curvatura a la derecha. En consecuencia,

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = (1.54-1)\left(\frac{1}{20\text{ cm}} - \frac{1}{40\text{ cm}}\right) = \frac{0.54}{40\text{ cm}} \qquad \text{o} \qquad f = +74\text{ cm}$$

Como f tiene signo positivo, el lente es convergente.

38.10 [II] Un lente doble delgado biconvexo tiene sus caras con radios de 18 y 20 cm. Cuando un objeto se encuentra a 24 cm del lente, se forma una imagen real a 32 cm del mismo. Determine *a*) la distancia focal del lente y *b*) el índice de refracción del material del lente.

Recuerde que un lente convexo tiene una distancia focal positiva.

a) $$\frac{1}{f} = \frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{24\text{ cm}} + \frac{1}{32\text{ cm}} = \frac{7}{96\text{ cm}} \qquad \text{o} \qquad f = \frac{96\text{ cm}}{7} = +13.7\text{ cm} = 14\text{ cm}$$

Aquí $R_1 > 0$ y $R_2 < 0$.

b) $$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{13.7} = (n-1)\left(\frac{1}{18\text{ cm}} - \frac{1}{-20\text{ cm}}\right) \qquad \text{o} \qquad n = 1.7$$

38.11 [II] Un lente delgado de vidrio ($n = 1.50$) tiene una distancia focal de +10 cm en el aire. Calcule su distancia focal en el agua ($n = 1.33$).

Al usar

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

se obtiene, *Para el aire*: $$\frac{1}{10} = (1.50-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Para el agua: $$\frac{1}{f} = \left(\frac{1.50}{1.33} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Si divide una ecuación entre la otra se obtiene $f = 5.0/0.128 = 39$ cm.

38.12[III] Un lente delgado biconvexo tiene radios de 20.0 cm. El índice de refracción del vidrio es de 1.50. Calcule la distancia focal del lente *a*) en aire y *b*) cuando se sumerge en disulfuro de carbono ($n = 1.63$).

Para un lente delgado con un índice de n_1, inmerso en un medio circundante de índice n_2,

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Aquí $R_1 = +20.0$ cm y $R_2 = -20.0$ cm y así

a) $$\frac{1}{f} = (1.50-1)\left(\frac{1}{20\text{ cm}} - \frac{1}{-20\text{ cm}}\right) \qquad \text{o} \qquad f = +20.0\text{ cm}$$

b) $$\frac{1}{f} = \left(\frac{1.50}{1.63} - 1\right)\left(\frac{1}{20\text{ cm}} - \frac{1}{-20\text{ cm}}\right) \qquad \text{o} \qquad f = -125\text{ cm}$$

Cuando $n_2 > n_1$ la distancia focal es negativa y por lo mismo el lente es divergente.

38.13 [I] Dos lentes delgados, con distancias focales +9.0 y −6.0 cm, se ponen en contacto. Calcule la distancia focal de la combinación.

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{9.0\text{ cm}}-\frac{1}{6.0\text{ cm}}=-\frac{1}{18\text{ cm}} \qquad \text{o} \qquad f=-18\text{ cm}$$

La combinación de lentes es divergente.

38.14 Un lente acromático se forma con dos lentes delgados en contacto, cuyas potencias son +10.0 y −6.0 dioptrías. Determine la potencia y la distancia focal de la combinación.

Como los recíprocos de las distancias focales se suman,

$$\text{Potencia} = +10.0 - 6.0 = +4.0 \text{ dioptrías} \quad \text{y} \quad \text{distancia focal} = \frac{1}{\text{potencia}} = \frac{1}{+4.0\text{ m}^{-1}} = +25\text{ cm}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

38.15 [I] Dibuje los diagramas para mostrar cualitativamente la posición, la naturaleza y el tamaño de la imagen formada por un lente convergente con distancia focal *f* para las siguientes distancias del objeto: *a*) en infinito, *b*) mayor que 2*f*, *c*) igual a 2*f*, *d*) entre 2*f* y *f*, *e*) igual a *f*, *f*) menor que *f*.

38.16 [I] Determine la naturaleza, posición y amplificación transversal de la imagen formada por un lente convergente delgado con distancia focal de +100 cm cuando la distancia del objeto al lente es *a*) 150 cm, *b*) 75.0 cm. **Resp.** *a*) real, invertida, 300 cm atrás del lente, 2:1; *b*) virtual, derecha, 300 cm enfrente del lente, 4:1.

38.17 [II] ¿Para qué posiciones (dos) del objeto su imagen será amplificada 8.0 veces por un lente delgado con distancia focal de +4.0 cm? **Resp.** 4.5 cm del lente (imagen real e invertida), 3.5 cm del lente (imagen virtual y derecha).

38.18 [II] ¿Cuáles son la naturaleza y la distancia focal de un lente delgado que formará una imagen real que tenga un tercio de las dimensiones de un objeto ubicado a 9.0 cm del lente? **Resp.** convergente, +2.3 cm.

38.19 [II] Describa completamente la imagen de un objeto que tiene 10 cm de altura y está a 28 cm de un lente divergente con distancia focal −7.0 cm. **Resp.** virtual, derecha, más pequeña, a 5.6 cm delante del lente, 2.0 cm de altura.

38.20 [II] Calcule la distancia focal de un lente que producirá una imagen derecha y a 10 cm del lente cuando la distancia del objeto al lente es *a*) 200 cm, *b*) muy grande. **Resp.** *a*) −11 cm; *b*) −10 cm.

38.21 [II] Un objeto luminoso y una pantalla están separados 12.5 m. ¿Cuáles son la posición y la distancia focal de un lente que proyectará sobre la pantalla una imagen del objeto amplificada 24 veces? **Resp.** 0.50 m del objeto, +0.48 m.

38.22 [II] Un lente plano-cóncavo tiene una cara esférica de 12 cm de radio y una distancia focal de −22.2 cm. Calcule el índice de refracción del material del lente. **Resp.** 1.5.

38.23 [II] Un lente convexo-cóncavo tiene caras con radios de 3.0 y 4.0 cm, respectivamente, y está hecho de vidrio con índice de refracción 1.6. Determine *a*) su distancia focal y *b*) la amplificación lineal de la imagen cuando el objeto está a 28 cm del lente. **Resp.** *a*) +20 cm; *b*) 2.5:1.

38.24 [II] Un lente de vidrio biconvexo ($n = 1.50$) tiene radios de curvatura de 8 cm en cada una de sus caras. Calcule su distancia focal en aire y cuando se sumerge en agua ($n = 1.33$). **Resp.** +8 cm, +0.3 m.

38.25 [II] Dos lentes delgados, con distancias focales +12 y −30 cm, están en contacto. Calcule la distancia focal y la potencia de la combinación. **Resp.** +20 cm, +5.0 dioptrías.

38.26 [II] ¿Cuál debe ser la distancia focal de un tercer lente delgado que se pone en contacto con dos lentes delgados, de 16 cm y −23 cm de distancia focal, para generar un lente con distancia focal de −12 cm? **Resp.** −9.8 cm.

INSTRUMENTOS ÓPTICOS 39

COMBINACIÓN DE LENTES DELGADOS: Para ubicar la imagen producida por la combinación de dos lentes: 1) calcule la posición de la imagen producida por el primer lente solo, sin tomar en cuenta el segundo lente; 2) luego considere esta imagen como el objeto para el segundo lente, y ubique su imagen como producida por el segundo lente solo. Esta última imagen es la imagen requerida.

Si la imagen formada sólo por el primer lente está en la parte posterior del segundo lente, entonces dicha imagen es un objeto virtual para el segundo lente y su distancia desde el segundo lente se considera negativa.

EL OJO utiliza un lente de foco variable para formar una imagen sobre la retina en la parte posterior del ojo. El **punto cercano** del ojo, representado por d_n, es la distancia más cercana al ojo desde donde un objeto se puede ver con claridad. Para un ojo normal, d_n es aproximadamente 25 cm. Las personas que padecen *hipermetropía* sólo pueden distinguir objetos que están lejos de su ojo; las personas *miopes* sólo pueden ver objetos que estén cerca de su ojo.

AMPLIFICACIÓN ANGULAR (M_A), también conocida a veces como ***poder de amplificación***, es la razón de los ángulos subtendidos por las imágenes en la retina con y sin el instrumental en el sitio (vea la figura 39-1).

UN VIDRIO AMPLIFICADOR (LUPA) es un lente convergente utilizado para formar una imagen virtual, recta y amplificada de un objeto colocado dentro de su distancia focal. La amplificación angular debida a un amplificador con distancia focal f (donde los lentes están cerca del ojo) es $(d_n/f) + 1$ si la imagen es emitida en el punto cercano (figura 39-1*b*). Alternativamente, si la imagen está en el infinito, para una mirada reposada, la amplificación angular es d_n/f.

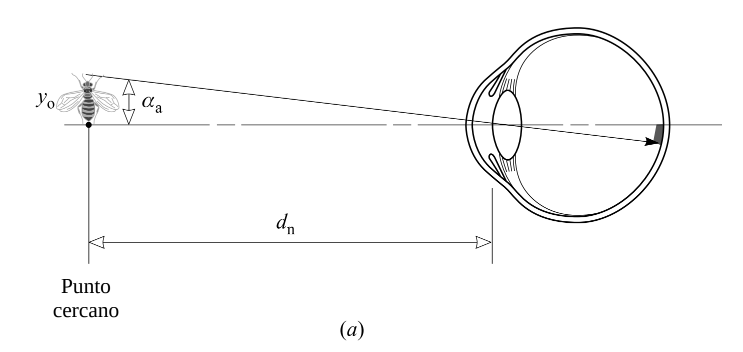
UN MICROSCOPIO que consiste de dos lentes convergentes, un lente objetivo (distancia focal f_O) y un lente ocular (f_E), tiene

$$M_A = M_{AE}M_{TO}$$

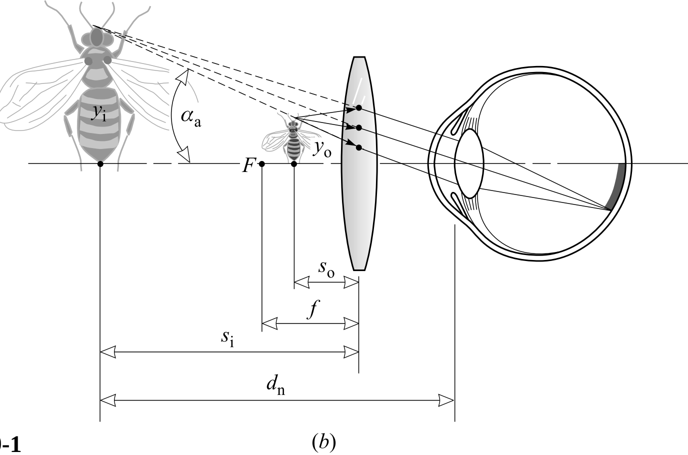
$$M_A = \left(\frac{d_n}{f_E} + 1\right)\left(\frac{s_{iO}}{f_O} - 1\right)$$

donde s_{iO} es la distancia desde el objetivo a la imagen que se forma. Esta ecuación se mantiene cuando la imagen final está en el punto cercano, $d_n = 25$ cm.

UN TELESCOPIO que tiene un lente objetivo (o espejo) con distancia focal f_O y un ocular con distancia focal f_E tiene una amplificación $M_A = -f_O/f_E$.



(*a*)



(*b*)

Figura 39-1

PROBLEMAS RESUELTOS

39.1 [II] Cierta persona miope no puede distinguir objetos que estén más allá de 80 cm de sus ojos. ¿Cuál es la potencia en dioptrías de los lentes de sus anteojos, los cuales le permitirán ver los objetos distantes con claridad?

La imagen, que debe estar derecha, debe estar en el mismo lado del lente a la distancia del objeto (por lo que la imagen es virtual y $s_i = -80$ cm) y más próxima al lente que el objeto (así es que están indicados lentes negativos o divergentes). Recuerde que, para imágenes virtuales formadas por un lente cóncavo, $s_o > |s_i|$. Como el objeto está a una gran distancia, s_o es muy grande y $1/s_o$ es prácticamente cero. Entonces

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \qquad \text{o} \qquad 0 - \frac{1}{80} = \frac{1}{f} \qquad \text{o} \qquad f = -80 \text{ cm (divergente)}$$

y

$$\text{Poder en dioptrías} = \frac{1}{f \text{ en metros}} = \frac{1}{-0.80 \text{ m}} = -1.3 \text{ dioptrías}$$

39.2 [II] Cierta persona hipermétrope no puede ver con claridad objetos que estén a menos de 75 cm de sus ojos. Determine la potencia de los lentes de sus anteojos que le permitirán leer a una distancia de 25 cm.

La imagen, que debe ser derecha, debe estar en el mismo lado del lente donde está el escrito (por lo que la imagen es virtual y $s_i = -75$ cm) y más alejada del lente que el texto (por lo que se recomiendan lentes convergentes o positivos). Recuerde que, para imágenes virtuales formadas por un lente convergente, $|s_i| > s_o$. Se tiene

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{25} - \frac{1}{75} \qquad \text{o} \qquad f = +37.5 \text{ cm}$$

y

$$\text{Potencia} = \frac{1}{0.375 \text{ m}} = 2.7 \text{ dioptrías}$$

39.3 [II] Un solo lente delgado de proyección, con distancia focal de 30 cm, proyecta la imagen de una diapositiva de 2.0 cm × 3.0 cm sobre una pantalla ubicada a 10 m del lente. Calcule las dimensiones de la imagen.

La imagen es real y por tanto $s_i > 0$;

$$\frac{1}{s_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_i} = \frac{1}{0.30} - \frac{1}{10} = 3.23 \text{ m}^{-1}$$

así que

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{10 \text{ m}}{(1/3.23) \text{ m}} = -32$$

La amplificación es negativa porque la imagen está invertida. La longitud y el ancho de la diapositiva se amplifican cada una 32 veces, así que

$$\text{Tamaño de la imagen} = (32 \times 2.0 \text{ m}) \times (32 \times 3.0 \text{ cm}) = 64 \text{ cm} \times 96 \text{ cm}$$

39.4 [II] Una cámara produce una imagen clara de un paisaje distante cuando el lente delgado está a 8 cm de la película. ¿Qué ajuste se requiere para conseguir una buena fotografía de un mapa colocado a 72 cm del lente?

Cuando la cámara está enfocada para objetos distantes (para rayos paralelos), la distancia entre el lente y la película es la distancia focal del lente, a saber, 8 cm. Para un objeto a 72 cm de distancia:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{8} - \frac{1}{72} \qquad \text{o} \qquad s_i = 9 \text{ cm}$$

El lente deberá alejarse de la película una distancia de $(9 - 8)$ cm $= 1$ cm.

39.5 [II] Con una iluminación dada y una película determinada, la exposición correcta para el lente de una cámara colocada en $f/12$ es (1/5). ¿Cuál es el tiempo de exposición adecuado para el lente que trabaja a $f/4$?

Un ajuste de $f/12$ significa que el diámetro del diafragma, u obturación, del lente es $1/12$ de la distancia focal; $f/4$ significa que es $1/4$ de la distancia focal.

La cantidad de luz que pasa a través del diafragma es proporcional a su área y por consiguiente al cuadrado de su diámetro. El diámetro de la obturación en $f/4$ es el triple que en $f/12$, de modo que $3^2 = 9$ veces más luz pasará a través del lente en $f/4$ y la exposición correcta en $f/4$ es

$$(1/9)\ (\text{tiempo de exposición en } f/12) = (1.45)\ \text{s}$$

39.6 [II] Un grabador de objetos que tiene vista normal utiliza un lente convergente con distancia focal de 8.0 cm, el cual sostiene muy cerca de sus ojos. ¿A qué distancia del trabajo debe colocar el lente y cuál es el poder de amplificación de éste?

Método 1

Cuando se utiliza un lente convergente como vidrio de aumento, el objeto está entre el lente y el punto focal. La imagen virtual, derecha y alargada se forma a la distancia de visión precisa, 25 cm del ojo. Para una imagen virtual $s_i < 0$. Por tanto

$$\frac{1}{s_o} + \frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} \quad \text{o} \quad \frac{1}{s_o} + \frac{1}{-25\ \text{cm}} = \frac{1}{8.0\ \text{cm}} \quad \text{o} \quad s_o = \frac{200}{33} = 6.06\ \text{cm} = 6.1\ \text{cm}$$

y

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{25\ \text{cm}}{6.06\ \text{cm}} = 4.1$$

Método 2

Por la fórmula,

$$M_A = \frac{d_n}{f} + 1 = \frac{25}{8.0} + 1 = 4.1$$

Observe que en este caso simple $M_T = M_A$.

39.7 [III] Dos lentes positivos, que tienen distancias focales de +2.0 cm y +5.0 cm, están separados 14 cm como se muestra en la figura 39-2. Un objeto *AB* se coloca a 3.0 cm frente al lente de +2.0. Determine la posición y la amplificación de la imagen final *A″B″* formada por esta combinación de lentes.

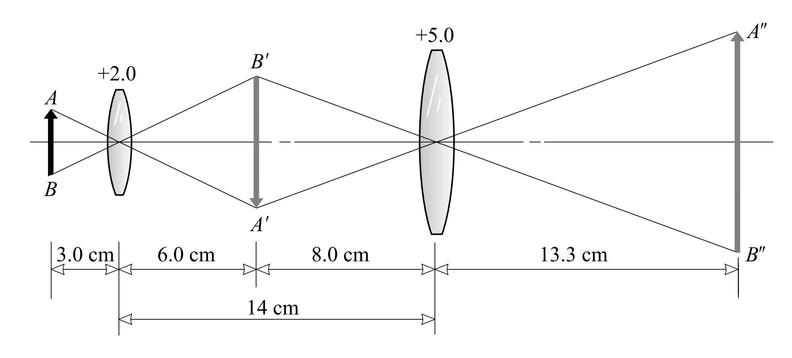


Figura 39-2

Para ubicar la imagen $A'B'$ formada sólo por el lente de +2.0:

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{2.0} - \frac{1}{3.0} = \frac{1}{6.0} \quad \text{o} \quad s_i = 6.0\ \text{cm}$$

La imagen $A'B'$ es real, invertida y está 6.0 cm detrás del lente de +2.0.

Para ubicar la imagen final $A''B''$: La imagen $A'B'$ está a (14 − 6.0) cm = 8.0 cm enfrente del lente de +5.0 y se toma como un objeto real para este lente.

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{5.0} - \frac{1}{8.0} \quad \text{o} \quad s_i = 13.3 \text{ cm}$$

$A''B''$ es real, derecha y se forma a 13 cm del lente de +5. Entonces,

$$M_T = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{6.0}{3.0} \times \frac{13.3}{8.0} = 3.3$$

Observe que la amplificación producida por una combinación de lentes es el producto de las amplificaciones individuales.

39.8 [II] En el microscopio compuesto que se muestra en la figura 39-3, el objetivo y el ocular tienen distancias focales de +0.80 y +2.5 cm, respectivamente. La imagen real $A'B'$ formada por el objetivo está a 16 cm de éste. Determine la amplificación total si el ojo se mantiene cerca del ocular y se observa la imagen virtual $A''B''$ a una distancia de 25 cm.

Método 1

Sea s_{oO} = distancia del objeto al objetivo

s_{iO} = distancia de la imagen real al objetivo

$$\frac{1}{s_{oO}} = \frac{1}{f_O} - \frac{1}{s_{iO}} = \frac{1}{0.80} - \frac{1}{16} = \frac{19}{16} \text{ cm}^{-1}$$

y así el objetivo produce una amplificación lineal

$$M_{TO} = -\frac{s_{iO}}{s_{oO}} = -(16 \text{ cm})\left(\frac{19}{16} \text{ cm}^{-1}\right) = -19$$

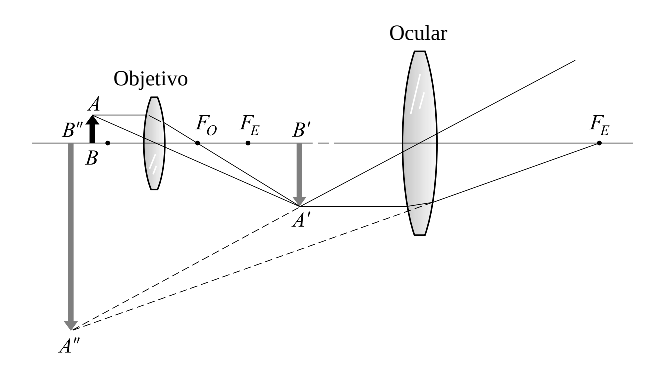


Figura 39-3

La imagen intermedia está invertida. El poder de amplificación del ocular es

$$M_{TE} = -\frac{s_{iE}}{s_{oE}} = -s_{iE}\left(\frac{1}{f_E} - \frac{1}{s_{iE}}\right) = -\frac{s_{iE}}{f_E} + 1 = -\frac{-25}{+2.5} + 1 = 11$$

El ocular no voltea la imagen: la imagen intermedia está invertida, lo mismo que la imagen final. Por tanto, el poder de amplificación del instrumento es $-19 \times 11 = -2.1 \times 10^2$.

Alternativamente, bajo las condiciones establecidas, el poder de amplificación del ocular se puede calcular como

$$\frac{25}{f_E} + 1 = \frac{25}{2.5} + 1 = 11$$

Método 2

Por medio de la fórmula de la página anterior, con s_{iO} = 16 cm,

$$\text{Amplificación} = \left(\frac{d_n}{f_E} + 1\right)\left(\frac{s_{iO}}{f_O} - 1\right) = \left(\frac{25}{2.5} + 1\right)\left(\frac{16}{0.8} - 1\right) = 2.1 \times 10^2$$

39.9 [III] El lente del telefoto que se muestra en la figura 39-4 consiste de un lente convergente con distancia focal de +6.0 cm colocado a 4.0 cm frente a un lente divergente con distancia focal de −2.5 cm. *a*) Ubique la imagen de un objeto muy distante. *b*) Compare el tamaño de la imagen formada por esta combinación de lentes con el tamaño de la imagen que podría producirse sólo por el lente positivo.

Figura 39-4

a) Si no se emplea el lente negativo, la imagen *AB* se formaría en el punto focal del lente de +6.0, a 6.0 cm de distancia de dicho lente. El lente negativo disminuye la convergencia de los rayos refractados por el lente positivo y hace que se enfoquen en $A'B'$ en lugar de en *AB*.

La imagen *AB* (que se habría formado por el lente +6.0 solo) está a 6.0 − 4.0 = 2.0 cm al otro lado del lente −2.5 y se toma como el objeto (virtual) para este lente. Entonces, $s_o = -2.0$ cm (negativo porque *AB* es virtual) y

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{-2.5\ \text{cm}} - \frac{1}{-2.0\ \text{cm}} = \frac{1}{10\ \text{cm}} \qquad \text{o} \qquad s_i = +10\ \text{cm}$$

La imagen final $A'B'$ es real y está a 10 cm del otro lado del lente negativo.

b)
$$\text{Amplificación del lente negativo} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{s_i}{s_o} = -\frac{10\ \text{cm}}{-2.0\ \text{cm}} = 5.0$$

así que el lente divergente aumenta la amplificación por un factor de 5.0.

Observe que la amplificación producida por el lente convexo es negativa y por tanto la amplificación neta de ambos lentes es negativa: la imagen final es invertida.

39.10 [II] Cierto microscopio tiene dos lentes objetivo intercambiables (3.0 mm y 7.0 mm) y dos oculares intercambiables (3.0 cm y 5.0 cm). ¿Qué amplificaciones se pueden obtener con el microscopio si se ajusta de modo que la imagen formada por el objetivo esté a 17 cm de los lentes?

Debido a que $s_{iO} = 17$ cm, la fórmula de amplificación para un microscopio, con $d_n = 25$ cm, da las posibilidades siguientes para M_A:

Para $f_E = 3$ cm, $f_O = 0.3$ cm: $M_A = (9.33)(55.6) = 518 = 5.2 \times 10^2$
Para $f_E = 3$ cm, $f_O = 0.7$ cm: $M_A = (9.33)(23.2) = 216 = 2.2 \times 10^2$
Para $f_E = 5$ cm, $f_O = 0.3$ cm: $M_A = (5)(55.6) = 278 = 2.8 \times 10^2$
Para $f_E = 5$ cm, $f_O = 0.7$ cm: $M_A = (5)(23.2) = 116 = 1.2 \times 10^2$

39.11 [I] Calcule el poder de amplificación de un telescopio que tiene objetivo y ocular con distancias focales +60 y +3.0 cm, respectivamente, cuando se enfoca para rayos paralelos.

$$\text{Poder de amplificación} = -\frac{\text{distancia focal del objetivo}}{\text{distancia focal del ocular}} = -\frac{60\ \text{cm}}{3.0\ \text{cm}} = -20$$

La imagen está invertida.

39.12 [II] Los *telescopios de reflexión* se construyen utilizando un espejo cóncavo, en lugar del lente objetivo, para poder enfocar los objetos distantes. ¿Cuál es el poder de amplificación de un telescopio que tiene un espejo con un radio de 250 cm y un ocular cuya distancia focal es de 5.0 cm?

Como para un telescopio de refracción (es decir, uno con dos lentes), se aplica de nuevo $M_A = -f_O/f_E$ donde, en este caso, $f_O = -R/2 = 125$ cm y $f_E = 5.0$ cm. Así, $M_A = -25$.

39.13 [III] Como se muestra en la figura 39-5, un objeto se coloca a 40 cm de un lente convergente que tiene $f = +8.0$ cm. Un espejo plano está 30 cm detrás del lente. Determine las posiciones de todas las imágenes formadas por este sistema.

Para el lente

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{8.0} - \frac{1}{40} = \frac{4}{40} \qquad \text{o} \qquad s_i = 10 \text{ cm}$$

Esta imagen es $A'B'$ en la figura. Es real e invertida.

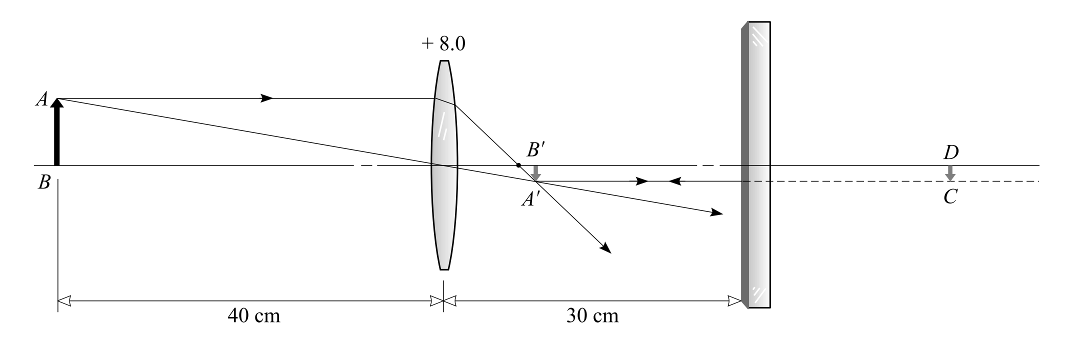


Figura 39-5

$A'B'$ actúa como objeto para el espejo plano, a 20 cm de distancia. Una imagen virtual *CD* se forma 20 cm atrás del espejo.

La luz reflejada por el espejo parece venir de la imagen en *CD*. Con *CD* como objeto, el lente forma una imagen de él a la izquierda del lente. La distancia s_i del lente a esta última imagen está dada por

$$\frac{1}{s_i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s_o} = \frac{1}{8} - \frac{1}{50} = 0.105 \qquad \text{o} \qquad s_i = 9.5 \text{ cm}$$

Por tanto, las imágenes reales se ubican 10 cm a la derecha del lente y 9.5 cm a la izquierda del lente (esta última imagen es derecha). Una imagen virtual invertida se encuentra a 20 cm atrás del espejo.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

39.14 [II] Cierta persona hipermétrope no puede ver con claridad objetos ubicados a menos de 60.0 cm de sus ojos. Determine la distancia focal y el poder de los lentes de sus anteojos para que pueda leer libros a una distancia de 25.0 cm. **Resp.** $+42.9$ cm, $+2.33$ dioptrías.

39.15 [II] Cierta persona miope no puede ver con claridad objetos que estén más allá de 50 cm de sus ojos. Determine la distancia focal y el poder de los anteojos que le permitirán ver objetos distantes con claridad.
Resp. -50 cm, -2.0 dioptrías.

39.16 [II] Un lente de proyección se utiliza para producir imágenes de 2.4 m × 3.2 m de transparencias de 3.0 cm × 4.0 cm sobre una pantalla que está a 25 m del lente. Calcule su distancia focal. **Resp.** 31 cm.

39.17 [II] Una cámara toma una fotografía tamaño natural de una flor cuando el lente está a 20 cm de la película. ¿Cuál debe ser la distancia entre el lente y la película para fotografiar una bandada de patos que vuelan sobre su cabeza? **Resp.** 10 cm.

39.18 [II] ¿Cuál es la máxima rapidez de obturación del lente de una cámara que tiene una distancia focal de $+10$ cm y un diámetro de 2.0 cm? Si la exposición correcta en $f/6$ es $(1/90)$ s, ¿qué exposición se necesita cuando se cambia el diafragma a $f/9$? **Resp.** $f/5$, $(1/40)$ s.

39.19 [I] ¿Cuál es el poder de amplificación de un lente con distancia focal de $+2.0$ cm cuando se utiliza como lupa (o microscopio simple)? El lente se mantiene cerca del ojo y la imagen virtual se forma a una distancia de visión clara, a 25 cm del ojo. **Resp.** 14.

39.20 [II] Cuando la distancia de un objeto a un lente convergente es de 5.0 cm, se forma una imagen real a 20 cm del lente. ¿Qué amplificación se logra con este lente al utilizarlo como lente de aumento? ¿La distancia de visión más clara es de 25 cm? **Resp.** 7.3.

39.21 [II] En un microscopio compuesto, las distancias focales del objetivo y el ocular son $+0.50$ cm y $+2.0$ cm, respectivamente. El instrumento se enfoca a un objeto a 0.52 cm del lente objetivo. Calcule el poder de amplificación del microscopio si la imagen virtual la observa el ojo a una distancia de 25 cm. **Resp.** 3.4×10^2.

39.22 [II] Un telescopio astronómico de refracción tiene un poder de amplificación de 150 cuando se ajusta para un esfuerzo ocular mínimo. Su ocular tiene una distancia focal de $+1.20$ cm. *a*) Determine la distancia focal del lente objetivo. *b*) ¿Qué tan separados deben estar los dos lentes para que se pueda proyectar una imagen real de un objeto distante sobre una pantalla a 12.0 cm del ocular? **Resp.** *a*) $+180$ cm; *b*) 181 cm.

39.23 [III] El gran telescopio de Monte Palomar tiene como objetivo un espejo cóncavo de 5.0 m de diámetro y 46 m de radio de curvatura. ¿Cuál es el poder de amplificación del instrumento cuando se usa con un ocular de 1.25 cm de distancia focal? **Resp.** 1.8×10^3.

39.24 [II] Un telescopio astronómico con un lente objetivo con distancia focal de $+80$ cm se enfoca sobre la Luna. ¿Cuánto se debe mover el ocular para enfocar el telescopio sobre un objeto a 40 m de distancia? **Resp.** 1.6 cm.

39.25 [II] Una combinación de lentes contiene dos lentes con distancias focales de $+4.0$ cm y $+8.0$ cm, que están separados 16 cm. Ubique y describa la imagen de un objeto colocado 12 cm enfrente del lente de $+4.0$ cm. **Resp.** 40 cm atrás del lente de $+8.0$, real y derecha.

39.26 [II] Dos lentes, con distancias focales de $+6.0$ cm y -10 cm, están separados 1.5 cm. Ubique y describa la imagen de un objeto 30 cm enfrente del lente de $+6.0$ cm. **Resp.** 15 cm atrás del lente negativo, real, invertida, $5/8$ el tamaño del objeto.

39.27 [II] Un lente telefoto consiste de un lente positivo con distancia focal de $+3.5$ cm colocado 2.0 cm enfrente de un lente negativo con distancia focal de -1.8 cm. *a*) Ubique la imagen de un objeto muy distante. *b*) Calcule la distancia focal de un solo lente que formaría una imagen igual en tamaño a la que formaría la combinación. **Resp.** *a*) imagen real a 9.0 cm detrás del lente negativo; *b*) $+21$ cm.

39.28 [II] Unos prismáticos tienen un lente objetivo con distancia focal de $+3.60$ cm y un ocular negativo con distancia focal de -1.20 cm. ¿Cuán separados deben estar los dos lentes para que el observador vea un objeto distante a 25.0 cm de su ojo? **Resp.** 2.34 cm.

39.29 [II] Repita el problema 39.13 si la distancia entre el espejo plano y el lente es de 8.0 cm. **Resp.** a 6.0 cm (real) y a 24 cm (virtual) a la derecha del lente.

39.30 [II] Resuelva el problema 39.13 si el espejo plano se sustituye con un espejo cóncavo con 20 cm de radio de curvatura. **Resp.** a 10 cm (real e invertida), 10 cm (real, derecha), -40 cm (real e invertida) a la derecha del lente.

INTERFERENCIA Y DIFRACCIÓN DE LA LUZ 40

UNA ONDA DE PROPAGACIÓN es una alteración autosostenida de un medio que transporta energía y cantidad de movimiento de un lugar a otro. Todas estas ondas se asocian a final de cuentas con el movimiento de una distribución subyacente de partículas.

LAS ONDAS COHERENTES (como la luz, el sonido o las alteraciones en una cuerda) son ondas que tienen la misma forma, la misma frecuencia y una diferencia de fase constante (esto es, la cantidad por la que las crestas de una onda se adelantan o atrasan respecto de las de la otra, no cambia en el tiempo).

LA FASE RELATIVA de dos ondas coherentes que viajan a lo largo de la misma línea especifica sus posiciones relativas sobre la línea de propagación. Si las crestas de una onda caen en las crestas de la otra, las ondas están completamente **en fase**. Si las crestas de una onda caen en los valles de la otra, las ondas están **fuera de fase** 180° (o media longitud de onda). Dos ondas pueden estar fuera de fase por cualquier cantidad mayor que cero hasta e inclusive 180°.

LOS EFECTOS DE LA INTERFERENCIA ocurren cuando dos o más ondas coherentes se traslapan. Si dos ondas coherentes de la misma amplitud se superponen, ocurre **interferencia destructiva total** (cancelación o, en el caso de la luz, oscuridad) cuando las ondas están fuera de fase 180°. La **interferencia constructiva total** (reforzamiento o, en el caso de la luz, brillantez) ocurre cuando las ondas están en fase.

LA DIFRACCIÓN se refiere a la desviación de la propagación en línea recta que ocurre cuando una onda pasa al otro lado de una obstrucción parcial. Usualmente corresponde al doblamiento o dispersión de las ondas alrededor de las orillas de una abertura y de obstáculos. La forma más simple de la difracción de la luz es la del *campo lejano* o ***difracción Fraunhofer***. Se observa en una pantalla que está lejana de la abertura u obstáculo que obstruye un flujo incidente de ondas planas. La difracción pone un límite en el tamaño de los detalles que se pueden observar ópticamente.

DIFRACCIÓN FRAUNHOFER DE UNA SOLA RENDIJA: Cuando rayos de luz paralelos con longitud de onda λ inciden normalmente sobre una rendija de ancho D, atrás de la rendija se ve un patrón de difracción. En una pantalla lejana se observa total oscuridad en ángulos $\theta_{m'}$ con el haz recto de luz incidente, donde

$$m'\lambda = D \operatorname{sen} \theta_{m'}$$

Donde $m' = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, es el *número de orden* de la banda de difracción oscura (*mínimo de intensidad*). El patrón consiste en una amplia banda central brillante flanqueada a ambos lados por una serie alternada de luz tenue estrecha y bandas de oscuridad ($m' = \pm 1, \pm 2$, etcétera).

LÍMITE DE RESOLUCIÓN de dos objetos debido a la difracción: Si dos objetos se observan a través de un instrumento óptico, los patrones de difracción producidos por la abertura del instrumento limitan la posibilidad de distinguir un objeto de otro. Para que dos objetos sean distinguibles, el ángulo θ subtendido en la abertura por el objeto debe ser mayor que un valor crítico θ_{cr}, dado por

$$\operatorname{sen} \theta_{cr} = (1.22)\frac{\lambda}{D}$$

donde D es el diámetro de la abertura circular del instrumento (ojo, telescopio o cámara).

ECUACIÓN DE LA REJILLA DE DIFRACCIÓN: Una **rejilla** de **difracción** es un arreglo repetitivo de aberturas u obstáculos que altera la amplitud o la fase de una onda. Suele consistir en un gran número de rendijas paralelas igualmente espaciadas; la distancia entre rendijas es el espaciado a de la rejilla. Cuando una onda de longitud λ incide de manera normal sobre una rejilla con espaciado a, se observan máximos de intensidad más allá de la rejilla en ángulos θ_m con la normal, donde

$$m\lambda = a \operatorname{sen} \theta_m$$

Aquí, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, es el *número de orden* de la imagen difractada. Usualmente habrá una banda central brillante sin desviarse de luz colorida ($m = 0$) flanqueada en cualquiera de los lados por una oscuridad y luego otra banda de luz colorida ($m = \pm 1$), y así sucesivamente. Éstos se conocen como espectro de orden cero, espectro de primer orden, etcétera.

La misma relación se aplica a los principales máximos en los patrones de interferencia de incluso dos y tres rendijas. Sin embargo, en estos casos los máximos no están casi tan definidos como en el caso de la rejilla compuesta por cientos o miles de rendijas. El patrón se puede volver muy complejo si las rendijas son lo suficientemente anchas, de tal forma que el patrón de difracción de una sola rendija de cada rendija muestre varios mínimos.

LA DIFRACCIÓN DE RAYOS X de longitud de onda λ por reflexión en una red cristalina se describe por la *ecuación de Bragg*. Se observan fuertes reflexiones para ángulos de centelleo ϕ_m (donde ϕ es el ángulo entre el plano de la red cristalina y el haz reflejado) dado por

$$m\lambda = 2d \text{ sen } \phi_m$$

donde d es la distancia entre los planos reflejantes en el cristal, y $m = 1, 2, 3, \ldots$, es el *orden* de reflexión.

LONGITUD DE CAMINO ÓPTICO: En el mismo tiempo que le toma a un haz de luz recorrer una distancia d dentro de un material con índice de refracción n, el haz recorrería una distancia nd en el vacío. Por esta razón, nd se define como la **longitud de camino óptico** del material.

PROBLEMAS RESUELTOS

40.1 [II] La figura 40-1 muestra una película delgada de un material transparente con espesor d e índice n_f, donde $n_2 > n_f > n_1$. ¿Para cuáles tres espesores de película mínimos interferirán por completo los rayos de luz reflejados 1 y 2 *a*) constructiva y *b*) destructivamente? Suponga que la luz monocromática tiene una longitud de onda en la película de 600 nm.

Puesto que $n_2 > n_f > n_1$, cada reflexión está en la interfaz con un medio ópticamente más denso y por tanto cada uno es una *reflexión externa*. Conforme con ello, los dos rayos no experimentarán un corrimiento de fase relativo debido a las reflexiones.

a) El rayo 2 recorre una distancia aproximadamente $2d$ mayor que la recorrida por el rayo 1. Los rayos se reforzarán si esta distancia es $0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots, m\lambda$, donde m es un entero. Por tanto, para reforzamiento,

$$m\lambda = 2d \qquad \text{o} \qquad d = (\tfrac{1}{2}m)(600 \text{ nm}) = 300m \text{ nm}$$

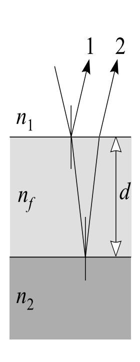



Figura 40-1

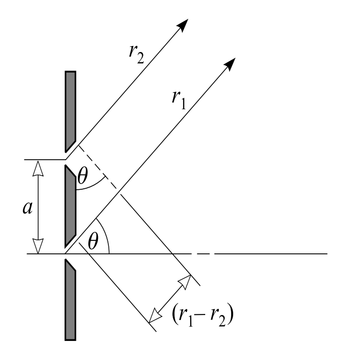


Figura 40-2

Los tres valores más pequeños para d son 0, 300 nm y 600 nm.

b) Las ondas se anulan si están fuera de fase 180°. Esto sucede cuando $2d$ es $\frac{1}{2}\lambda, (\lambda + \frac{1}{2}\lambda), (2\lambda + \frac{1}{2}\lambda), \ldots, (m\lambda + \frac{1}{2}\lambda), \ldots$, un entero. Por tanto, para la interferencia destructiva total,

$$2d = m\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda \qquad\qquad d = \tfrac{1}{2}(m + \tfrac{1}{2})\lambda = (m + \tfrac{1}{2})(300)\ \text{nm}$$

Los tres valores más pequeños para d, esto es, los que corresponden a $m = 0$, 1 y 2, son 150 nm, 450 nm y 750 nm.

40.2 [III] Dos rendijas paralelas horizontales angostas (separadas una distancia $a = 0.60$ mm) se iluminan con un haz de luz de 500 nm, como se muestra en la figura 40-2. La luz que se difracta a ciertos ángulos θ se refuerza; en otros, se cancela. Calcule los tres valores de θ más pequeños para los cuales *a*) ocurre reforzamiento y *b*) ocurre cancelación (vea la figura 40-3).

La diferencia de camino óptico para los dos haces es $(r_1 - r_2)$. De la figura 40-2,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(r_1 - r_2)}{a}$$

a) Para reforzamiento, $(r_1 - r_2) = 0, \pm\lambda, \pm 2\lambda, \ldots$, y así sen $\theta_m = m\lambda a$, donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Los correspondientes tres valores más pequeños de θ_m se encuentran con

$$m = 0 \qquad \text{sen}\,\theta_0 = 0 \qquad \text{o} \qquad \theta_0 = 0$$

$$m = \pm 1 \qquad \text{sen}\,\theta_1 = \pm\frac{500\times 10^{-9}\ \text{m}}{6\times 10^{-4}\ \text{m}} = \pm 8.33\times 10^{-4} \qquad \text{o} \qquad \theta_1 = \pm 0.048°$$

$$m = \pm 2 \qquad \text{sen}\,\theta_2 = \pm\frac{2(500\times 10^{-9}\ \text{m})}{6\times 10^{-4}\ \text{m}} = \pm 16.7\times 10^{-4} \qquad \text{o} \qquad \theta_2 = \pm 0.095°$$

b) Para cancelación, $(r_1 - r_2) = \pm\tfrac{1}{2}\lambda,\ \pm(\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda),\ \pm(2\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda), \ldots$, y así sen $\theta_{m'} = \tfrac{1}{2}m'\lambda/a$, donde $m' = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$, Los correspondientes tres valores más pequeños de $\theta_{m'}$ se encuentran con el uso de

$$m' = \pm 1 \qquad \text{sen}\,\theta_1 = \pm\frac{250\ \text{nm}}{600\,000\ \text{nm}} = \pm 4.17\times 10^{-4} \qquad \text{o} \qquad \theta_1 = \pm 0.024°$$

$$m' = \pm 3 \qquad \text{sen}\,\theta_3 = \pm\frac{750\ \text{nm}}{600\,000\ \text{nm}} = \pm 0.00125 \qquad \text{o} \qquad \theta_3 = \pm 0.072°$$

$$m' = \pm 5 \qquad \text{sen}\,\theta_5 = \pm\frac{1\,250\ \text{nm}}{600\,000\ \text{nm}} = \pm 0.00208 \qquad \text{o} \qquad \theta_5 = \pm 0.12°$$

40.3 [II] Luz monocromática emitida por una fuente puntual ilumina dos rendijas paralelas horizontales estrechas. Los centros de las dos rendijas están separados $a = 0.80$ mm, como se muestra en la figura 40-3. En una pantalla, a 50 cm de distancia, se forma un patrón de interferencia. En el patrón, las franjas brillantes y oscuras están separadas uniformemente. La distancia y_1 mide 0.304 mm. Calcule la longitud de onda λ de la luz.

Note primero que la figura 40-3 no está a escala. Los rayos que salen de las rendijas de hecho serán prácticamente paralelos. Por lo mismo, se puede utilizar el resultado del problema 40.2 con $(r_1 - r_2) = m\lambda$ en los máximos (manchas brillantes), donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Entonces,

$$\text{sen}\,\theta = \frac{(r_1 - r_2)}{a} \quad \text{se convierte en} \quad m\lambda = a\,\text{sen}\,\theta_m$$

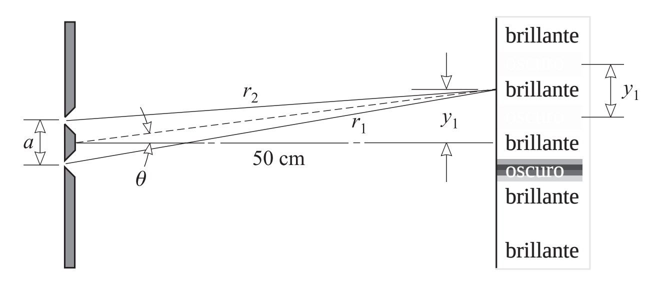


Figura 40-3

O, alternativamente, se podría usar la ecuación de la rejilla, pues una doble rendija simplemente es una rejilla con dos líneas. Los dos procedimientos resultan en $m\lambda = a$ sen θ_m.

Se sabe que la distancia desde el máximo central hacia el primer máximo en cualquier lado es de 0.304 mm. Por tanto, de la figura 40-3,

$$\text{sen } \theta_1 = \frac{0.0304 \text{ cm}}{50 \text{ cm}} = 0.000608$$

Entonces, para $m = 1$,

$$m\lambda = a \text{ sen } \theta_m \quad \text{se convierte en} \quad (1)\lambda = (0.80 \times 10^{-3} \text{ m})(6.08 \times 10^{-4})$$

de donde $\lambda = 486$ nm, o a dos cifras significativas, 0.49×10^3 nm.

40.4 [III] Repita el problema 40.1 para el caso en el que $n_1 < n_f > n_2$ o $n_1 > n_f < n_2$.

El experimento muestra que, en esta situación, ocurre interferencia destructiva total cuando d está cerca de cero. Esto se debe al hecho de que, a menudo, la luz experimenta un cambio de fase al reflejarse. El proceso es más bien complicado pero, para ángulos de incidencia menores que más o menos 30°, es bastante directo. Entonces se tendrá una diferencia de fase neta de 180°, introducida entre los haces reflejados interna y externamente. De este modo, cuando la película es muy delgada en comparación con λ y $d \approx 0$, habrá una diferencia aparente de $\frac{1}{2}\lambda$ en las trayectorias para los dos haces y ocurrirá la interferencia destructiva total. (Esta no fue la situación del problema 40.1, porque ambos haces se reflejaron externamente.)

Para $d \approx 0$ ocurre interferencia destructiva, como se acaba de ver. Cuando $d = \frac{1}{2}\lambda$, se tiene una vez más la cancelación. Lo mismo sucede en $d = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda$. Por tanto, en este problema ocurre interferencia destructiva total en $d = 0$, 300 nm y 600 nm.

Cuando $d = \frac{1}{4}\lambda$ ocurre reforzamiento, porque entonces el haz 2 actúa aun cuando hubiera recorrido una $\frac{1}{2}\lambda + (2)(\frac{1}{4}\lambda) = \lambda$. adicional. Nuevamente se presenta una interferencia constructiva cuando d se incrementa por $\frac{1}{2}\lambda$ y por λ. En consecuencia, para la interferencia constructiva, $d = 150$ nm, 450 nm y 750 nm.

40.5 [III] Cuando la longitud de uno de los brazos del interferómetro de Michelson se incrementa ligeramente, 150 franjas oscuras barren el campo de visión. Si la luz utilizada tiene una longitud de onda $\lambda = 480$ nm, ¿qué tan lejos estaba el espejo colocado en dicho brazo?

Cuando los haces de luz provenientes de los dos brazos están fuera de fase 180°, se observa oscuridad. Conforme se incrementa $\frac{1}{2}\lambda$ la longitud de un brazo, la longitud del camino óptico (de ida y vuelta) aumenta en λ y el campo de visión cambia de oscuro a brillante y nuevamente a oscuro. Cuando pasan 150 franjas, la longitud del brazo se incrementa en una cantidad

$$(150)(\tfrac{1}{2}\lambda) = (150)(240 \text{ nm}) = 36\,000 \text{ nm} = 0.0360 \text{ mm}$$

40.6 [III] Como se muestra en la figura 40-4, dos placas de vidrio planas se tocan en el extremo izquierdo y en el otro extremo están separadas por un espaciador. Con vista vertical y luz con $\lambda = 589.0$ nm, se obtienen, de borde a borde, cinco franjas oscuras (indicadas por D en el diagrama). ¿Cuál es el grosor del espaciador?

El patrón se obtiene por la interferencia entre un haz reflejado de la cara superior de la cuña de aire y un haz reflejado de la cara inferior de la cuña. Las dos reflexiones son de naturaleza diferente, pues la reflexión en la cara superior tiene lugar en la frontera de un medio (aire) de menor índice de refracción, mientras que la

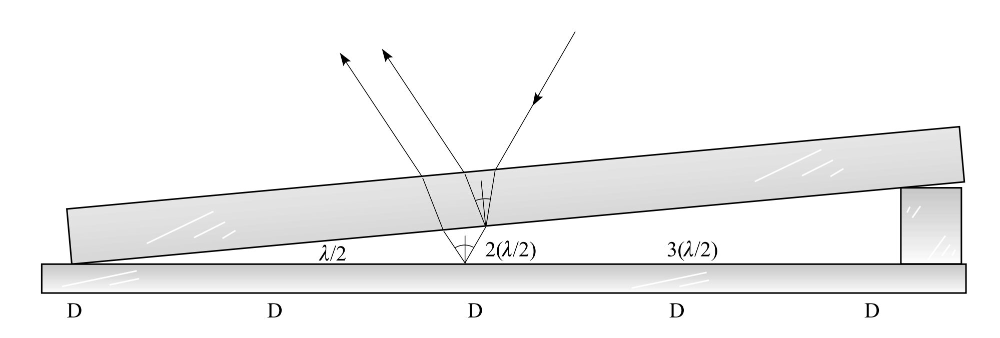


Figura 40-4

reflexión en la superficie inferior ocurre en la frontera de un medio (vidrio) de alto índice de refracción. En tales casos, el acto de la reflexión por sí mismo implica un desplazamiento de fase de 180° entre los dos haces reflejados. Esto explica la presencia de una franja oscura en el extremo izquierdo.

Conforme uno se mueve de una franja oscura a otra, el haz que se propaga dentro de la cuña se debe retrasar a causa de una diferencia de longitud del camino λ. Puesto que el haz atraviesa dos veces la cuña (abajo y arriba de nuevo), el grosor de la cuña cambia por solo $\frac{1}{2}\lambda$ conforme uno se desplaza de una franja a otra. En consecuencia,

$$\text{Grosor del espaciador} = 4(\tfrac{1}{2}\lambda) = 2(589.0\ \text{nm}) = 1\,178\ \text{nm}$$

40.7 [III] En un experimento utilizado para mostrar los *anillos de Newton*, un lente plano-convexo se coloca sobre una placa de vidrio plana, como se muestra en la figura 40-5. Cuando el lente se ilumina a incidencia normal, un observador que ve desde arriba distinguirá anillos brillantes y oscuros centrados en el punto de contacto, que es oscuro. Calcule el espesor de la brecha de aire en *a*) el tercer anillo oscuro y *b*) en el segundo anillo brillante. Suponga que se usa luz de 500 nm.

Debido a que una reflexión es interna y la otra externa, habrá un corrimiento de fase relativo de 180°.

a) El espesor de la brecha es cero en la mancha oscura central. La brecha aumenta en $\frac{1}{2}\lambda$ de un anillo oscuro al siguiente. (¿Por qué $\frac{1}{2}\lambda$?) Por consiguiente, en el tercer anillo oscuro,

$$\text{Espesor de la brecha} = 3(\tfrac{1}{2}\lambda) = 3(250\ \text{nm}) = 750\ \text{nm}$$

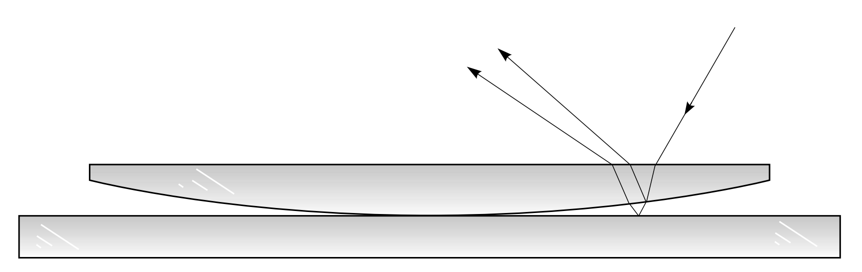


Figura 40-5

b) El espesor de la brecha en el primer anillo brillante debe ser lo suficientemente grande para que la longitud de camino óptico aumente en $\frac{1}{2}\lambda$. Dado que el rayo atraviesa la brecha dos veces, el espesor en ese punto será $\frac{1}{2}\lambda$. Al ir de un anillo brillante al siguiente, el espesor de la brecha aumenta en $\frac{1}{2}\lambda$. En consecuencia, en el segundo anillo brillante,

$$\text{Espesor de la brecha} = \tfrac{1}{4}\lambda + \tfrac{1}{2}\lambda = (0.750)(500\ \text{nm}) = 375\ \text{nm}$$

40.8 [II] ¿Cuál es el espesor de una película de jabón en aire que aparecerá oscura cuando se vea con luz de sodio ($\lambda = 598.3$ nm) reflejada perpendicular a la película? El índice de refracción de la solución jabonosa es $n = 1.38$.

La situación se muestra en la figura 40-6. El rayo *b* recorre una longitud extra de camino óptico de $2nd = 2.76d$. Además, entre los haces hay un corrimiento de fase relativo de 180°, o $\frac{1}{2}\lambda$, a causa del proceso de reflexión, como se describe en los problemas 40.4 y 40.6.

La interferencia destructiva (y oscuridad) ocurre si el retardo entre los dos haces es de $\frac{1}{2}\lambda$ o $\frac{3}{2}\lambda$ o $\frac{5}{2}\lambda$, y así sucesivamente. Por tanto, para oscuridad,

$$2.76d + \tfrac{1}{2}\lambda = m(\tfrac{1}{2}\lambda) \qquad \text{donde} \qquad m = 1, 3, 5, \ldots$$

Cuando $m = 1$, entonces $d = 0$. Para $m = 3$, se tiene

$$d = \frac{\lambda}{2.76} = \frac{589.3\ \text{nm}}{2.76} = 214\ \text{nm}$$

como la película más delgada posible con espesor diferente de cero. En la práctica, la película se convertirá en negra cuando $d << \lambda/4$.

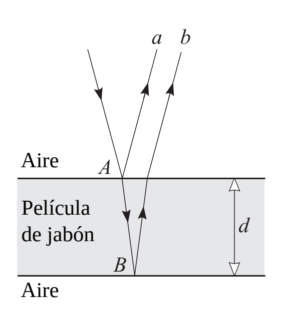


Figura 40-6

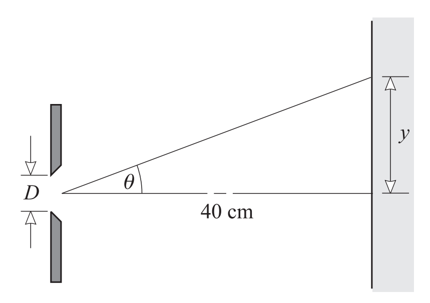


Figura 40-7

40.9 [II] Una sola rendija de ancho $D = 0.10$ mm se ilumina con una luz paralela con longitud de onda de 600 nm. En una pantalla que se encuentra a 40 cm de la rendija se observan bandas de difracción. ¿Qué tan lejos de la banda brillante central está la tercera banda oscura? (Vea la figura 40-7.)

Para una sola rendija, las posiciones de las bandas oscuras están dadas por la ecuación $m'\lambda = D \operatorname{sen} \theta_{m'}$. Entonces

$$\operatorname{sen} \theta_3 = \frac{3\lambda}{D} = \frac{3(6.00 \times 10^{-7}\ \text{m})}{0.10 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 0.018 \quad \text{o} \quad \theta_3 = 1.0°$$

De la figura, $\tan \theta_3 = y/40$ cm, y entonces

$$y = (40\ \text{cm})(\tan \theta_3) = (40\ \text{cm})(0.018) = 0.72\ \text{cm}$$

40.10 [I] Una luz roja incide normalmente sobre una rejilla de difracción de 4 000 líneas/cm, y la imagen de segundo orden se difracta 34.0° a partir de la normal. Calcule la longitud de onda de la luz.

De la ecuación de la rejilla de difracción $m\lambda = a \operatorname{sen} \theta_m$,

$$\lambda = \frac{a \operatorname{sen} \theta_2}{2} = \frac{\left(\frac{1}{4\,000}\ \text{cm}\right)(0.559)}{2} = 6.99 \times 10^{-5}\ \text{cm} = 699\ \text{nm}$$

40.11 [I] La figura 40-8 muestra un montaje de laboratorio para realizar un experimento con una rejilla de difracción. La rejilla de difracción tiene 5 000 líneas/cm y está a 1.00 m de la rendija, la cual se ilumina con una luz de sodio. En cualquier lado de la rendija, y paralela a la rejilla, hay una regla de un metro de longitud. El ojo, colocado cerca de la rejilla, ve imágenes virtuales de la rendija a lo largo de la regla. Determine la longitud de onda de la luz si cada imagen de primer orden está a 31.0 cm de la rendija.

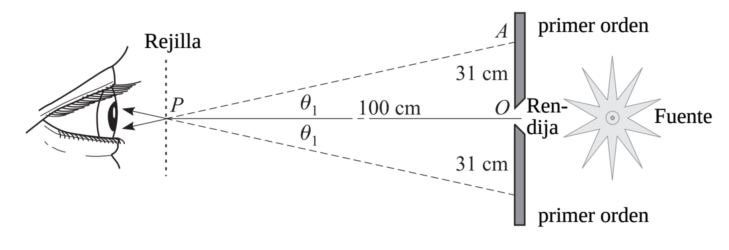


Figura 40-8

$$\tan \theta_1 = 31.0/100 \quad \text{o} \quad \theta_1 = 17.2°$$

y entonces $$\lambda = \frac{a \operatorname{sen} \theta_1}{1} = \frac{(0.000200\ \text{cm})(0.296)}{1} = 592 \times 10^{-7}\ \text{cm} = 592\ \text{nm}$$

40.12 [I] Una luz verde de 540 nm de longitud de onda se difracta en una rejilla que tiene 2 000 líneas/cm. *a*) Calcule la desviación angular de la imagen de tercer orden. *b*) ¿Puede existir una imagen de décimo orden?

a) $$\text{sen}\,\theta_3 = \frac{3\lambda}{a} = \frac{3(5.40 \times 10^{-5}\ \text{cm})}{5.00 \times 10^{-4}\ \text{cm}} = 0.324 \quad \text{o} \quad \theta = 18.9°$$

b) $$\text{sen}\,\theta_{10} = \frac{10\lambda}{a} = \frac{10(5.40 \times 10^{-5}\ \text{cm})}{5.00 \times 10^{-4}\ \text{cm}} = 1.08\ \text{(imposible)}$$

Ya que el valor de sen θ_{10} no puede exceder de 1, no es posible una imagen de décimo orden.

40.13 [II] Demuestre que, en un espectro de luz blanca obtenido con una rejilla, el rojo (λ_r =700 nm) de segundo orden se traslapa con el violeta (λ_v = 400 nm) de tercer orden.

Para el rojo: $$\text{sen}\,\theta_2 = \frac{2\lambda_r}{a} = \frac{2(700)}{a} = \frac{1\,400}{a} \quad (a \text{ en nm})$$

Para el violeta: $$\text{sen}\,\theta_3 = \frac{3\lambda_v}{a} = \frac{3(400)}{a} = \frac{1\,200}{a}$$

Como sen $\theta_2 >$ sen θ_3, $\theta_2 > \theta_3$. Por tanto, el ángulo de difracción de rojo en el segundo orden es mayor que el de violeta en el tercer orden.

40.14 [I] Un haz paralelo de rayos X se difracta mediante un cristal de sal de roca. La reflexión fuerte de primer orden se obtiene cuando el ángulo de centelleo (el ángulo entre la cara del cristal y el haz) es de 6°50′. La distancia entre los planos de reflexión en el cristal es de 2.8 Å. ¿Cuál es la longitud de onda de los rayos X? (1 angstrom = 1 Å = 0.1 nm.)

Note que la ecuación de Bragg contiene el ángulo de centelleo, no el ángulo de incidencia.

$$\lambda = \frac{2d\ \text{sen}\,\phi_1}{1} = \frac{(2)(2.8\ \text{Å})(0.119)}{1} = 0.67\ \text{Å}$$

40.15 [II] Como se muestra en la figura 40-9, dos fuentes puntuales de luz están separadas 50 cm. Son vistas por un ojo a una distancia *L*. La abertura de entrada (pupila) del ojo del observador tiene un diámetro de 3.0 mm. Si el ojo fuera perfecto, el factor límite para resolver las dos fuentes sería el de difracción. En dicho límite, ¿qué tan grande se podría hacer *L* para que las fuentes todavía se vean como entidades separadas?

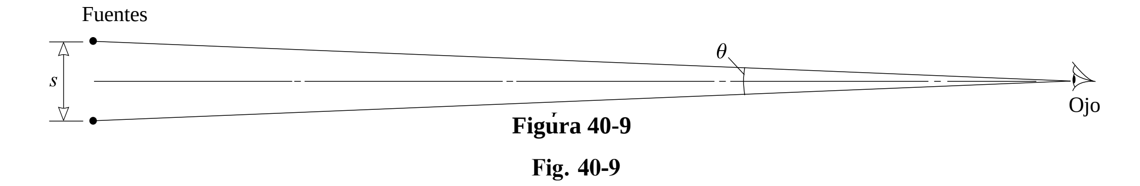


Figura 40-9

Fig. 40-9

Este problema se refiere al *límite de resolución*, que se definió en la página 327. En el caso límite, $\theta = \theta_{cr}$, donde sen θ_{cr} = (1.22) (λ/D). Pero, a partir de la figura, se ve que sen θ_{cr} es aproximadamente igual a s/L, pues *s* es mucho más pequeño que *L*. Al sustituir estos valores se obtiene

$$L \approx \frac{sD}{1.22\lambda} \approx \frac{(0.50\ \text{m})(3.0 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(1.22)(5.0 \times 10^{-7}\ \text{m})} = 2.5\ \text{km}$$

donde se tomó λ = 500 nm, aproximadamente la mitad del rango visible.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

40.16 [II] Dos fuentes sonoras emiten ondas idénticas de 20 cm de longitud de onda a lo largo del eje $+x$. ¿A qué separación de las fuentes una persona sobre el eje más allá de ellas escuchará *a*) el sonido más fuerte y *b*) el sonido más débil? **Resp.** *a*) *m*(20 cm), donde *m* = 0, 1, 2, . . . ; *b*) 10 cm + *m*(20 cm).

40.17 [II] En un experimento como el descrito en el problema 40.1 se observa brillantez para los siguientes grosores de película: 2.90×10^{-7} m, 5.80×10^{-7} m y 8.70×10^{-7} m. *a*) ¿Cuál es la longitud de onda de la luz utilizada? *b*) ¿A qué grosor de la película se observará interferencia destructiva? **Resp.** *a*) 580 nm; *b*) $145\,(1 + 2m)$ nm.

40.18 [I] Se realiza un experimento de doble rendija en el modo usual, con luz de 480 nm y rendijas estrechas separadas 0.050 cm. ¿En qué ángulo con el eje central se observará *a*) la mancha brillante de tercer orden y *b*) el segundo mínimo desde el máximo central? **Resp.** *a*) 0.17°; *b*) 0.083°.

40.19 [I] En el problema 40.18, si la distancia de la pantalla a la rendija es de 200 cm, ¿cuán lejos del máximo central están *a*) la mancha brillante de tercer orden y *b*) el segundo mínimo? **Resp.** *a*) 0.58 cm; *b*) 0.29 cm.

40.20 [I] Una luz roja de 644 nm emitida por una fuente puntual pasa a través de dos rendijas estrechas paralelas separadas 1.00 mm. Determine la distancia entre la franja brillante central y la tercer franja de interferencia oscura que se forma sobre una pantalla paralela al plano de las rendijas y ubicada a 1.00 m de las rendijas.
Resp. 1.61 mm.

40.21 [I] Dos placas planas de vidrio se juntan en el borde superior y se separan en el borde inferior mediante una tira de papel aluminio. La cuña de aire se examina con luz amarilla de sodio (589 nm), que se refleja normalmente desde sus dos superficies, y se observan 42 franjas de interferencia oscura. Calcule el grosor del papel aluminio. **Resp.** 12.4 μm.

40.22 [I] Una mezcla de luz amarilla, con longitud de onda de 580 nm, y luz azul, con longitud de onda de 450 nm, incide normalmente sobre una película de aire de 290 nm de espesor. ¿Cuál es el color de la luz reflejada?
Resp. azul.

40.23 [II] Repita el problema 40.1 si la película tiene un índice de refracción de 1.40 y la longitud de onda al vacío de la luz incidente es de 600 nm. **Resp.** *a*) 0, 214 nm, 429 nm; *b*) 107 nm, 321 nm, 536 nm.

40.24 [II] Repita el problema 40.6 si la cuña, en lugar de aire, está llena con un fluido que tiene un índice de refracción de 1.50. **Resp.** 785 nm.

40.25 [II] Una sola rendija de 0.140 mm de ancho se ilumina con luz monocromática y, sobre una pantalla a 2.00 m de distancia, se observan bandas de difracción. Si la segunda banda oscura está a 16.0 mm de la banda brillante central, ¿cuál es la longitud de onda de la luz? **Resp.** 560 nm.

40.26 [II] Luz verde de 500 nm de longitud de onda incide normalmente sobre una rejilla de difracción y la imagen de segundo orden se difracta 32.0° de la normal. ¿Cuántas líneas/cm se marcan en la rejilla?
Resp. 5.30×10^{3} líneas/cm.

40.27 [II] Un haz angosto de luz amarilla con longitud de onda de 600 nm incide en forma normal sobre una rejilla de difracción de 2 000 líneas/cm, y se forman imágenes sobre una pantalla paralela a la rejilla y ubicada a 1.00 m de distancia. Calcule la distancia sobre la pantalla desde la línea brillante central hasta las líneas de primer orden. **Resp.** 12.1 cm.

40.28 [II] Luz azul de 4.7×10^{-7} nm de longitud de onda se difracta en una rejilla de difracción de 5 000 líneas/cm. *a*) Calcule la desviación angular de la imagen de segundo orden. *b*) Teóricamente, ¿cuál es la imagen de mayor orden posible con esta longitud de onda y rejilla? **Resp.** *a*) 28°; *b*) cuarto orden.

40.29 [II] Determine la razón de las longitudes de onda de dos líneas espectrales si la imagen de segundo orden de una línea coincide con la imagen de tercer orden de la otra línea, y ambas líneas se examinan con la misma rejilla.
Resp. 3:2.

40.30 [II] Se obtiene un espectro de luz blanca con una rejilla de 2 500 líneas/cm. Calcule la separación angular entre el violeta ($\lambda_v = 400$ nm) y el rojo ($\lambda_r = 700$ nm) en *a*) el primer orden y *b*) el segundo orden. *c*) ¿El amarillo en el tercer orden ($\lambda_y = 600$ nm) se traslapa con el violeta en el cuarto orden? **Resp.** *a*) 4°20′; *b*) 8°57′; *c*) sí.

40.31 [II] Mediante una rejilla se produce un espectro de la radiación solar en la región infrarroja. ¿Cuál es la longitud de onda estudiada, si la línea infrarroja en el primer orden ocurre a un ángulo de 25.0° con la normal, y la imagen de cuarto orden de la línea del hidrógeno de longitud de onda 656.3 nm ocurre a 30.0°? **Resp.** 2.22×10^{-6} m.

40.32 [III] ¿Qué tan separados están los planos difractores en un cristal de NaCl para los cuales los rayos X de 1.54 Å de longitud de onda forman un ángulo de centelleo de 15°54′ en el primer orden? **Resp.** 2.81 Å.

RELATIVIDAD 41

UN MARCO DE REFERENCIA es un sistema coordenado respecto al cual se realizan mediciones físicas. Un ***marco de referencia inercial*** es aquel que se mueve con velocidad constante, es decir, que no acelera.

LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD fue propuesta por Albert Einstein (1905) y se ocupa del estudio de los cuerpos que se mueven con velocidad constante. Los postulados de Einstein fueron:

1. Las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales. Por tanto, todo movimiento es relativo. La velocidad de un objeto sólo puede darse en relación con otro objeto.
2. La rapidez de la luz en el vacío, c, tiene el mismo valor para todos los observadores, independiente del movimiento de la fuente (o del movimiento del observador).

Estos postulados conducen a las conclusiones siguientes.

EL MOMENTO LINEAL RELATIVISTA ($\vec{\mathbf{p}}$) de un cuerpo de masa m y rapidez v es

$$\vec{\mathbf{p}} = \frac{m\vec{\mathbf{v}}}{\sqrt{1-(v/\mathrm{c})^2}} = \gamma m\vec{\mathbf{v}}$$

en donde $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/\mathrm{c})^2}$ y $\gamma > 1$. Algunos físicos prefieren asociar la γ con la masa e introducen la masa relativista $m_R = \gamma m$. Esto permite escribir el momento lineal como $p = m_R v$, pero entonces m_R depende de la rapidez. En este texto sólo se usará una masa, m, que es independiente de su rapidez, tal como las otras dos propiedades fundamentales de las partículas de materia: carga y espín.

RAPIDEZ LÍMITE: Cuando $v = \mathrm{c}$, el momento de un objeto se vuelve infinito. Se concluye que ningún objeto puede acelerarse hasta la rapidez de la luz c, y por tanto c es un límite superior para la rapidez.

ENERGÍA RELATIVISTA (E)**:** La energía total de un cuerpo de masa m se expresa por

$$\mathrm{E} = \gamma m\mathrm{c}^2$$

en donde

$$\text{energía total} = \text{energía cinética} + \text{energía en reposo}$$

o

$$\mathrm{E} = \mathrm{EC} + \mathrm{E}_0$$

Cuando un cuerpo está en reposo, $\gamma = 1$, $\mathrm{EC} = 0$ y la **energía en reposo** (E_0) está dada por

$$\mathrm{E}_0 = m\mathrm{c}^2$$

La energía en reposo incluye todas las formas de energía interna al sistema.

La **energía cinética** de un cuerpo de masa m es

$$\mathrm{EC} = \gamma m\mathrm{c}^2 - m\mathrm{c}^2$$

Si la rapidez del objeto no es demasiado grande, esto se reduce a la expresión usual

$$\mathrm{EC} = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad (v \ll c)$$

Si se usa la expresión $p = \gamma m v$, la energía total de un cuerpo se puede escribir como

$$\mathrm{E}^2 = m^2\mathrm{c}^4 + p^2\mathrm{c}^2$$

DILATACIÓN DEL TIEMPO: *El tiempo es relativo*, "fluye" con rapideces diferentes para observadores que se mueven de manera distinta. Suponga que una nave espacial y un planeta se mueven uno con respecto al otro a una rapidez relativa v y que cada uno lleva un reloj idéntico. La piloto de la nave verá que pasa un intervalo de tiempo Δt_S en el reloj de la nave, con respecto al cual ella está *estacionaria*. Un observador sobre el suelo también verá que pasa un intervalo de tiempo Δt_S en el reloj de la nave, la cual se *mueve* con respecto a él. Sin embargo, él verá que el intervalo toma un tiempo (medido en su reloj) de Δt_M, donde $\Delta t_M > \Delta t_S$. El observador sobre el suelo verá que el tiempo transcurre con mayor lentitud a bordo de la nave. Por ejemplo, él podría ver que transcurren 10 minutos (es decir, Δt_S) en el reloj de la nave mientras que su propio reloj muestra que quizás pasaron 20 minutos (es decir, Δt_M). De acuerdo con esto,

$$\Delta t_M = \gamma \Delta t_S$$

Recuerde que $\gamma > 1$. De manera análoga, la piloto verá que el tiempo transcurre con mayor lentitud sobre el suelo.

El tiempo requerido para que un evento ocurra, según lo registra un observador estacionario en el sitio del evento, se llama **tiempo propio**, Δt_S. Todos los observadores que se mueven pasando por el sitio registran un tiempo más largo para que el evento ocurra. Por tanto, el tiempo propio para la duración de un evento es el tiempo medido más pequeño para este evento.

SIMULTANEIDAD: Suponga que para un observador dos eventos ocurren en *diferentes posiciones*, pero al mismo tiempo. Los eventos son simultáneos para este observador, pero en general éstos no son simultáneos para un segundo observador en movimiento respecto al primero.

CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD: Suponga que se mide un objeto que tiene una longitud de componente x L_S cuando está en reposo (L_S se llama **longitud propia**). Entonces al objeto se le da una rapidez v en la dirección x, de modo que se mueve con respecto a un observador. Ese observador verá que el objeto se ha acortado en la dirección x (pero no en las direcciones y y z). Su longitud x medida por el observador con respecto a quien se mueve (L_M) será entonces

$$L_M = L_S \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

donde $L_S > L_M$.

FÓRMULA PARA SUMAR VELOCIDADES: En la figura 41-1 se muestra un sistema de coordenadas S' en movimiento con una rapidez $v_{O'O}$ con respecto a un sistema de coordenadas S. Ahora considere un objeto en el punto P que se mueve en la dirección x con una rapidez $v_{PO'}$ relativa al punto O'. La relatividad espacial establece que la rapidez del objeto con respecto a O no es el valor clásico de $v_{PO'} + v_{O'O}$ sino, en lugar de ello es

$$v_{PO} = \frac{v_{PO'} + v_{O'O}}{1 + \dfrac{v_{PO'} v_{O'O}}{c^2}}$$

Advierta que, incluso cuando $v_{PO'} = v_{O'O} = c$, el valor de $v_{PO} = c$.

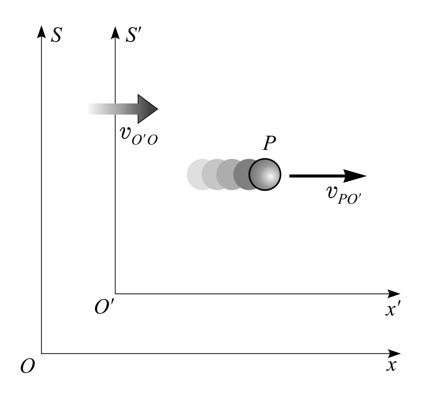


Figura 41-1

PROBLEMAS RESUELTOS

41.1 [I] ¿Con qué rapidez debe moverse un objeto si su valor correspondiente de γ debe ser 1.0% mayor que γ cuando el objeto está en reposo? Dé su respuesta a dos cifras significativas.

Use la definición $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ para hallar que con $v = 0$, $\gamma = 1.0$. En consecuencia, el nuevo valor de $\gamma = 1.01(1.0)$ y, por tanto

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{1.01}\right)^2 = 0.980$$

Si se resuelve, da $v = 0.14c = 4.2 \times 10^7$ m/s.

41.2 [I] Calcule el valor de γ para una partícula que viaja a la mitad de la rapidez de la luz. Dé su respuesta a tres cifras significativas.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.500)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0.750}} = \frac{1}{0.866} = 1.15$$

41.3 [II] Si 1.00 g de materia se pudiera convertir íntegramente en energía, ¿cuál sería el valor de la energía producida, si el costo por kW · h es de 10.0 centavos?

Se utiliza $\Delta E_0 = (\Delta m)c^2$ para determinar

$$\text{Energía ganada} = (\text{masa perdida})c^2 = (1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 8.99 \times 10^{13}\ \text{J}$$

$$\text{Valor de la energía} = (8.99 \times 10^{13}\ \text{J})\left(\frac{1\ \text{kW}\cdot\text{h}}{3.600 \times 10^6\ \text{J}}\right)\left(\frac{\$\ 0.10}{\text{kW}\cdot\text{h}}\right) = \$\ 2.50 \times 10^6$$

41.4 [II] Un objeto de 2.0 kg se levanta desde el piso hasta una mesa que está a 30 cm sobre éste. ¿En cuánto aumenta la masa del sistema, que consta de la Tierra y el objeto, debido a este incremento en su EP_G?

Se utiliza $\Delta E_0 = (\Delta m)c^2$, con $\Delta E_0 = mgh$. Por tanto,

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{mgh}{c^2} = \frac{(2.0\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)(0.30\ \text{m})}{(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 6.5 \times 10^{-17}\ \text{kg}$$

41.5 [III] Un electrón se acelera desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 1.5 MV y en consecuencia adquiere una energía de 1.5 MeV. Determine su rapidez final.

Si se usa $EC = \gamma mc^2 - mc^2$ y el hecho de que $EC = \Delta EP_E$, se tiene

$$EC = (1.5 \times 10^6\ \text{eV})(1.6 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}) = 2.4 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

Entonces $$(\gamma m - m) = \frac{EC}{c^2} = \frac{2.4 \times 10^{-13}\ \text{J}}{(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2} = 2.67 \times 10^{-30}\ \text{kg}$$

Pero $m = 9.11 \times 10^{-31}$ kg y así $\gamma m = 3.58 \times 10^{-30}$ kg.

Para calcular la rapidez, se usa $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, lo cual da

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{m}{\gamma m}\right)^2 = \left(\frac{0.91}{3.58}\right)^2 = 0.0646$$

de donde $$v = c\sqrt{1\ /\ 0.0646} = 0.967c = 2.9 \times 10^8\ \text{m/s}$$

41.6 [II] Determine la energía requerida para dar a un electrón una rapidez de 0.90 la de la luz, partiendo del reposo.

$$\text{EC} = (\gamma m - m)\text{c}^2 = \left[\frac{m}{\sqrt{1-(v/\text{c})^2}} - m\right]\text{c}^2 = m\text{c}^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v/\text{c})^2}} - 1\right]$$

$$= (9.11\times10^{-31}\ \text{kg})(2.998\times10^{8}\ \text{m/s})^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(0.90)^2}} - 1\right] = 1.06\times10^{-13}\ \text{J} = 0.66\ \text{MeV}$$

41.7 [III] Demuestre que $\text{EC} = (\gamma m - m)\text{c}^2$ se reduce a $\text{EC} = \frac{1}{2}mv^2$ cuando v es mucho menor que c.

$$\text{EC} = (\gamma m - m)\text{c}^2 = \left[\frac{m}{\sqrt{1-(v/\text{c})^2}} - m\right]\text{c}^2 = m\text{c}^2\left[\left(1-\frac{v^2}{\text{c}^2}\right)^{-1/2} - 1\right]$$

Sea $b = -v^2/\text{c}^2$ y expanda $(1+b)^{-1/2}$ por el teorema binomial:

$$(1+b)^{-1/2} = 1 + (-1/2)b + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!}b^2 + \cdots = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{\text{c}^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{\text{c}^4} + \cdots$$

Entonces
$$\text{EC} = m\text{c}^2\left[\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{\text{c}^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{\text{c}^4} + \cdots\right) - 1\right] = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}mv^2\frac{v^2}{\text{c}^2} + \cdots$$

Si v es mucho más pequeña que c, entonces los términos después de $\frac{1}{2}mv^2$ son despreciablemente pequeños.

41.8 [III] Un electrón que viaja con gran rapidez (o relativista) se mueve perpendicularmente a un campo magnético de 0.20 T. Su trayectoria es circular, con radio de 15 m. Determine *a*) el momento, *b*) la rapidez y *c*) la energía cinética del electrón. Recuerde que, en situaciones no relativistas, la fuerza magnética qvB proporciona la fuerza centrípeta mv^2/r. Por tanto, dado que $p = mv$, se sigue que

$$p = qBr$$

y esta relación se sostiene incluso cuando los efectos relativistas son importantes.

En primer lugar, encuentre el momento lineal al usar $p = qBr$

a)
$$p = (1.60\times10^{-19}\ \text{C})(0.20\ \text{T})(15\ \text{m}) = 4.8\times10^{-19}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

b) Debido a que $p = mv/\sqrt{1-(v^2/\text{c}^2)}$ con $m = 9.11\times10^{-31}$ kg, se tiene

$$4.8\times10^{-19}\ \text{kg}\cdot\text{m/s} = \frac{(m\text{c})(v/\text{c})}{\sqrt{1-(v^2/\text{c}^2)}}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y resolver para $(v/\text{c})^2$ se obtiene

$$\frac{v^2}{\text{c}^2} = \frac{1}{1+3.23\times10^{-7}} \quad \text{o} \quad \frac{v}{\text{c}} = \frac{1}{\sqrt{1+3.23\times10^{-7}}}$$

La mayoría de las calculadoras no manejan esto. Sin embargo, recuerde que $1/\sqrt{1+x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ para $x \ll 1$. Entonces

$$v/\text{c} \approx 1 - 1.61\times10^{-7} = 0.99999984$$

c) $$\text{EC} = (\gamma m - m)c^2 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - 1\right]$$

Pero ya se calculó $(v/c)^2 = 1/(1+3.23\times10^{-7})$. Si se utiliza la aproximación $1/(1+x) \approx 1 - x$ para $x \ll 1$, se tiene $(v/c)^2 \approx 1 - 3.23\times10^{-7}$. Entonces

$$\text{EC} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{3.23\times10^{-7}}} - 1\right) = (mc^2)(1.76\times10^3)$$

Al evaluar la expresión anterior se obtiene

$$\text{EC} = 1.4\times10^{-10}\ \text{J} = 9.0\times10^8\ \text{eV}$$

Un método alternativo de solución podría ser el de utilizar $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ y recordar que $\text{EC} = E - mc^2$.

41.9 [II] El Sol irradia energía uniformemente en todas direcciones. En la posición de la Tierra ($r = 1.50\times10^{11}$ m), la radiación del Sol es de 1.4 kW/m². ¿Qué cantidad de masa pierde el Sol por día debido a la radiación?

El área de un cascarón esférico centrado en el Sol y que pasa a través de la Tierra es:

$$\text{Área} = 4\pi r^2 = 4\pi(1.50\times10^{11}\ \text{m})^2 = 2.83\times10^{23}\ \text{m}^2$$

A través de cada metro cuadrado de esta área, la energía que el Sol irradia por segundo es de 1.4 kW/m². Por tanto, la radiación total del Sol por segundo es

$$\text{Energía/s} = (\text{área})(1\,400\ \text{W/m}^2) = 3.96\times10^{26}\ \text{W}$$

La energía irradiada en un día (86 400 s) es

$$\text{Energía/día} = (3.96\times10^{26}\ \text{W})(86\,400\ \text{s/día}) = 3.42\times10^{31}\ \text{J/día}$$

Puesto que la masa y la energía se relacionan a través de $\Delta E_0 = \Delta mc^2$, la masa perdida por día es

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{3.42\times10^{31}\ \text{J}}{(2.998\times10^8\ \text{m/s})^2} = 3.8\times10^{14}\ \text{kg}$$

Para comparación, la masa del Sol es de 2×10^{30} kg.

41.10 [I] Se mide un haz de partículas radiactivas cuando se dispara en un laboratorio. Se encuentra que, en promedio, cada partícula "vive" durante un tiempo de 2.0×10^{-8} s; después de este tiempo, la partícula cambia a una nueva forma. Cuando las mismas partículas están en reposo en el laboratorio, "viven" en promedio 0.75×10^{-8} s. ¿Qué tan rápido se mueven las partículas del haz?

Algún tipo de mecanismo temporizador dentro de la partícula determina cuánto "vive". Este reloj interno, que le da el tiempo de vida apropiado, debe obedecer la relación de la dilatación del tiempo. Se tiene $\Delta t_M = \gamma\Delta t_S$, en donde el observador con respecto a quien se mueve la partícula (reloj) ve un intervalo de tiempo de $\Delta t_M = 2.0\times10^{-8}$ s. En consecuencia,

$$2.0\times10^{-8}\ \text{s} = \gamma(0.75\times10^{-8}\ \text{s}) \qquad \text{o} \qquad 0.75\times10^{-8} = (2.0\times10^{-8})\sqrt{1-(v/c)^2}$$

Elevar al cuadrado ambos miembros y resolver para v conduce a $v = 0.927c = 2.8\times10^8$ m/s.

41.11 [II] Dos gemelas tienen 25.0 años de edad cuando una de ellas sale en un viaje por el espacio a una rapidez casi constante. La gemela que va en la nave espacial mide el tiempo con un reloj exacto. Cuando regresa a la Tierra, ella afirma tener 31 años de edad, mientras que su gemela, que se quedó en la Tierra, sabe que tiene 43 años. ¿Cuál fue la rapidez de la nave espacial?

El reloj de la nave espacial visto por la gemela espacial da la lectura del tiempo de viaje como Δt_S, que es de 6.0 años. La gemela que se queda en la Tierra ve que su hermana envejece 6 años, pero su reloj le indica que, en realidad, ha transcurrido un tiempo $\Delta t_M = 18.0$ años. Por tanto, $\Delta t_M = \gamma \Delta t_S$ se convierte en $\Delta t_S = \Delta t_M \sqrt{1 - (v/c)^2)}$ y así

$$6 = 18\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

de donde $$(v/c)^2 = 1 - 0.111 \quad \text{o} \quad v = 0.943c = 2.83 \times 10^8 \text{ m/s}$$

41.12 [II] Dos células, que en la Tierra se dividen cada 10.0 s, parten desde la Tierra en un viaje hacia el Sol (a 1.50 $\times 10^{11}$ m de distancia) en una nave espacial que se mueve a 0.850c. ¿Cuántas células existirán cuando la nave espacial se estrelle con el Sol?

Según los observadores de la Tierra, con respecto a quienes se mueven las células, el tiempo requerido para realizar el viaje hasta el Sol es la distancia recorrida (x) sobre la rapidez (v),

$$\Delta t_M = \frac{x}{v} = \frac{1.50 \times 10^{11} \text{ m}}{(0.850)(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})} = 588 \text{ s}$$

Debido a que los relojes de la nave se mueven con respecto al planeta, aparentemente desde la Tierra se mueven más lentamente. La lectura del tiempo que dan estos relojes es

$$\Delta t_S = \Delta t_M / \gamma = \Delta t_M \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

y, por consiguiente, $$\Delta t_S = 310 \text{ s}$$

Las células se dividen de acuerdo con el reloj de la nave espacial, un reloj que está en reposo respecto a ellas. Por tanto, realizan 31 divisiones en ese tiempo, ya que se dividen cada 10.0 s. Así, el número total de células presentes al estrellarse es

$$(2)^{31} = 2.1 \times 10^9 \text{ células}$$

41.13 [I] En una nave espacial, una persona sostiene una regla de medir cuando la nave pasa por la Tierra con una rapidez v paralela a la superficie del planeta. ¿Qué notará la persona que va en la nave cuando gire la regla de paralela a perpendicular con respecto al movimiento de la nave?

La regla se comporta de manera normal; no cambia su longitud porque no tiene movimiento traslacional relativo al observador en la nave espacial. Sin embargo, un observador en la Tierra diría que la regla mide $(1 \text{ m})\sqrt{1 - (v/c)^2}$ cuando está paralela al movimiento de la nave, y 1 m cuando está perpendicular al movimiento de ésta.

41.14 [II] Una nave espacial que se mueve a 0.95c viaja desde la Tierra hacia la estrella Alfa Centauro, que está a 4.5 años luz de distancia. ¿Cuánto tardará el viaje de acuerdo con *a*) un reloj en la Tierra y *b*) un reloj en la nave? *c*) ¿Qué tan lejos está la Tierra de la estrella de acuerdo con los ocupantes de la nave? *d*) ¿Qué rapidez calculan tener?

Un año luz es la distancia que recorre la luz en 1 año, es decir

$$1 \text{ año luz} = (2.998 \times 10^8 \text{ m/s})(3.16 \times 10^7 \text{ s}) = 9.47 \times 10^{15} \text{ m}$$

Por consiguiente, la distancia a la estrella (de acuerdo con los terrícolas) es

$$d_e = (4.5)(9.47 \times 10^{15} \text{ m}) = 4.3 \times 10^{16} \text{ m}$$

a)
$$\Delta t_e = \frac{d_e}{v} = \frac{4.3 \times 10^{16}\ \text{m}}{(0.95)(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})} = 1.5 \times 10^8\ \text{s}$$

b) Debido a que los relojes en la nave corren lentamente,

$$\Delta t_{\text{nave}} = \Delta t_{\text{e}}\sqrt{1-(v/\text{c})^2} = (1.51 \times 10^8\ \text{s})(0.312) = 4.7 \times 10^7\ \text{s}$$

c) Para los ocupantes de la nave, la distancia Tierra-estrella pasa frente a ellos con una rapidez de 0.95c. Por tanto, dicha distancia se acorta para los tripulantes, quienes determinan que es de

$$d_{\text{nave}} = (4.3 \times 10^{16}\ \text{m})\ \sqrt{1-(0.95)^2} = 1.3 \times 10^{16}\ \text{m}$$

d) Para los ocupantes de la nave, su rapidez relativa es

$$v = \frac{d_{\text{nave}}}{\text{A}t_{\text{nave}}}\ 2\ \frac{1.34\ 0\ 10^{16}\ \text{m}}{4.71\ 0\ 10^{7}\ \text{s}}\ 2\ 2.8\ 0\ 10^{8}\ \text{m/s}$$

que es 0.95c. Tanto los observadores en la Tierra como en la nave miden la misma rapidez relativa.

41.15 [II] Cuando un cohete pasa en su órbita por la Tierra con rapidez v envía un pulso de luz por delante de él. ¿Cuán rápido se mueve el pulso de luz de acuerdo con una persona que se encuentre sobre la Tierra?

Método 1

Con rapidez c (por el segundo postulado de la Relatividad Especial)

Método 2

En este caso, $v_{O'O} = v$ y $v_{PO'} = \text{c}$. Según la fórmula de suma de velocidades, la rapidez observada será (puesto que, en este caso, $u = \text{c}$)

$$v_{PO} = \frac{v_{PO'} + v_{O'O}}{1 + \dfrac{v_{PO'}v_{O'O}}{\text{c}^2}} = \frac{v + \text{c}}{1 + (v/\text{c})} = \frac{(v+\text{c})\text{c}}{\text{c}+v} = \text{c}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

41.16 [I] ¿A qué rapidez se debe mover una partícula para que γ sea 2.0? **Resp.** 2.6×10^8 m/s.

41.17 [I] Una partícula viaja con una rapidez v tal que $v/\text{c} = 0.99$. Determine γ para la partícula. **Resp.** 7.1.

41.18 [I] Calcule la *energía en reposo* de un electrón, es decir, la energía equivalente a su masa, 9.11×10^{-31} kg. **Resp.** 0.512 MeV = 820 pJ.

41.19 [I] Determine la rapidez de un electrón que tiene una energía cinética de 1.0×10^5 eV (o equivalentemente, 1.6×10^{-14} J). **Resp.** 1.6×10^8 m/s.

41.20 [II] Un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) se acelera hasta una energía cinética de 200 MeV. ¿Cuál es su rapidez en esta energía? **Resp.** 1.70×10^8 m/s.

41.21 [II] Con la definición de momento lineal y la relación entre masa y energía, pruebe que $\text{E}^2 = p^2\text{c}^2 + m^2\text{c}^4$. Utilice esta relación para demostrar que la EC traslacional de una partícula es $\sqrt{m^2\text{c}^4\ .\ p^2\text{c}^2} - m\text{c}^2$.

41.22 [II] Cierta especie de bacteria duplica su número cada 20 días. Dos de estas bacterias se colocan en una nave espacial y parten en viaje desde la Tierra durante 1 000 días terrestres. En este tiempo, la velocidad de la nave es de 0.9950c. ¿Cuántas bacterias estarán a bordo de la nave cuando aterrice sobre la Tierra?
Resp. 64.

41.23 [II] Cierta fuente de luz envía 2×10^{15} pulsos cada segundo. Cuando una nave espacial viaja paralela a la superficie de la Tierra con una rapidez de 0.90c, utiliza esta fuente para enviar pulsos hacia la Tierra. Los pulsos se envían perpendiculares a la trayectoria de la nave. ¿Cuántos pulsos se registran en la Tierra cada segundo?
Resp. 8.7×10^{14} pulsos/s.

41.24 [II] La insignia pintada sobre el lado de una nave espacial es un círculo con una línea atravesada a 45° con la vertical. Cuando la nave pasa a otra nave en el espacio, con una rapidez relativa de 0.95c, la segunda nave observa la insignia. ¿Qué ángulo forma con la vertical la línea observada? **Resp.** $\tan \theta = 0.31$ y $\theta = 17°$.

41.25 [II] Cuando una nave espacial, que se mueve a 0.92c, pasa junto a un observador sobre la Tierra, éste y los ocupantes de la nave ponen a funcionar la alarma de sus relojes idénticos para que suenen después de que hayan pasado 6.0 h. De acuerdo con los observadores de la Tierra, ¿cuánto marcará el reloj de la Tierra cuando suene la alarma del reloj de la nave? **Resp.** 15.3 h.

41.26 [III] Determine la rapidez y el momento de un protón ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg) que se acelera a través de una diferencia de potencial de 2 000 MV. (A esto se le llama protón 2 GeV.) Dé sus resultados a tres cifras significativas.
Resp. 0.948c, 1.49×10^{-18} kg · m/s.

FÍSICA CUÁNTICA Y MECÁNICA ONDULATORIA 42

CUANTOS DE RADIACIÓN: Todas las formas de radiación electromagnética, incluida la luz, tienen naturaleza dual. Cuando viajan por el espacio, actúan como ondas y dan origen a efectos de interferencia y difracción. Sin embargo, cuando la radiación electromagnética interactúa con los átomos y las moléculas, el haz se comporta como flujo de corpúsculos energéticos llamados **fotones** o *cuantos de luz*.

La energía (E) de cada fotón depende de su frecuencia f (o de la longitud de onda λ) de la radiación:

$$\mathrm{E} = hf = \frac{h\mathrm{c}}{\lambda}$$

donde $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J · s es una constante de la naturaleza conocida como **constante de Planck**.

EFECTO FOTOELÉCTRICO: Cuando radiación electromagnética incide sobre la superficie de ciertos metales, pueden expulsarse electrones. Un fotón de energía hf penetra en el material y es absorbido por un electrón. Si se cuenta con energía suficiente, el electrón se elevará a la superficie y es expulsado con cierta energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$. Dependiendo de cuán profundos se encuentren en el material, se emitirán electrones que tengan un rango de valores de EC. Sea ϕ la energía necesaria para que un electrón se escape de la superficie, la llamada **función de trabajo**. Para empezar con los electrones cercanos a la superficie, se dispondrá de una cantidad de energía $(hf - \phi)$ y ésta es la energía cinética máxima que se puede impartir a cualquier electrón.

En consecuencia, la **ecuación fotoeléctrica** *de Einstein* es

$$\tfrac{1}{2}mv^2_{\text{máx}} = hf - \phi$$

La energía del electrón emitido se puede calcular determinando qué diferencia de potencial V se debe aplicar para detener su movimiento; entonces $\frac{1}{2}mv^2 = V_s e$. Para el electrón más energético,

$$hf - \phi = V_s e$$

donde V_s es el **potencial de frenado**.

Para cualquier superficie, la radiación debe ser de longitud de onda lo suficientemente corta como para que la energía del fotón hf sea lo suficientemente grande para desprender al electrón. En la **longitud de onda umbral** (o *frecuencia*), la energía del fotón es casi igual a la función de trabajo. Para un metal ordinario, la longitud de onda umbral cae en el rango visible o ultravioleta. Los rayos X desprenderán fotoelectrones fácilmente; los fotones del infrarrojo lejano no lo harán así.

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO DE UN FOTÓN: Puesto que $\mathrm{E}^2 = m^2\mathrm{c}^4 + p^2\mathrm{c}^2$, cuando $m = 0$, $\mathrm{E} = p\mathrm{c}$. En consecuencia, dado que $\mathrm{E} = hf$,

$$\mathrm{E} = p\mathrm{c} = hf \quad \text{y} \quad p = \frac{hf}{\mathrm{c}} = \frac{h}{\lambda}$$

La cantidad de movimiento de un fotón es $p = h/\lambda$.

EFECTO COMPTON: Un fotón puede chocar con una partícula que tenga masa, por ejemplo, con un electrón. Cuando esto sucede, el fotón dispersado puede tener nueva energía y cantidad de movimiento. Si un fotón con longitud de onda inicial λ_i choca con un electrón libre en reposo de masa m_e y se desvía un ángulo θ, entonces su longitud de onda dispersada aumenta a λ_s, donde

$$\lambda_s = \lambda_i + \frac{h}{m_e\mathrm{c}}(1 - \cos\theta)$$

El cambio fraccional en la longitud de onda es muy pequeño, excepto para radiación de alta energía como los rayos X y los rayos γ.

LONGITUD DE ONDA DE DE BROGLIE (λ): Una partícula de masa m que se mueve con cantidad de movimiento p tiene asociada una **longitud de onda de De Broglie**

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Un haz de partículas se puede difractar y experimentar fenómenos de interferencia. Estas propiedades ondulatorias de las partículas se pueden calcular al suponer que las partículas se comportan como ondas (*ondas de De Broglie*) que tienen longitud de onda de De Broglie.

RESONANCIA DE LAS ONDAS DE DE BROGLIE: Se dice que una partícula confinada en una región finita del espacio es una partícula *ligada*. Ejemplos típicos de sistemas de partículas ligadas son las moléculas de un gas en un recipiente cerrado y un electrón en un átomo. La onda de De Broglie que representa a una partícula ligada entrará en resonancia dentro de la región de confinamiento si la longitud de onda cabe adecuadamente en esa región. A cada posible forma de resonancia se le llama *estado* (estacionario) del sistema. Es más probable encontrar la partícula en las posiciones de los antinodos de la onda resonante; nunca se encuentra en las posiciones de los nodos.

LAS ENERGÍAS CUANTIZADAS de las partículas ligadas se deben a que cada situación de resonancia tiene una energía discreta asociada con ella. Ya que es más probable encontrar a la partícula sólo en un estado de resonancia, las energías observadas son discretas (*cuantizadas*). Únicamente en sistemas de partículas atómicas (o más pequeñas) las diferencias de energía entre los estados de resonancia son lo suficientemente grandes para ser observadas.

PROBLEMAS RESUELTOS

42.1 [I] Demuestre que los fotones en un un haz de luz infrarroja de 1 240 nm tienen energías de 1.00 eV.

$$\mathrm{E} = hf = \frac{h\mathrm{c}}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{1\,240 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} = 1.00\ \mathrm{eV}$$

42.2 [I] Calcule la energía de un fotón de luz azul de 450 nm de longitud de onda.

$$\mathrm{E} = \frac{h\mathrm{c}}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{450 \times 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 4.42 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2.76\ \mathrm{eV}$$

42.3 [I] Para romper un enlace químico en las moléculas de piel humana y por tanto causar una quemadura de Sol, se requiere una energía de fotón de aproximadamente 3.50 eV. ¿A qué longitud de onda corresponde esta energía?

$$\lambda = \frac{h\mathrm{c}}{\mathrm{E}} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{(3.50\ \mathrm{eV})(1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/eV})} = 354\ \mathrm{nm}$$

La radiación ultravioleta causa quemaduras por el Sol.

42.4 [II] La función de trabajo de metal de sodio es 2.3 eV. ¿Cuál es la longitud de onda más grande de la luz que puede producir emisión de fotoelectrones en el sodio?

En el umbral, la energía del fotón es exactamente igual a la energía que se requiere para desprender un electrón del metal. Dicho de otra manera, la EC del electrón es cero y por tanto $hf = \phi$. Ya que $f = \mathrm{c}/\lambda$,

$$\phi = \frac{h\mathrm{c}}{\lambda}$$

$$(2.3\ \mathrm{eV})\left(\frac{1.602 \times 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1.00\ \mathrm{eV}}\right) = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{\lambda}$$

$$\lambda = 5.4 \times 10^{-7}\ \mathrm{m}$$

42.5 [II] ¿Qué diferencia de potencial se debe aplicar para detener al fotoelectrón más rápido emitido por una superficie de níquel bajo la acción de luz ultravioleta de 200 nm de longitud de onda? La función de trabajo para el níquel es de 5.01 eV.

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{2\,000\ \times 10^{-10}\ \mathrm{m}} = 9.95 \times 10^{-19}\ \mathrm{J} = 6.21\ \mathrm{eV}$$

Entonces, de la ecuación del efecto fotoeléctrico, la energía del electrón emitido con mayor rapidez es

$$6.21\ \mathrm{eV} - 5.01\ \mathrm{eV} = 1.20\ \mathrm{eV}$$

Entonces se requiere un potencial retardador negativo de 1.20 V. Éste es el potencial de frenado.

42.6 [II] ¿Emitirá fotoelectrones una superficie de cobre, con una función de trabajo de 4.4 eV, cuando se ilumina con luz visible?

Igual que en el problema 42.4, la EC de los electrones liberados = 0 y por tanto

$$\lambda\ \text{umbral} = \frac{hc}{\phi} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})}{4.4(1.602 \times 10^{-19})\ \mathrm{J}} = 282\ \mathrm{nm}$$

Por tanto, la luz visible (400 nm a 700 nm) no puede desprender fotoelectrones del cobre.

42.7 [II] Un haz láser ($\lambda = 633$ nm) del tipo diseñado para que lo usen los estudiantes tiene una intensidad de 3.0 mW. ¿Cuántos fotones pasan por un punto dado en el haz cada segundo?

La energía que pasa por un punto en cada segundo es de 0.0030 J. Como la energía por fotón es de hc/λ, que resulta ser 3.14×10^{-19} J, la cantidad de fotones que pasan el punto por segundo es

$$\text{Número/s} = \frac{0.0030\ \mathrm{J/s}}{3.14 \times 10^{-19}\ \mathrm{J/fotón}} = 9.5 \times 10^{15}\ \text{fotones/s}$$

42.8 [III] En un proceso llamado *producción de pares*, un fotón se transforma en un electrón y un positrón. Un positrón tiene la misma masa (m_e) que un electrón, pero su carga es $+e$. Hasta tres cifras significativas, ¿cuál es la mínima energía que puede tener un fotón si ocurre este proceso? ¿Cuál es la longitud de onda correspondiente?

El par electrón-positrón llegará moviéndose con alguna cantidad mínima de EC. Las partículas se separarán y, conforme lo hagan, frenarán. Cuando se encuentren lejos tendrán una masa de 9.11×10^{-31} kg. En efecto, la EC se transforma en EP, la cual se manifiesta como masa.

Así, el fotón con energía mínima en el inicio del proceso debe tener, al final del proceso, la energía equivalente de la masa de partícula libre del par. En consecuencia,

$$E = 2m_e c^2 = (2)(9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(2.998 \times 10^{8}\ \mathrm{m/s})^2 = 1.64 \times 10^{-13}\ \mathrm{J} = 1.02\ \mathrm{MeV}$$

Entonces, como esta energía debe ser igual a hc/λ, la energía del fotón,

$$\lambda = \frac{hc}{1.64 \times 10^{-13}\ \mathrm{J}} = 1.21 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}$$

Esta longitud de onda está en la región de los rayos X muy cortos, la región de los rayos gamma.

42.9 [II] ¿Qué longitud de onda debe tener la radiación electromagnética para que un fotón en un haz tenga la misma cantidad de movimiento que un electrón que se mueve con una rapidez de 2.00×10^5 m/s?

Se requiere que $(mv)_{\text{electrón}} = (h/\lambda)_{\text{fotón}}$. De ello,

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \mathrm{kg})(2.00 \times 10^{5}\ \mathrm{m/s})} = 3.64\ \mathrm{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región de los rayos X.

42.10 [II] Suponga que un fotón con longitud de onda de 3.64 nm que se mueve en la dirección $+x$ choca frontalmente con un electrón cuya rapidez es 2×10^5 m/s y se mueve en la dirección $-x$. Si la colisión es perfectamente elástica, encuentre las condiciones después de la colisión.

De la ley de la conservación de la cantidad de movimiento.

$$\text{cantidad de movimiento antes} = \text{cantidad de movimiento después}$$

$$\frac{h}{\lambda_0} - mv_0 = \frac{h}{\lambda} - mv$$

Sin embargo, del problema 42.9, $h/\lambda_0 = mv_0$ en este caso. En consecuencia, $h/\lambda = mv$. Además, para una colisión perfectamente elástica,

$$\text{EC antes} = \text{EC después}$$

$$\frac{h\text{c}}{\lambda_0} + \tfrac{1}{2}mv_0^2 = \frac{h\text{c}}{\lambda} + \tfrac{1}{2}mv^2$$

Al usar los hechos de que $h/\lambda_0 = mv_0$ y $h/\lambda = mv$, se encuentra que

$$v_0(\text{c} + \tfrac{1}{2}v_0) = v(\text{c} + \tfrac{1}{2}v)$$

Por tanto, $v = v_0$ y el electrón se mueve en la dirección $+x$ con su rapidez original. Como $h/\lambda = mv = mv_0$, el fotón también "rebota" y conserva su longitud de onda.

42.11 [I] Un fotón ($\lambda = 0.400$ nm) choca con un electrón en reposo y rebota con un ángulo de 150° en la dirección que tenía antes del choque. Determine la rapidez y longitud de onda del fotón después de la colisión.

La rapidez del fotón siempre es igual a la rapidez de la luz en el vacío, c. Para obtener la longitud de onda después de la colisión, se utiliza la ecuación del efecto Compton:

$$\lambda_s = \lambda_i + \frac{h}{m_e\text{c}}(1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_s = 4.00 \times 10^{-10}\ \text{m} + \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})}(1 - \cos 150^\circ)$$

$$\lambda_s = 4.00 \times 10^{-10}\ \text{m} + (2.43 \times 10^{-12}\ \text{m})(1 + 0.866) = 0.405\ \text{nm}$$

42.12 [I] ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie para una partícula que se mueve con una rapidez de 2.0×10^6 m/s si la partícula es *a*) un electrón, *b*) un protón y *c*) una pelota de 0.20 kg?

Si se emplea la definición de la longitud de onda de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{m(2.0 \times 10^6\ \text{m/s})} = \frac{3.31 \times 10^{-40}\ \text{m}\cdot\text{kg}}{m}$$

Al sustituir los valores requeridos de m, se encuentra que la longitud de onda es 3.6×10^{-10} m para el electrón, 2.0×10^{-13} m para el protón y 1.7×10^{-39} m para la pelota de 0.20 kg.

42.13 [II] Un electrón cae desde el reposo a través de una diferencia de potencial de 100 V. ¿Cuál es su longitud de onda de De Broglie?

Su rapidez todavía estará muy por abajo de c, por lo que se pueden ignorar los efectos relativistas. La EC ganada, $\tfrac{1}{2}mv^2$, iguala la EP eléctrica perdida, Vq. Entonces,

$$v = \sqrt{\frac{2Vq}{m}} = \sqrt{\frac{2(100\ \text{V})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 5.927 \times 10^6\ \text{m/s}$$

y

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(5.927 \times 10^6\ \text{m/s})} = 0.123\ \text{nm}$$

42.14 [II] ¿Qué diferencia de potencial se requiere en un microscopio electrónico para dar a un electrón una longitud de onda de 0.500 Å?

$$\text{EC del electrón} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{h}{m\lambda}\right)^2 = \frac{h^2}{2m\lambda^2}$$

donde se utilizó la relación de De Broglie, $\lambda = h/mv$. Al sustituir los valores conocidos se obtiene EC como 9.66×10^{-17} J. Pero EC $= Vq$, y por eso

$$V = \frac{\text{EC}}{q} = \frac{9.66 \times 10^{-17}\ \text{J}}{1.60 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 600\ \text{V}$$

42.15 [II] Por definición, un neutrón térmico es un neutrón libre en un gas de neutrones a aproximadamente 20 °C (293 K). ¿Cuáles son la EC y la longitud de onda de uno de tales neutrones?

Del capítulo 17, la energía térmica de una molécula de gas es $3kT/2$, donde k es la constante de Boltzmann (1.38×10^{-23} J/K). Entonces

$$\text{EC} = \tfrac{3}{2}kT = 6.07 \times 10^{-21}\ \text{J}$$

Ésta es una situación no relativista, por lo que se puede escribir

$$\text{EC} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} \qquad \text{o} \qquad p^2 = (2m)(\text{EC})$$

Entonces $$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{(2m)(\text{EC})}} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{(2)(1.67 \times 10^{-27}\ \text{kg})(6.07 \times 10^{-21}\ \text{J})}} = 0.147\ \text{nm}$$

42.16 [III] Encuentre la presión que ejerce sobre una superficie el haz de fotones del problema 42.7 si el área de la sección transversal del haz es de 3.0 mm^2. Suponga que la reflexión a la incidencia normal es perfecta.

Cada fotón tiene una cantidad de movimiento

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{633 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 1.05 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Cuando un fotón se refleja, su cantidad de movimiento cambia de $+p$ a $-p$, un cambio total de $2p$. Como (del problema 42.7) 9.5×10^{15} fotones chocan con la superficie cada segundo, se obtiene

$$\text{Cambio en la cantidad de movimiento/s} = (9.5 \times 10^{15}/\text{s})(2)(1.05 \times 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}) = 2.0 \times 10^{-11}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

De la ecuación del impulso (capítulo 8),

$$\text{Impulso} = Ft = \text{cambio en la cantidad de movimiento}$$

se tiene $$F = \text{cambio en la cantidad de movimiento/s} = 1.99 \times 10^{-11}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2$$

Entonces $$\text{Presión} = \frac{F}{A} = \frac{1.99 \times 10^{-11}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}^2}{3.0 \times 10^{-6}\ \text{m}^2} = 6.6 \times 10^{-6}\ \text{N/m}^2$$

42.17 [III] Una partícula de masa m está confinada a un tubo angosto de longitud L. Encuentre *a*) las longitudes de onda de las ondas de De Broglie que resonarán en el tubo, *b*) las correspondientes cantidades de movimiento de las partículas y *c*) las energías correspondientes. *d*) Calcule las energías para un electrón en un tubo con una longitud $L = 0.50$ nm.

a) Las ondas de De Broglie resonarán con un nodo en cada extremo del tubo, ya que los extremos son impenetrables. Algunos de los posibles modos de resonancia se muestran en la figura 42-1. Ellos permiten visualizar que, para la resonancia, $L = \frac{1}{2}\lambda_1,\ 2(\frac{1}{2}\lambda_2),\ 3(\frac{1}{2}\lambda_3),\ \ldots,\ n(\frac{1}{2}\lambda_n), \ldots$ o

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

b) Como las longitudes de onda de De Broglie son $\lambda_n = h/p_n$, las cantidades de movimiento en la resonancia son

$$p_n = \frac{nh}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

c) Como se mostró en el problema 42.15, $p^2 = (2m)(\text{EC})$, y en consecuencia

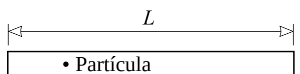
$$(\text{EC})_n = \frac{n^2h^2}{8L^2m} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

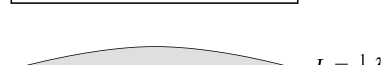
Note que las partículas sólo pueden asumir ciertas energías discretas. Las energías están cuantizadas.



d) Con $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg y $L = 5.0 \times 10^{-10}$ m se obtiene

$$(\text{EC})_n = 2.4 \times 10^{-19}\, n^2 \text{ J} = 1.5n^2 \text{ eV}$$





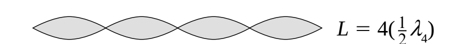


Figura 42-1

42.18 [III] Una partícula de masa *m* está confinada a moverse en una órbita circular de radio *R*. Para resonancia de su onda de De Broglie en esta órbita, ¿qué energías puede tener la partícula? Determine la EC para un electrón con $R = 0.50$ nm.

Para que una onda entre en resonancia cuando se encuentra en una órbita circular, las crestas deben coincidir con las crestas y los valles con los valles. Un ejemplo de resonancia (para una circunferencia que tiene cuatro longitudes de onda de largo) se muestra en la figura 42-2. En general, la resonancia ocurre cuando la circunferencia tiene *n* longitudes de onda de largo, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$ Para una de tales ondas de De Broglie se tiene

$$n\lambda_n = 2\pi R \qquad \text{y} \qquad p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2\pi R}$$

Igual que en el problema 42.17,

$$(\text{EC})_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2h^2}{8\pi^2R^2m}$$

Obviamente, las energías están cuantizadas. Al sustituir valores se obtiene

$$(\text{EC})_n = 2.4 \times 10^{-20}\, n^2 \text{ J} = 0.15n^2 \text{ eV}$$

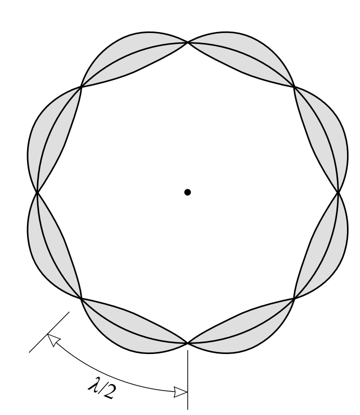


Figura 42-2

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

42.19 [I] Calcule la energía de un fotón de luz azul ($\lambda = 450$ nm), en joules y en eV. **Resp.** 4.41×10^{-19} J $= 2.76$ eV.

42.20 [I] ¿Cuál es la longitud de onda de una luz en la que los fotones tienen una energía de 600 eV? **Resp.** 2.07 nm.

42.21 [I] Una lámpara de sodio irradia 20 W de luz amarilla ($\lambda = 589$ nm). ¿Cuántos fotones de luz amarilla emite la lámpara en cada segundo? **Resp.** 5.9×10^{19}.

42.22 [I] ¿Cuál es la función de trabajo de una superficie de metal de sodio si la longitud de onda umbral fotoeléctrica es de 680 nm? **Resp.** 1.82 eV.

42.23 [II] Determine la máxima EC de los fotoelectrones que se desprenden de una superficie de potasio debido a radiación ultravioleta de 200 nm de longitud de onda. ¿Cuál es la diferencia de potencial de retardo que se requiere para detener la emisión de electrones? La longitud de onda umbral fotoeléctrica del potasio es de 440 nm. **Resp.** 3.38 eV, 3.38 V.

42.24 [II] ¿Con qué velocidad se emitirán los fotoelectrones más rápidos de una superficie cuya longitud de onda umbral es de 600 nm, cuando la superficie se ilumina con una luz de 4×10^{-7} m de longitud de onda? **Resp.** 6×10^5 m/s.

42.25 [II] Una radiación ultravioleta de 150 nm de longitud de onda desprende electrones de una superficie metálica con una EC máxima de 3.00 eV. Determine la función de trabajo del metal, la longitud de onda umbral del metal y la diferencia de potencial retardador que se requiere para frenar la emisión de electrones. **Resp.** 5.27 eV, 235 nm, 3.00 V.

42.26 [I] ¿Cuáles son la rapidez y la cantidad de movimiento de un fotón de 500 nm? **Resp.** 2.998×10^8 m/s, 1.33×10^{-27} kg · m/s.

42.27 [II] Un haz de rayos X, con una longitud de onda exacta de 5.00×10^{-14} m, choca con un protón que está en reposo ($m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg). Si los rayos X se dispersan con un ángulo de 110°, ¿cuál es la longitud de onda de los rayos X dispersados? **Resp.** 5.18×10^{-14} m.

42.28 [III] Un fotón produce un electrón y un positrón, cada uno con una energía cinética de 220 keV, aun cuando están separados por una gran distancia. Encuentre la energía y la longitud de onda del fotón. **Resp.** 1.46 MeV, 8.49×10^{-13} m.

42.29 [II] Demuestre que la longitud de onda de De Broglie de un electrón acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de V volts es $1.228/\sqrt{V}$ nm. Desprecie los efectos relativistas y eche un vistazo al problema 42.13.

42.30 [II] Calcule la longitud de onda de De Broglie de un electrón que se aceleró por una diferencia de potencial de 9.0 kV. Desprecie los efectos relativistas. **Resp.** 1.3×10^{-11} m.

42.31 [III] ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de un electrón que se aceleró a través de una diferencia de potencial de 1.0 MV? (Con esta gran energía debe utilizar las expresiones de la masa y la energía relativistas.) **Resp.** 8.7×10^{-13} m.

42.32 [I] Se desea enviar un haz de electrones a través de una rejilla de difracción. Los electrones tienen una rapidez de 400 m/s. ¿Qué tan grande debe ser la distancia entre las ranuras si un intenso haz de electrones debe salir a un ángulo de 25° con respecto al haz que sale recto? **Resp.** $n(4.3 \times 10^{-6}$ m), donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO 43

EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO tiene un diámetro de aproximadamente 0.1 nm; consiste en un protón como núcleo (con un radio aproximado de 10^{-15} m) y un solo electrón.

ÓRBITAS ELECTRÓNICAS: El primer modelo efectivo del átomo fue presentado por Niels Bohr en 1913. Aun cuando ha sido sobrepasado por la mecánica cuántica, muchos de sus resultados sencillos todavía son válidos. En la versión más antigua del ***modelo de Bohr*** los electrones se representaban en órbitas circulares alrededor del núcleo. Entonces, el átomo de hidrógeno era un electrón circulando alrededor de un solo protón. Para que la onda de De Broglie del electrón resuene o se "ajuste" (vea la figura 42-2) en una órbita de radio r, debe cumplirse lo siguiente (vea el problema 42.18):

$$mv_n r_n = \frac{nh}{2\pi}$$

donde n es un entero. La cantidad $mv_n r_n$ es el momento angular del electrón en su n-ésima órbita. La rapidez del electrón es v, su masa es m y h es la constante de Planck, 6.63×10^{-34} J · s.

La fuerza centrípeta que mantiene en órbita al electrón es producida por la atracción de Coulomb entre el núcleo y el electrón. Por tanto, $F = ke^2/r^2 = ma = mv_n^2/r_n$ y

$$\frac{mv_n^2}{r_n} = k\frac{e^2}{r^2}$$

La solución simultánea de estas ecuaciones da los radios de las órbitas estables como $r_n = (0.053 \text{ nm})n^2$. La energía del átomo cuando está en su n-ésimo estado (es decir, con su electrón en la n-ésima órbita de configuración) es

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

Como en los problemas 42.17 y 42.18, la energía está cuantizada porque una configuración estable corresponde a una forma de resonancia del sistema ligado. Para núcleos con carga Ze orbitados por un solo electrón, las relaciones correspondientes son

$$r_n = (0.053 \text{ nm})\left(\frac{n^2}{Z}\right) \qquad \text{y} \qquad E_n = -\frac{13.6Z^2}{n^2} \text{ eV}$$

donde Z se llama el **número atómico** del núcleo.

LOS DIAGRAMAS DE LOS NIVELES DE ENERGÍA resumen las energías permitidas de un sistema. Sobre una escala de energía vertical, las energías permitidas se muestran mediante líneas horizontales. El diagrama de niveles de energía para el hidrógeno se muestra en la figura 43-1. Cada línea horizontal representa la energía de un estado resonante del átomo. El cero de energía se toma para cuando el átomo está ionizado, es decir, el estado en el cual el átomo tiene un radio orbital infinito. A medida que el electrón cae más cerca del núcleo, su energía potencial disminuye desde el nivel cero, y por tanto la energía del átomo es negativa, como se indicó. El estado más bajo posible, $n = 1$, corresponde al electrón en su órbita más pequeña posible; se llama **estado base**.

EMISIÓN DE LUZ: Cuando un átomo aislado cae desde un nivel energético a otro menor se emite un fotón. Este fotón conduce la energía perdida por el átomo en su transición al estado más bajo de energía. La longitud de onda y la frecuencia del fotón están dadas por

$$hf = \frac{hc}{\lambda} = \text{energía perdida por el sistema}$$

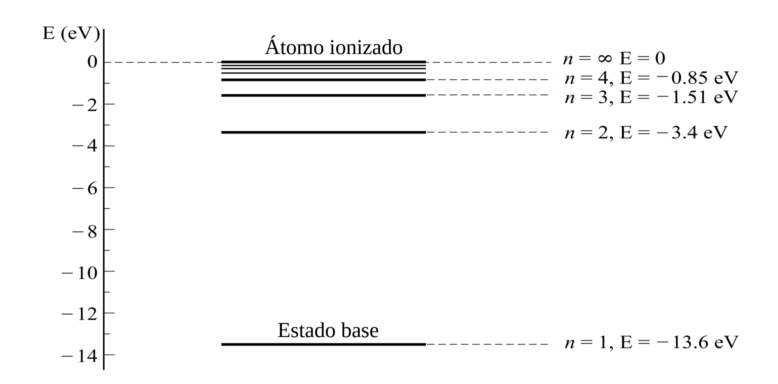


Figura 43-1

La radiación emitida tiene una longitud de onda precisa y da lugar a una sola *línea espectral* en el espectro de emisión del átomo. Es conveniente recordar que un fotón de 1 240 nm tiene una energía de 1 eV, y que la energía del fotón varía *inversamente* con la longitud de onda.

LAS LÍNEAS ESPECTRALES emitidas por los átomos de hidrógeno aislados excitados se producen en series. La ***serie de Balmer*** que se muestra en la figura 43-2 es una serie típica que aparece en las longitudes de onda visibles. Existen otras series; una, en el ultravioleta, se llama ***serie de Lyman***; hay otras en el infrarrojo, siendo la más cercana a la porción visible del espectro la ***serie de Paschen***. Sus longitudes de onda están dadas por fórmulas simples:

$$\text{Lyman:} \qquad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 2, 3, \ldots$$

$$\text{Balmer:} \qquad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 3, 4, \ldots$$

$$\text{Paschen:} \qquad \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 4, 5, \ldots$$

donde $R = 1.0974 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$ es la llamada **constante de Rydberg**.

ORIGEN DE LAS SERIES ESPECTRALES: Las líneas de serie de Balmer de la figura 43-2 se presentan cuando un electrón en el átomo cae desde estados altos hasta el estado $n = 2$. La transición desde $n = 3$ a $n = 2$ produce una energía de fotón $\Delta E_{3,2} = 1.89$ eV, que equivale a una longitud de onda de 656 nm, la primera línea de la serie. La segunda línea se origina en la transición de $n = 4$ a $n = 2$. La línea límite de serie representa la transición de $n = \infty$ a $n = 2$. Similarmente, las transiciones que terminan en el estado $n = 1$ dan lugar a la serie de Lyman; las transiciones que terminan en el estado $n = 3$ dan las líneas de la serie de Paschen.

ABSORCIÓN DE LUZ: Un átomo en su estado base puede absorber un fotón en un proceso llamado *absorción de resonancia* sólo si dicho fotón puede elevar al átomo a uno de sus niveles de energía permitidos.

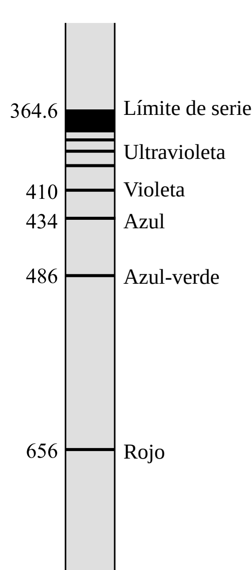


Figura 43-2

PROBLEMAS RESUELTOS

43.1 [II] ¿Qué longitud de onda emite un átomo de hidrógeno cuando su electrón excitado cae del estado $n = 5$ al estado $n = 2$? Dé su respuesta a tres cifras significativas.

Ya que $E_n = -13.6/n^2$ eV, se tiene que

$$E_5 = -0.54 \text{ eV} \quad \text{y} \quad E_2 = -3.40 \text{ eV}$$

La diferencia de energía entre estos estados es $3.40 - 0.54 = 2.86$ eV. Ya que 1240 nm corresponden a 1.00 eV en una proporción inversa, se tiene, para la longitud de onda del fotón emitido,

$$\lambda = \left(\frac{1.00 \text{ eV}}{2.86 \text{ eV}}\right)(1\,240 \text{ nm}) = 434 \text{ nm}$$

43.2 [II] Cuando un átomo de hidrógeno es bombardeado, el átomo se puede elevar hasta un estado de energía más alto. Conforme el electrón excitado cae de vuelta a los niveles de energía más bajos, emite luz. ¿Cuáles son las tres líneas espectrales con mayor longitud de onda emitidas por el átomo de hidrógeno cuando regresa al estado $n = 1$ desde estados de energía más altos? Dé sus respuestas hasta tres cifras significativas.

Se tiene interés en las siguientes transiciones (vea la figura 43-1):

$$n = 2 \to n = 1: \qquad \Delta E_{2,1} = -3.4 - (-13.6) = 10.2 \text{ eV}$$

$$n = 3 \to n = 1: \qquad \Delta E_{3,1} = -1.5 - (-13.6) = 12.l \text{ eV}$$

$$n = 4 \to n = 1: \qquad \Delta E_{4,1} = -0.85 - (-13.6) = 12.8 \text{ eV}$$

Para calcular las longitudes de onda correspondientes se puede proceder como en el problema 43.l, o utilizar $\Delta E = hf = hc/\lambda$. Por ejemplo, para la transición de $n = 2$ a $n = 1$,

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E_{2,1}} = \frac{(6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})}{(10.2 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV})} = 1.22 \text{ nm}$$

Las otras líneas se calculan en la misma forma y son 102 nm y 96.9 nm. Éstas son las tres primeras líneas de la serie de Lyman.

43.3 [I] La longitud de onda ***límite de serie*** de la serie de Balmer se emite cuando el electrón en el átomo de hidrógeno cae desde el estado $n = \infty$ al estado $n = 2$. ¿Cuál es la longitud de onda de esta línea (a tres cifras significativas)?

De la figura 43-l, $\Delta E = 3.40 - 0 = 3.40$ eV. La longitud de onda correspondiente se encuentra en la forma usual a partir de $\Delta E = hc/\lambda$. El resultado es 365 nm.

43.4 [I] ¿Cuál es la mayor longitud de onda de radiación que puede ionizar un átomo de hidrógeno no excitado?

Los fotones incidentes deben tener suficiente energía para elevar al átomo del nivel $n = 1$ al nivel $n = \infty$ cuando son absorbidos por el átomo. Dado que $E_\infty - E_1 = 13.6$ eV, se puede usar $E_\infty - E_1 = hc/\lambda$ para calcular la longitud de onda como 91.2 nm. Longitudes de onda más cortas no sólo removerían al electrón del átomo, sino que agregarían EC al electrón removido.

43.5 [I] Los niveles de energía de los átomos de helio simplemente ionizados (átomos a los cuales se les ha quitado uno de sus dos electrones) están dados por $E_n = (-54.4/n^2)$ eV. Construya el diagrama de niveles de energía para este sistema.

Vea la figura 43-3.

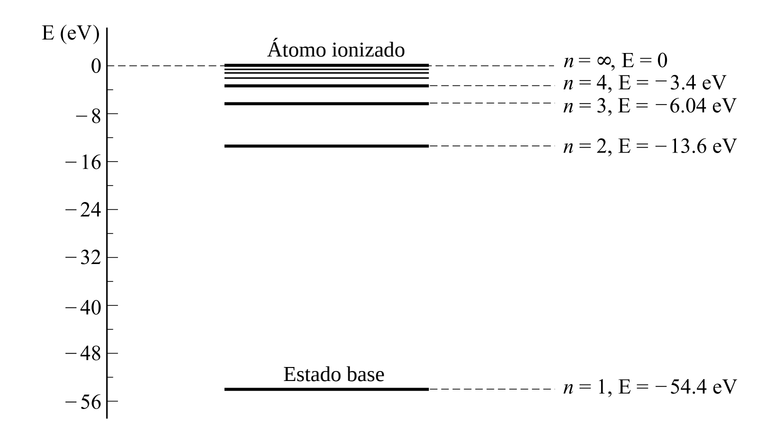


Figura 43-3

43.6 [I] ¿Cuáles son las dos longitudes de onda más largas de la serie de Balmer para átomos de helio ionizados simplemente?

El diagrama de niveles de energía pertinente se muestra en la figura 43-3. Recuerde que la serie de Balmer corresponde a transiciones desde estados altos al estado $n = 2$. Del diagrama, las dos transiciones de menor energía hacia los estados $n = 2$ son

$$n = 3 \rightarrow n = 2 \qquad \Delta E_{3,2} = 13.6 - 6.04 = 7.6 \text{ eV}$$
$$n = 4 \rightarrow n = 2 \qquad \Delta E_{4,2} = 13.6 - 3.4 = 10.2 \text{ eV}$$

Al usar el hecho de que 1 eV corresponde a 1 240 nm, se calculan las longitudes de onda correspondientes, que son 163 nm y 122 nm; ambas longitudes de onda están en la región ultravioleta lejana o la de los rayos X largos.

43.7 [II] Átomos de hidrógeno no excitados se bombardean con electrones que se aceleran a través de 12.0 V. ¿Cuáles longitudes de onda emitirán los átomos?

Cuando a un átomo en su estado base se le dan 12.0 eV de energía, la mayoría de los electrones de éstos no pueden ser excitados más allá de los 12.0 eV arriba de su estado base. Sólo existe un estado en esta región de energía, el estado $n = 2$. Por tanto, la única transición posible es

$$n = 2 \rightarrow n = 1: \qquad \Delta E_{2,1} = 13.6 - 3.4 = 10.2 \text{ eV}$$

La única longitud de onda emitida será

$$\lambda = (1\ 240 \text{ nm})\left(\frac{1.00 \text{ eV}}{10.2 \text{ eV}}\right) = 122 \text{ nm}$$

que es la línea con longitud de onda más larga en la serie de Lyman.

43.8 [II] El hidrógeno gaseoso no excitado es un aislante eléctrico porque no contiene electrones libres. ¿Cuál es la longitud de onda máxima que un haz de fotones incidente sobre el gas puede hacer que el gas conduzca electricidad?

Los fotones del haz deben ionizar al átomo para que produzca electrones libres. (Esto se llama *efecto fotoeléctrico atómico*.) Para lograrlo, la energía del fotón debe ser al menos de 13.6 eV, y la máxima longitud de onda es

$$\lambda = (1\ 240 \text{ nm})\left(\frac{1.00 \text{ eV}}{13.6 \text{ eV}}\right) = 91.2 \text{ nm}$$

que es el límite de serie para la serie de Lyman.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

43.9 [I] Una línea espectral en el espectro del hidrógeno tiene una longitud de onda de 821 nm. ¿Cuál es la diferencia de energías entre los dos estados que dan origen a esta línea? **Resp.** 1.51 eV.

43.10 [II] ¿Cuáles son las energías de las dos líneas con longitud de onda más larga en la serie de Paschen para el hidrógeno? ¿Cuáles son sus longitudes de onda correspondientes? Dé sus respuestas a dos cifras significativas. **Resp.** 0.66 eV y 0.97 eV, 1.9×10^{-6} m y 1.3×10^{-6} m.

43.11 [I] ¿Cuál es la longitud de onda de la línea límite de serie para la serie de Paschen del hidrógeno? Consulte el problema 43.3 para una explicación del "límite de serie". **Resp.** 821 nm.

43.12 [II] El átomo de litio tiene una carga nuclear de $+3e$. Encuentre la energía requerida para remover el tercer electrón de un átomo de litio que ya perdió dos de sus electrones. Suponga que el tercer electrón inicialmente está en el estado base. **Resp.** 122 eV.

43.13 [II] Los electrones en un haz de electrones se aceleran a través de una diferencia de potencial V e inciden sobre átomos de hidrógeno en su estado base. ¿Cuál es el máximo valor de V si las colisiones deben ser perfectamente elásticas? **Resp.** < 10.2 V.

43.14 [II] ¿Cuáles son las tres longitudes de onda de fotón más largas que un átomo de helio simplemente ionizado (en su estado base) absorberá más fuertemente? (Vea la figura 43-3.) **Resp.** 30.4 nm, 25.7 nm, 24.4 nm.

43.15 [II] ¿Cuánta energía se necesita para remover el segundo electrón de un átomo de helio simplemente ionizado? ¿Cuál es la longitud de onda máxima de un fotón incidente que podría quitar este electrón del ion? **Resp.** 54.4 eV, 22.8 nm.

43.16 [II] En el espectro de un átomo de helio simplemente ionizado, ¿cuál es el límite de serie para su serie de Balmer? **Resp.** 91 nm.

ÁTOMOS MULTIELECTRONES 44

EN UN ÁTOMO NEUTRO cuyo núcleo tiene una carga *Ze* hay *Z* electrones. Cuando los electrones tienen la menor energía posible, el átomo está en su *estado base*. El estado de un átomo está especificado por los *números cuánticos* de sus electrones individuales.

LOS NÚMEROS CUÁNTICOS que se usan para especificar los parámetros de un electrón atómico son los siguientes:

- El **número cuántico principal *n*** especifica la órbita, o capa, donde se puede localizar el electrón. En el átomo de hidrógeno, especifica la energía del electrón por medio de $E_n = -13.6/n^2$ eV.
- El **número cuántico orbital** ℓ especifica el momento angular *L* del electrón en su órbita:

$$L = \left(\frac{h}{2\pi}\right)\sqrt{\ell(\ell+1)}$$

  donde *h* es la constante de Planck, y $\ell = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.
- El **número cuántico magnético** m_ℓ describe la orientación del vector momento angular orbital en relación con la dirección *z*, la dirección de un campo magnético aplicado:

$$L_z = \left(\frac{h}{2\pi}\right)(m_\ell)$$

  donde $m_\ell = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\ell$.
- El **número cuántico de espín** m_s tiene valores permitidos de $\pm\frac{1}{2}$.

EL PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN DE PAULI dice que dos electrones en el mismo átomo no pueden tener el mismo conjunto de números cuánticos. En otras palabras, dos electrones no pueden estar en el mismo estado.

PROBLEMAS RESUELTOS

44.1 [II] Calcule la energía que se requiere para remover un electrón con $n = 1$ (esto es, la capa más interior) de un átomo de oro ($Z = 79$).

Como un electrón en la capa más interior del átomo no está muy afectado por los electrones distantes de las capas exteriores, se puede considerar como si fuera el único electrón presente. Entonces su energía se da de manera aproximada mediante una versión modificada apropiadamente de la fórmula de energía del capítulo 43 que toma en cuenta la carga (*Ze*) del núcleo. Con $n = 1$, dicha fórmula, $E_n = -13.6Z^2/n^2$, da

$$E_1 = -13.6(79)^2 = -84\,900 \text{ eV} = -84.9 \text{ keV}$$

Para sacar al electrón (esto es, llevarlo al nivel $E_\infty = 0$) se debe proporcionar una energía de aproximadamente 84.9 keV.

44.2 [II] ¿Cuáles son los números cuánticos de los electrones en un átomo de litio ($Z = 3$) cuando el átomo está en su estado base?

Al recordar que $\ell = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ y $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$ mientras que $m_s = \pm \frac{1}{2}$, el principio de exclusión de Pauli dice que los tres electrones del átomo de litio pueden tener los siguientes números cuánticos:

Electrón 1: $n = 1, \quad \ell = 0, \quad m_\ell = 0, \quad m_s = +\frac{1}{2}$

Electrón 2: $n = 1, \quad \ell = 0, \quad m_\ell = 0, \quad m_s = -\frac{1}{2}$

Electrón 3: $n = 2, \quad \ell = 0, \quad m_\ell = 0, \quad m_s = +\frac{1}{2}$

Note que, cuando $n = 1$, ℓ debe ser cero y m_ℓ debe ser cero (¿por qué?). Entonces sólo hay dos posibilidades para $n = 1$, y el tercer electrón tiene que estar en el nivel $n = 2$. Como éste se encuentra en la segunda órbita de Bohr, es más fácil sacarlo del átomo que a un electrón $n = 1$. Es por esto que el litio se ioniza fácilmente en Li^+.

44.3 [II] ¿Por qué el sodio ($Z = 11$) es el siguiente átomo univalente después del litio?

El sodio tiene un solo electrón en la capa $n = 3$. Para ver por qué esto necesariamente es así, note que el principio de exclusión de Pauli únicamente permite dos electrones en la capa $n = 1$. Los siguientes ocho electrones se pueden acomodar en la capa $n = 2$, como se muestra a continuación:

$$n = 2, \quad \ell = 0, \quad m_\ell = 0, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$
$$n = 2, \quad \ell = 1, \quad m_\ell = 0, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$
$$n = 2, \quad \ell = 1, \quad m_\ell = 1, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$
$$n = 2, \quad \ell = 1, \quad m_\ell = -1, \quad m_s = \pm\tfrac{1}{2}$$

El decimoprimer electrón debe entrar en la capa $n = 3$, de donde es fácil removerlo para obtener Na^+.

44.4 [II] *a*) Calcule la longitud de onda del fotón emitido conforme un electrón cae de la capa $n = 2$ a la capa $n = 1$ en el átomo de oro ($Z = 79$). *b*) ¿Aproximadamente cuánta energía deben bombardear los electrones para excitar al oro y emita esta línea de emisión?

a) Como se notó en el problema 44.1, en una primera aproximación las energías de los electrones más interiores de un átomo con Z grande están dadas por $E_n = -13.6Z^2/n^2$ eV. Entonces, se tiene

$$\Delta E_{2,1} = 13.6(79)^2\left(\tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{4}\right) = 63\,700 \text{ eV}$$

Ésta corresponde a un fotón con

$$\lambda = (1\,240 \text{ nm})\left(\frac{1 \text{ eV}}{63\,700 \text{ eV}}\right) = 0.019\,5 \text{ nm}$$

Es claro a partir de este resultado que las transiciones en las capas interiores en los átomos con Z grande dan origen a la emisión de rayos X.

b) Antes de que un electrón en $n = 2$ pueda caer a la capa $n = 1$, un electrón en $n = 1$ debe pasar a un estado vacío con n grande, que se aproxima como $n = \infty$ (con $E_\infty = 0$). Esto requiere una energía

$$\Delta E_{1,\infty} = 0 - \frac{-13.6Z^2}{n^2} = \frac{13.6(79)^2}{1} = 84.9 \text{ keV}$$

En consecuencia, los electrones que bombardean deben tener una energía de aproximadamente 84.9 keV.

44.5 [II] Suponga que los electrones no tienen espín, de modo que no existe el número cuántico de espín. Si el principio de exclusión de Pauli todavía se aplicara a los restantes números cuánticos, ¿cuáles serían los tres primeros átomos univalentes?

Los electrones tomarían los siguientes números cuánticos:

Electrón 1: $n = 1$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$ (univalente)

Electrón 2: $n = 2$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$ (univalente)

Electrón 3: $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = 0$

Electrón 4: $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = +1$

Electrón 5: $n = 2$, $\ell = 1$, $m_\ell = -1$

Electrón 6: $n = 3$, $\ell = 0$, $m_\ell = 0$ (univalente)

Cada electrón marcado como "univalente" es el primer electrón de una nueva capa. Como es fácil remover un electrón cuando se encuentra en la capa más exterior de un átomo, los átomos con ese número de electrones son univalentes. Éstos son los átomos con $Z = 1$ (hidrógeno), $Z = 2$ (helio) y $Z = 6$ (carbono). ¿Podría demostrar que $Z = 15$ (fósforo) también sería univalente?

44.6 [II] Se dice que los electrones en un átomo que tienen el mismo valor de ℓ pero diferente valor de m_ℓ y m_s están en la misma *subcapa*. ¿Cuántos electrones existen en la subcapa $\ell = 3$?

Como m_ℓ está restringido a los valores 0, ±1, ±2, ±3 y $m_s = \pm\frac{1}{2}$ solamente, las posibilidades para $\ell = 3$ son

$$(m_\ell,\ m_s) = (0,\ \pm\tfrac{1}{2}),\ (1,\ \pm\tfrac{1}{2}),\ (-1,\ \pm\tfrac{1}{2}),\ (2,\ \pm\tfrac{1}{2}),\ (-2,\ \pm\tfrac{1}{2}),\ (3,\ \pm\tfrac{1}{2}),\ (-3,\ \pm\tfrac{1}{2})$$

que da 14 posibilidades. Por tanto, pueden existir 14 electrones en esta subcapa.

44.7 [II] Un haz de electrones en un tubo de rayos X se acelera a través de 40 kV e incide sobre un blanco de tungsteno. ¿Cuál es la longitud de onda más corta emitida por el tubo?

Cuando un electrón en el haz es frenado por el blanco, los fotones emitidos tienen un límite superior para su energía, a saber, la energía del electrón incidente. En este caso, dicha energía es de 40 keV. El fotón correspondiente tiene una longitud de onda dada por

$$\lambda = (1\,240\text{ nm})\left(\frac{1.0\text{ eV}}{40\,000\text{ eV}}\right) = 0.031\text{ nm}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

44.8 [II] Si no existiera el número cuántico m_ℓ, ¿cuáles serían los primeros cuatro átomos univalentes?
Resp. H, Li, N, Al.

44.9 [II] El helio tiene una capa exterior cerrada (completamente llena) y no es reactivo, ya que el átomo no pierde fácilmente un electrón. Demuestre por qué el neón ($Z = 10$) es el siguiente elemento no reactivo.

44.10 [II] Se desea desprender un electrón de la capa $n = 1$ de un átomo de uranio ($Z = 92$) por medio del efecto fotoeléctrico atómico. ¿Aproximadamente cuál es la longitud de onda más grande del fotón capaz de hacer esto?
Resp. 0.0108 nm.

44.11 [II] Demuestre que el número máximo de electrones que pueden existir en la ℓ-ésima subcapa es $2(2\ell + 1)$.

NÚCLEOS Y RADIACTIVIDAD 45

EL NÚCLEO de un átomo es una entidad cargada positivamente en el centro del átomo. Su radio es de alrededor de 10^{-15} m, que es aproximadamente 10^{-5} tan grande como el radio del átomo. El hidrógeno es el más ligero y el más sencillo de todos los átomos. Su núcleo es un solo protón. Todos los demás núcleos contienen tanto protones como neutrones. De manera colectiva, a los protones y los neutrones se les llama ***nucleones***. Aunque las cargas positivas de los protones hacen que se repelan unos a otros, una fuerza más intensa de corto alcance, la *fuerza nuclear* (que es una manifestación de la más fundamental *fuerza fuerte*) logra que se mantengan juntos en el núcleo. La fuerza atractiva nuclear entre nucleones decrece rápidamente con la separación de partículas y es esencialmente cero para nucleones separados más de 5×10^{-15} m.

CARGA NUCLEAR Y NÚMERO ATÓMICO: Cada protón en el núcleo porta una carga $+e$, mientras que los neutrones no tienen carga electromagnética. Si existen Z protones en el núcleo, entonces la carga en éste es $+Ze$. A Z se le llama el **número atómico** de dicho núcleo.

Como los átomos de modo usual son eléctricamente neutros, un átomo tiene Z electrones fuera del núcleo. Estos Z electrones determinan el comportamiento químico del átomo. Como resultado, todo átomo del mismo elemento químico tiene el mismo valor Z. Por ejemplo, todos los átomos de hidrógeno tienen $Z = 1$, mientras que todos los átomos de carbono tienen $Z = 6$.

UNIDAD DE MASA ATÓMICA (u)**:** Una unidad de masa conveniente que se utiliza en cálculos nucleares es la **unidad de masa atómica** (u). Por definición, 1 u es exactamente 1/12 de la masa de un átomo de carbono en la forma común en que se encuentra en la Tierra. Por tanto, es evidente que

$$1 \text{ u} = 1.660\,5 \times 10^{-27} \text{ kg} = 931.494 \text{ MeV/c}^2$$

La tabla 45-1 muestra las masas de algunas de las partículas y núcleos más comunes, así como sus cargas,

Tabla 45-1

Partícula	Símbolo	Masa, u	Carga
Protón	$p,\ {}^{1}_{1}\text{H}$	1.007 276	$+e$
Neutrón	$n,\ {}^{1}_{0}n$	1.008 665	0
Electrón	$e^-,\ \beta^-,\ {}^{0}_{-1}e$	0.000 548 6	$-e$
Positrón	$e^+,\ \beta^+,\ {}^{0}_{+1}e$	0.000 548 6	$+e$
Deuterón	$d,\ {}^{2}_{1}\text{H}$	2.013 55	$+e$
Partícula alfa	$\alpha,\ {}^{4}_{2}\text{He}$	4.001 5	$+2e$

EL NÚMERO DE MASA (A) de un átomo es igual al número de nucleones (neutrones más protones) en el núcleo del átomo. Ya que cada nucleón tiene masa cercana a 1 u, el número de masa A es prácticamente igual a la masa nuclear en unidades de masa atómica. Además, debido a que los electrones tienen una masa muy pequeña, A es aproximadamente igual a la masa del átomo en unidades de masa atómica.

ISÓTOPOS: El número de neutrones en el núcleo tiene un pequeño efecto en el comportamiento químico de los átomos, excepto de los más pequeños. En la naturaleza, con frecuencia existen átomos del mismo elemento (mismo Z) que tienen distintos números de neutrones en sus núcleos. A esos átomos se les llama **isótopos**. Por ejemplo, el oxígeno ordinario consiste en tres isótopos que tienen números de masa 16, 17 y 18. Cada uno de los isótopos tiene

$Z = 8$, u ocho protones en su núcleo. En consecuencia, estos isótopos tienen los siguientes números de neutrones en sus núcleos: $16 - 8 = 8$, $17 - 8 = 9$ y $18 - 8 = 10$. Se acostumbra representar a los isótopos de la siguiente forma: ${}^{16}_{8}\text{O}$, ${}^{17}_{8}\text{O}$, ${}^{18}_{8}\text{O}$, o simplemente como ${}^{16}\text{O}$, ${}^{17}\text{O}$ y ${}^{18}\text{O}$, donde se sobreentiende que el oxígeno siempre tiene $Z = 8$.

En esta notación, se designa a los núcleos con un número de masa atómica A y un número atómico Z, por el simbolismo

$${}^{A}_{Z}(\text{SÍMBOLO QUÍMICO})$$

ENERGÍAS DE ENLACE: La masa de un átomo no es igual a la suma de las masas de sus protones, neutrones y electrones componentes. Imagine una reacción en la que electrones, protones y neutrones libres se combinan para formar un átomo; en dicha reacción se podría encontrar que la masa del átomo es *ligeramente menor* que la combinación de las masas de las partes componentes, y también que se libera una gran cantidad de energía cuando ocurre la reacción. La pérdida en la masa es exactamente igual a la masa equivalente de la energía liberada, de acuerdo con la ecuación de Einstein $\Delta E_0 = (\Delta m)c^2$. Recíprocamente, esta misma cantidad de energía, ΔE_0, tendría que darse al átomo para separarlo completamente en sus partículas componentes. A ΔE_0 se le denomina la **energía de enlace** del átomo. Una pérdida de masa $\Delta m = 1$ u es equivalente a

$$(1.66 \times 10^{-27}\text{ kg})(2.99 \times 10^{8}\text{ m/s})^2 = 1.49 \times 10^{-10}\text{ J} = 931\text{ MeV}$$

de energía de enlace.

El porcentaje de masa "perdida" es diferente para cada isótopo de cualquier elemento. En la tabla 45-2 se proporcionan las masas atómicas de algunos de los isótopos más ligeros. Estas masas corresponden a los átomos neutros e incluyen los electrones de las órbitas.

Tabla 45-2

Átomo neutro	Masa atómica, u	Átomo neutro	Masa atómica, u
${}^{1}_{1}\text{H}$	1.00783	${}^{7}_{4}\text{Be}$	7.01693
${}^{2}_{1}\text{H}$	2.01410	${}^{9}_{4}\text{Be}$	9.01219
${}^{3}_{1}\text{H}$	3.01604	${}^{12}_{6}\text{C}$	12.00000
${}^{4}_{2}\text{He}$	4.00260	${}^{14}_{7}\text{N}$	14.00307
${}^{6}_{3}\text{Li}$	6.01513	${}^{16}_{8}\text{O}$	15.99491
${}^{7}_{3}\text{Li}$	7.01600		

RADIACTIVIDAD: Son inestables o **radiactivos** los núcleos que se encuentran en la naturaleza con Z más grande que el correspondiente al plomo, 82. Muchos de los elementos con Z más pequeño, producidos por el hombre, también son radiactivos. Los núcleos radiactivos emiten espontáneamente una o más partículas para transformarse en un núcleo diferente.

La estabilidad de un núcleo radiactivo contra su decaimiento espontáneo se mide mediante su **vida media** $t_{1/2}$. La vida media se define como el tiempo en el cual la mitad de cualquier muestra de núcleos decae (o se desintegra). La vida media es un número fijo para cualquier isótopo.

El decaimiento radiactivo es un proceso azaroso. Sin importar cuándo empiece uno a observar un material, sólo la mitad de éste permanecerá sin cambio después de un tiempo $t_{1/2}$; luego de un tiempo adicional de $t_{1/2}$, sólo $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ del material permanecerá sin cambio. Después de transcurridas n vidas-medias, sólo $(\frac{1}{2})^n$ permanecerá sin cambio.

Existe una relación simple entre el número N de átomos del material radiactivo presente y el número ΔN que se desintegrará en un corto tiempo Δt. Ésta es

$$\Delta N = \lambda N\, \Delta t$$

donde λ, la **constante de decaimiento**, se relaciona con la vida media $t_{1/2}$ a través de

$$\lambda t_{1/2} = 0.693$$

La constante de decaimiento tiene la unidad de s^{-1} y se concibe como la tasa de desintegración fraccionaria. La cantidad $\Delta N/\Delta t$, que es la tasa de desintegraciones, se llama la **actividad** de la muestra. Es igual a λN, y por tanto decrece de manera constante con el tiempo. La unidad para la actividad en el SI es el **bequerel** (Bq), donde 1 Bq = 1 decaimiento/s.

ECUACIONES NUCLEARES: En una ecuación balanceada, la suma de los subíndices (números atómicos) debe ser la misma en los dos lados de la ecuación. La suma de los superíndices (números de masa) también debe ser igual en los dos lados de la ecuación. En consecuencia, la ecuación para la radiactividad primaria del radio es:

$$^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Muchos procesos nucleares se pueden indicar mediante una notación condensada, en la cual la partícula de radiación que bombardea y la partícula producto se representan por símbolos encerrados en paréntesis, entre los símbolos del núcleo emisor inicial y el núcleo del producto final. Los símbolos n, p, d, α, e^- y γ se utilizan para representar al neutrón, protón, deuterón $({}^{2}_{1}\text{H})$, partícula, alfa, electrón y rayo gamma (fotones), respectivamente. A continuación se presentan tres ejemplos de notaciones larga y condensada:

$$\begin{array}{lll} ^{14}_{7}\text{N} + {}^{1}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{11}_{6}\text{C} + {}^{4}_{2}\text{He} & & ^{14}\text{N}(p, a)^{11}\text{C} \\ ^{27}_{13}\text{Al} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{27}_{12}\text{Mg} + {}^{1}_{1}\text{H} & & ^{27}\text{Al}(n,\ p)^{27}\text{Mg} \\ ^{55}_{25}\text{Mn} + {}^{2}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{55}_{26}\text{Fe} + 2{}^{1}_{0}n & & ^{55}\text{Mn}(d,\ 2n)^{55}\text{Fe} \end{array}$$

El neutrón lento es un agente muy eficiente para causar transmutaciones, pues no tiene carga positiva y en consecuencia se puede aproximar al núcleo sin ser repelido. En contraste, una partícula cargada positivamente como el protón debe tener una alta energía para ocasionar una transmutación. Debido a su pequeña masa, incluso los electrones de muy alta energía son relativamente ineficientes para causar transmutaciones nucleares.

PROBLEMAS RESUELTOS

45.1 [II] El radio del núcleo del carbono es de aproximadamente 3×10^{-15} m y su masa es de 12 u. Encuentre la densidad promedio del material nuclear. ¿Cuántas veces es éste más denso que el agua?

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{4\pi r^3/3} = \frac{(12\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u})}{4\pi(3 \times 10^{-15}\ \text{m})^3/3} = 1.8 \times 10^{17}\ \text{kg/m}^3$$

$$\frac{\Upsilon}{\Upsilon_{\text{agua}}} = \frac{1.8 \times 10^{17}}{1000} = 2 \times 10^{14}$$

45.2 [II] En un *espectógrafo de masa*, las masas de los iones se determinan a partir de sus desviaciones en un campo magnético. Suponga que un ion de cloro cargado individualmente se dispara de manera perpendicular hacia un campo magnético $B = 0.15$ T con una rapidez de 5.0×10^4 m/s. (La rapidez se puede medir con un selector de velocidades.) El cloro tiene dos isótopos principales, cuyas masas son 34.97 u y 36.97 u. ¿Cuáles deben ser los radios de las trayectorias circulares que describen los dos isótopos en el campo magnético? (Vea la figura 45-l.)

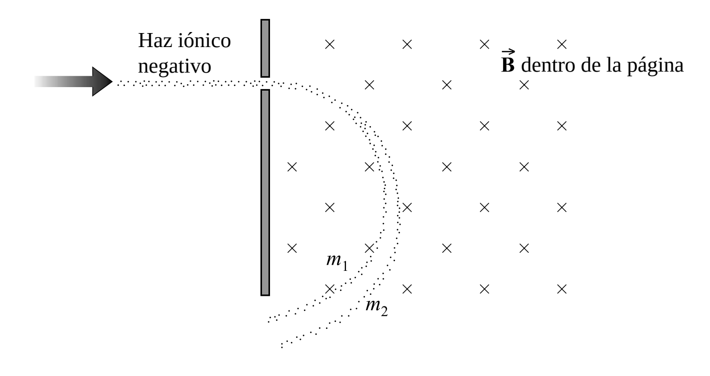


Figura 45-1

Las masas de los dos isótopos son

$$m_1 = (34.97 \text{ u})(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg/u}) = 5.81 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

$$m_2 = (36.97 \text{ u})(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg/u}) = 6.14 \times 10^{-26} \text{ kg}$$

Puesto que la fuerza magnética qvB debe producir la fuerza centrípeta mv^2/r, se tiene

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m(5.0 \times 10^4 \text{ m/s})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.105 \text{ T})} = m(2.98 \times 10^{24} \text{ m/kg})$$

Al sustituir los valores de *m* se encuentra que los radios son 0.17 m y 0.18 m.

45.3 [I] ¿Cuántos protones, neutrones y electrones hay en *a*) ^{3}He, *b*) ^{12}C y c) ^{206}Pb?

a) El número atómico del He es 2; por tanto, el núcleo debe contener 2 protones. Ya que el número de masa de este isótopo es 3, la suma de protones y neutrones en el núcleo debe ser igual a 3; en consecuencia, hay un neutrón. El número de electrones en el átomo es igual al número atómico, 2.

b) El número atómico del carbono es 6, por tanto; el núcleo debe contener 6 protones. El número de neutrones en el núcleo es igual a $12 - 6 = 6$. El número de electrones es el mismo que el número atómico, 6.

c) El número atómico del plomo es 82; en consecuencia, en el núcleo hay 82 protones y 82 electrones en el átomo. El número de neutrones es $206 - 82 = 124$.

45.4 [II] ¿Cuál es la energía de enlace del ^{12}C?

Un átomo de ^{12}C consiste en 6 protones, 6 electrones y 6 neutrones. La masa de los protones y electrones no combinados es la misma que la de seis átomos de ^{1}H (si se ignora la pequeña energía de enlace de cada par protón-electrón). Puede considerarse, entonces, que las partículas que lo componen son seis átomos de ^{1}H y seis neutrones. El balance de masa puede calcularse como sigue:

Masa de seis átomos de ^{1}H $= 6 \times 1.0078$ u	$=$ 6.0468 u
Masa de seis neutrones $= 6 \times 1.0087$ u	$=$ 6.0522 u
Masa total de las partículas componentes	$=$ 12.0990 u
Masa del átomo ^{12}C	$=$ 12.0000 u
Masa perdida al formarse el ^{12}C	$=$ 0.0990 u
Energía de enlace $= (931 \times 0.0990)$ MeV	$=$ 92 MeV

45.5 [III] El cobalto 60 (^{60}Co) se utiliza frecuentemente como fuente radiactiva en medicina. Su vida media es de 5.25 años. ¿Cuánto tiempo después de entregada una muestra nueva su actividad disminuirá *a*) a una octava parte de su valor original; *b*) a una tercera parte de su valor original? Dé sus respuestas a dos cifras significativas.

La actividad es proporcional al número de átomos que no han decaído $(\Delta N/\Delta t = \gamma N)$.

a) En cada vida media decae la mitad de la muestra remanente. Ya que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, se requieren tres vidas medias, o 16 años, para que la muestra decaiga hasta una octava parte de su intensidad original.

b) Al utilizar el hecho de que el material presente decae a la mitad en 5.25 años, se puede trazar la gráfica que se muestra en la figura 45-2. A partir de ella se ve que la muestra decae a 0.33 de su valor original después de aproximadamente 8.3 años.

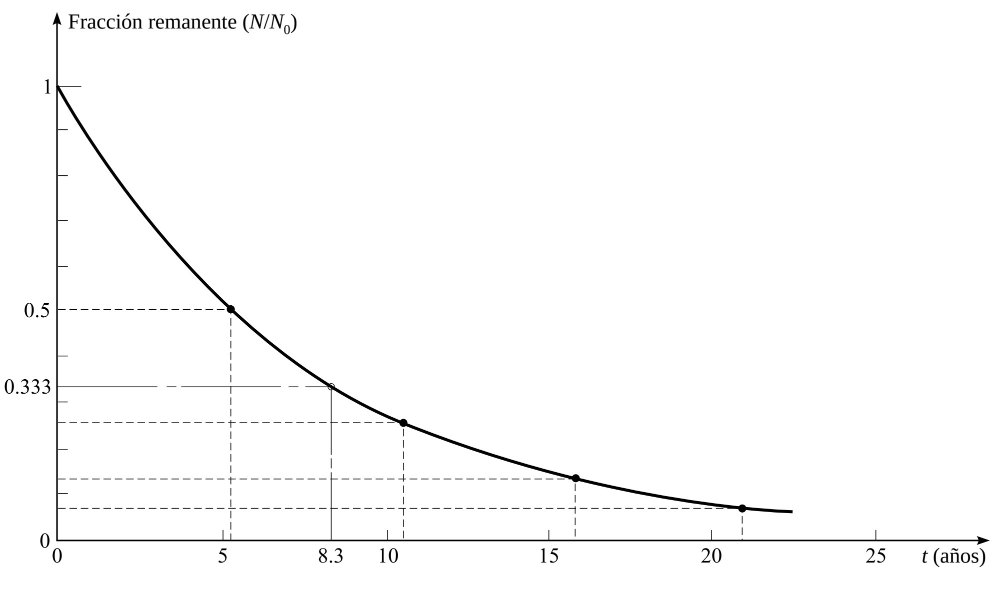


Figura 45-2

45.6 [II] Resuelva el problema 45.5*b* con la función exponencial.

La curva de la figura 45-2 es una *curva de decaimiento exponencial* y se expresa mediante la ecuación

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda\tau}$$

donde λ es la constante de decaimiento y N/N_0 es la fracción de las partículas originales N_0 que permanecen sin decaer después de un tiempo t. En este caso, $\lambda t_{1/2} = 0.693$, $\lambda = 0.693/t_{1/2} = 0.132/\text{ño}$ y $N/N_0 = 0.333$. Entonces

$$0.333 = e^{-0.132t/\text{año}}$$

Al tomar logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación se encuentra

$$\ln(0.333) = -0.132t/\text{año}$$

con lo cual $t = 8.3$ años.

45.7 [II] Para la situación descrita en los problemas 45.5 y 45.6, ¿cuánto es N/N_0 después de 20 años?

Como en el problema anterior, donde ahora $\lambda = 0.132/\text{año}$

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-(0.132)(20)} = e^{-2.64}$$

de donde $N/N_0 = 0.071$.

En éste y en el problema anterior, se utilizó t en años porque λ está expresada en (años)$^{-1}$. Con más frecuencia, λ se expresaría en s^{-1} y t estaría en segundos. Tenga cuidado en emplear las mismas unidades de tiempo para t y λ.

45.8 [II] El potasio que se encuentra en la naturaleza contiene dos isótopos. Un isótopo constituye 93.4% del total y su masa atómica es de 38.975 u; el otro 6.6% tiene una masa de 40.974 u. Calcule la masa atómica del potasio que se encuentra en la naturaleza.

La masa atómica del material que se encuentra en la naturaleza se obtiene al combinar las masas atómicas individuales en proporción a sus abundancias. El material de 38.975 u es 93.4%, mientras que el material de 40.974 u es 6.6%, por ende, en combinación,

$$\text{Masa atómica} = (0.934)(38.975 \text{ u}) + (0.066)(40.974 \text{ u}) = 39.1 \text{ u}$$

45.9 [III] La vida media del radio es de 1.62×10^3 años. ¿Cuántos átomos de radio decaen en 1.00 s en una muestra de 1.00 g de radio? El peso atómico del radio es de 226 kg/kmol.

Una muestra de 1.00 g es 0.001 00 kg, que para el radio de peso atómico 226 es (0.001 00/226) kmol. Ya que cada kilomol contiene 6.02×10^{26} átomos,

$$N = \left(\frac{0.001\,00}{226}\ \text{kmol}\right)\left(6.02 \times 10^{26}\ \frac{\text{átomos}}{\text{kmol}}\right) = 2.66 \times 10^{21}\ \text{átomos}$$

La constante de decaimiento es

$$\lambda = \frac{0.693}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{(1620 \text{ años})\,(3.156 \times 10^7 \text{ s/años})} = 1.36 \times 10^{-11}\ \text{s}^{-1}$$

Entonces $$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = (1.36 \times 10^{-11}\ \text{s}^{-1})(2.66 \times 10^{21}) = 3.61 \times 10^{10}\ \text{s}^{-1}$$

es el número de desintegraciones por segundo en 1.00 g de radio.

El resultado anterior conduce a la definición del *curie* (Ci) como una unidad de actividad:

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ desintegraciones/s}$$

Debido a su conveniente tamaño, algunas veces se utilizará el curie en los problemas subsecuentes, aunque la unidad del SI para la actividad sea el bequerel.

45.10 [III] El tecnecio 99 $\left({}^{99}_{43}\text{Tc}\right)$ tiene un estado de excitación que decae por emisión de un rayo gamma. La vida media del estado excitado es de 360 min. ¿Cuál es la actividad, en curies, de 1.00 mg de este isótopo excitado?

Puesto que se tiene la vida media $(t_{1/2})$ se puede determinar la constante de decaimiento, pues $\lambda t_{1/2} = 0.693$. La actividad de una muestra es λN. En este caso,

$$\lambda = \frac{0.693}{t_{1/2}} = \frac{0.693}{21\,600 \text{ s}} = 3.21 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

También se sabe que 99 kg de Tc contienen 6.02×10^{26} átomos. Por ende, una masa m contendrá $[m/(99.0 \text{ kg})](6.02 \times 10^{26})$ átomos. En este caso, $m = 1.00 \times 10^{-6}$ kg, y así

$$\text{Actividad} = \lambda N = (3.21 \times 10^{-5}\ \text{s}^{-1})\left(\frac{1.00 \times 10^{-6}\ \text{kg}}{99.0\ \text{kg}}\right)(6.02 \times 10^{26})$$

$$= 1.95 \times 10^{14}\ \text{s}^{-1} = 1.95 \times 10^{14}\ \text{Bq}$$

45.11 [III] ¿Cuánta energía deben poseer los protones de bombardeo para producir la reacción ${}^7\text{Li}(p, n)\,{}^7\text{Be}$? Dé su respuesta a tres cifras significativas.

La reacción es la siguiente:

$${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^7_4\text{Be} + {}^1_0 n$$

donde los símbolos representan los *núcleos* de los átomos indicados. Dado que la lista de masas en la tabla 45-2 incluye las masas de los electrones atómicos, el número apropiado de masas de electrones (m_e) se debe restar de los valores dados.

	Masa de reactantes		**Masa de productos**
${}^{7}_{3}\text{Li}$	$7.016\,00 - 3m_e$	${}^{7}_{4}\text{Be}$	$7.016\,93 - 4m_e$
${}^{1}_{1}\text{H}$	$1.007\,83 - 1m_e$	${}^{1}_{0}n$	$1.008\,66$
TOTAL	$8.023\,83 - 4m_e$	TOTAL	$8.025\,59 - 4m_e$

Al restar la masa total de reactantes de la masa total de productos se obtiene un incremento de masa de 0.001 76 u. (Note que las masas de los electrones se cancelan. Esto ocurre frecuentemente, pero no siempre.)

Para crear esta masa en la reacción, se debe proporcionar energía a los reactantes. La energía correspondiente a 0.001 76 u es $(931 \times 0.001\,76)$ MeV $= 1.65$ MeV. Esta energía se proporciona como EC de los protones que bombardean. El protón incidente debe tener más que esta energía, ya que el sistema debe poseer algo de EC incluso después de la reacción, de modo que se conserve la cantidad de movimiento. Si se toma en cuenta la conservación de la cantidad de movimiento, la EC mínima que la partícula incidente debe tener puede calcularse con la fórmula

$$\left(1 + \frac{m}{M}\right)(1.65)\ \text{MeV}$$

donde M es la masa de la partícula blanco y m la de la partícula incidente. Por tanto, la partícula incidente debe tener una energía de al menos

$$\left(1 + \tfrac{1}{7}\right)(1.65)\ \text{MeV} = 1.89\ \text{MeV}$$

45.12 [II] Complete las siguientes ecuaciones nucleares:

a) ${}^{14}_{7}\text{N} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{17}_{8}\text{O} + ?$
b) ${}^{9}_{4}\text{Be} + {}^{4}_{2}\text{He} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + ?$
c) ${}^{9}_{4}\text{Be}(p,\ \alpha)?$
d) ${}^{30}_{15}\text{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\text{Si} + ?$
e) ${}^{3}_{1}\text{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + ?$
f) ${}^{43}_{20}\text{Ca}(\alpha, ?){}^{46}_{21}\text{Sc}$

a) La suma de los subíndices del lado izquierdo es $7 + 2 = 9$. El subíndice del primer producto de la derecha es 8. Entonces el segundo producto de la derecha debe tener un subíndice (carga neta) de 1. Además, la suma de los superíndices de la izquierda es $14 + 4 = 18$. El superíndice del primer producto es 17. Entonces el segundo producto de la derecha debe tener un superíndice (número de masa) de 1. La partícula con carga nuclear 1 y número de masa 1 es el protón, ${}^{1}_{1}\text{H}$.

b) La carga nuclear de la partícula del segundo producto (su subíndice) es $(4 + 2) - 6 = 0$. El número de masa de la partícula (su superíndice) es $(9 + 4) - 12 = 1$. Por tanto, la partícula debe ser el neutrón, ${}^{1}_{0}n$.

c) Los reactantes ${}^{9}_{4}\text{Be}$ y ${}^{1}_{1}\text{H}$ tienen una carga nuclear combinada de 5 y un número de masa de 10. Además de la partícula alfa, se formará un producto con carga $5 - 2 = 3$ y número de masa $10 - 4 = 6$. Éste es ${}^{6}_{3}\text{Li}$.

d) La carga nuclear de la partícula del segundo producto es $15 - 14 = +1$. Su número de masa es $30 - 30 = 0$. Entonces la partícula debe ser un positrón ${}^{0}_{.1}e$.

e) La carga nuclear de la partícula del segundo producto es $1 - 2 = -1$. Su número de masa es $3 - 3 = 0$. Por tanto, la partícula debe ser una partícula beta (un electrón), ${}^{0}_{/1}e$.

f) Los reactantes, ${}^{43}_{20}\text{Ca}$ y ${}^{4}_{2}\text{He}$, tienen una carga nuclear combinada de 22 y número de masa 47. El producto expulsado tendrá una carga de $22 - 21 = 1$ y número de masa $47 - 46 = 1$. Éste es un protón y debe representarse en el paréntesis por p.

En algunas de estas reacciones se emiten un neutrino y/o un fotón. En este análisis se les ignoró, pues la masa en reposo y la carga de ambos son cero.

45.13 [II] El uranio 238 ($^{238}_{92}U$) es radiactivo y decae en una sucesión de elementos diferentes. Las siguientes partículas se emiten antes de que el núcleo alcance una forma estable: $\alpha, \beta, \beta, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta, a, \beta, \beta$ y α (β representa una "partícula beta", e^-). ¿Cuál es el núcleo final estable?

El núcleo original emite 8 partículas alfa y 6 partículas beta. Cuando se emite una partícula alfa, Z decrece en 2, pues la partícula alfa se lleva una carga de $+2e$. Una partícula beta se lleva una carga de $-1e$, y como resultado la carga del núcleo debe aumentar a $(Z + 1)e$. Entonces se tiene, para el núcleo final,

$$Z \text{ final} = 92 + 6 - (2)(8) = 82$$

$$A \text{ final} = 238 - (6)(0) - (8)(4) = 206$$

El núcleo estable final es el $^{206}_{82}Pb$.

45.14 [I] La vida media del uranio 238 es de aproximadamente 4.5×10^9 años, y su producto final es plomo 206. Las rocas más viejas de uranio que se conocen sobre la Tierra contienen una mezcla aproximada de 50:50 de ^{238}U y ^{206}Pb. ¿Cuál es la edad aproximada de estas rocas?

Aparentemente, casi la mitad del ^{238}U decayó a ^{206}Pb durante la existencia de la roca. Por tanto, la roca se debe haber formado hace aproximadamente 4.5 mil de millones de años.

45.15 [II] Una partícula alfa de 5.6 MeV se dispara directamente a un átomo de uranio ($Z = 92$). ¿Qué tan cerca llegará del centro del núcleo de uranio?

A tan altas energías, la partícula alfa penetrará con facilidad la nube de electrones y los efectos de los electrones atómicos se pueden ignorar. También se supondrá que el átomo de uranio es tan masivo que no se mueve de manera apreciable. Entonces la EC original de la partícula alfa se transformará en energía potencial electrostática. Esta energía, para una carga q' a una distancia r de la carga puntual q, es (capítulo 25)

$$\text{Energía potencial} = q'V = k\frac{qq'}{r}$$

Al igualar la EC de la partícula alfa con esta energía potencial, se encuentra que

$$(5.6 \times 10^6 \text{ eV})(1.60 \times 10^{-19} \text{ J/eV}) = (8.99 \times 10^9)\frac{(2e)(92e)}{r}$$

donde $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C. A partir de esto se determina que $r = 4.7 \times 10^{-14}$ m.

45.16 [II] El neón 23 tiene un decaimiento beta de la siguiente forma

$$^{23}_{10}\text{Ne} \rightarrow {}^{23}_{11}\text{Na} + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\bar{v}$$

donde $\vec{v}$ es un antineutrino, una partícula sin carga ni masa. Dependiendo de las circunstancias, la energía que se lleva el antineutrino puede variar desde cero hasta el máximo permitido por la reacción. Determine el mínimo y el máximo de EC que la partícula beta $^{0}_{/1}e$ puede tener. Las masas atómicas pertinentes son 22.994 5 u para el ^{23}Ne y 22.989 8 u para el ^{23}Na. La masa de la partícula beta es de 0.000 55 u.

Antes de empezar, observe que la reacción dada es una reacción *nuclear*, mientras que las masas proporcionadas son para átomos *neutros*. Para calcular la pérdida de masa en la reacción, se debe restar la masa de los electrones atómicos de las masas atómicas dadas. Se tienen las siguientes masas nucleares:

	Masa de reactantes		**Masa de productos**
$^{23}_{10}Ne$	$22.994\,5 - 10m_e$	$^{23}_{11}Na$	$22.989\,8 - 11m_e$
		$^{0}_{-1}e$	m_e
		$^{0}_{0}\bar{v}$	0
TOTAL	$22.994\,5 - 10m_e$	TOTAL	$22.989\,8 - 10m_e$

con lo cual la masa perdida es de 22.994 5 − 22.989 8 = 0.004 7 u. Ya que 1.00 u corresponde a 931 MeV, esta masa perdida corresponde a una energía de 4.4 MeV. La partícula beta y el antineutrino compartirán esta energía. Por tanto, la energía de la partícula beta puede variar de cero a 4.4 MeV.

45.17 [II] Un núcleo ${}^{M}_{n}\mathrm{P}$, el núcleo *padre*, decae en un núcleo *hijo* D por decaimiento de positrón:

$${}^{M}_{n}\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{D} + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu$$

donde ν es un neutrino, una partícula que tiene masa y carga cero. *a*) ¿Cuáles son el subíndice y el superíndice para D? *b*) Pruebe que la pérdida de masa en la reacción es $M_p - M_d - 2m_e$, donde M_p y M_d son las masas *atómicas* de padre e hijo.

a) Para balancear los subíndices y superíndices, se debe tener ${}^{M}_{n/1}\mathrm{D}$.

b) La tabla de masas para los *núcleos* involucrados es

	Masa de reactantes		**Masa de productos**
${}^{M}_{n}\mathrm{P}$	$M_p - nm_e$	${}^{M}_{n-1}\mathrm{D}$	$M_d - (n-1)m_e$
		${}^{0}_{1}e$	m_e
		${}^{0}_{0}\nu$	0
TOTAL	$M_p - nm_e$	TOTAL	$M_d - nm_e + 2m_e$

Al restar se obtiene la pérdida de masa:

$$(M_p - nm_e) - (M_d - nm_e + 2m_e) = M_p - M_d - 2m_e$$

Observe cuán importante es seguir la pista de las masas de los electrones en éste y en el problema previo.

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

45.18 [I] ¿Cuántos protones, neutrones y electrones posee un átomo de ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$? **Resp.** 92, 143, 92.

45.19 [I] ¿En cuánto cambia la masa de un núcleo pesado al emitir un rayo gamma de 4.8 MeV? **Resp.** 5.2×10^{-3} u = 8.6×10^{-30} kg.

45.20 [II] Determine la energía de enlace del ${}^{107}_{47}\mathrm{Ag}$, que tiene una masa atómica de 106.905 u. Dé su respuesta a tres cifras significativas. **Resp.** 915 eV.

45.21 [II] La energía de enlace por nucleón para los elementos cercanos al hierro en la tabla periódica es aproximadamente de 8.90 MeV por nucleón. ¿Cuál es la masa atómica, electrones incluidos, de ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$? **Resp.** 55.9 u.

45.22 [II] ¿Qué masa de ${}^{60}_{27}\mathrm{Co}$ tiene una actividad de 1.0 Ci? La vida media del cobalto 60 es de 5.25 años. **Resp.** 8.8×10^{-7} kg.

45.23 [II] Un experimento se realiza para determinar la vida media de una sustancia radiactiva que emite una partícula beta en cada proceso de decaimiento. Las mediciones muestran que 2.5 mg de la sustancia emiten un promedio de 8.4 partículas beta cada segundo. La masa atómica de la sustancia es 230. Determine la vida media de la sustancia. **Resp.** 1.7×10^{10} años.

45.24 [II] La vida media del carbono 14 es de 5.7×10^3 años. ¿Qué fracción de una muestra de ${}^{14}\mathrm{C}$ permanecerá sin cambio después de un periodo de cinco vidas medias? **Resp.** 0.031.

45.25 [II] El cesio 124 tiene una vida media de 31 s. ¿Qué fracción de una muestra de cesio 124 quedará después de 0.10 h?
Resp. 0.000 32.

45.26 [II] Cierto isótopo tiene una vida media de 7.0 h. ¿Cuántos segundos tarda en decaer 10% de la muestra?
Resp. 3.8×10^3 s.

45.27 [II] Por radiactividad natural el ^{238}U emite una partícula alfa. El núcleo residual pesado se llama UX_1. A su vez, el UX_1 emite una partícula beta. El núcleo resultante se llama UX_2. Determine el número atómico y el número de masa para *a*) UX_1 y *b*) UX_2. **Resp.** 90, 234; *b*) 91, 234.

45.28 [I] Al decaer, el $^{239}_{93}$Np emite una partícula beta. El núcleo residual pesado también es radiactivo y da lugar a ^{235}U por el proceso radiactivo. ¿Qué pequeñas partículas se emiten simultáneamente con la formación del uranio 235? **Resp.** partículas alfa.

45.29 [II] Complete las siguientes ecuaciones. (Vea el apéndice H para la tabla de los elementos.)

a) $^{23}_{11}\mathrm{Na} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{26}_{12}\mathrm{Mg} + ?$

b) $^{64}_{29}\mathrm{Cu} \rightarrow ^{0}_{+1}e + ?$

c) $^{106}\mathrm{Ag} \rightarrow ^{106}\mathrm{Cd} + ?$

d) $^{10}_{5}\mathrm{B} + ^{4}_{2}\mathrm{He} \rightarrow ^{13}_{6}\mathrm{N} + ?$

e) $^{105}_{48}\mathrm{Cd} + ^{0}_{-1}e \rightarrow ?$

f) $^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{234}_{90}\mathrm{Th} + ?$

Resp. *a*) $^{1}_{1}$H; *b*) $^{64}_{28}$Ni; *c*) $^{0}_{-1}e$; *d*) $^{1}_{0}n$; *e*) $^{105}_{47}$Ag; *f*) $^{4}_{2}$He.

45.30 [I] Complete la notación para los siguientes procesos.

a) $^{24}\mathrm{Mg}(d,\ \alpha)?$

b) $^{26}\mathrm{Mg}(d,\ p)?$

c) $^{40}\mathrm{Ar}(\alpha,\ p)?$

d) $^{12}\mathrm{C}(d,\ n)?$

e) $^{130}\mathrm{Te}(d,\ 2n)?$

f) $^{55}\mathrm{Mn}(n,\ \gamma)?$

g) $^{59}\mathrm{Co}(n,\ \alpha)?$

Resp. *a*) ^{22}Na; *b*) ^{27}Mg; *c*) ^{43}K; *d*) ^{13}N; *e*) ^{130}I; *f*) ^{56}Mn; *g*) ^{56}Mn.

45.31 [II] ¿Cuánta energía se libera en las siguientes reacciones: *a*) $^{1}_{1}\mathrm{H} + ^{7}_{3}\mathrm{Li} \rightarrow 2^{4}_{2}\mathrm{He}$ y *b*) $^{3}_{1}\mathrm{H} + ^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{1}_{0}n$?
Resp. *a*) 17.4 MeV; *b*) 17.6 MeV.

45.32 [II] En la reacción $^{14}\mathrm{N}(n, p)^{14}\mathrm{C}$, el protón se expulsa con una energía de 0.600 MeV. Se utilizan neutrones muy lentos. Calcule la masa del átomo de ^{14}C. **Resp.** 14.003 u.

FÍSICA NUCLEAR APLICADA 46

LAS ENERGÍAS NUCLEARES DE ENLACE difieren de las energías atómicas de enlace discutidas en el capítulo 45 por la cantidad de energía relativamente pequeña que liga los electrones al núcleo. La **energía de enlace por nucleón** (la energía total liberada para construir al núcleo, dividida entre el número de protones y neutrones) resulta ser mayor para núcleos próximos a $Z = 30$ ($A = 60$). En consecuencia, los núcleos en los dos extremos de la tabla periódica pueden liberar energía si de alguna manera se transforman en núcleos de tamaño medio.

REACCIÓN DE FISIÓN: Un núcleo muy grande, tal como el núcleo de un átomo de uranio, libera energía conforme se parte en dos o tres núcleos de tamaño medio. Tal **reacción de fisión** se puede inducir al bombardear núcleos grandes con un neutrón de baja o moderada energía. Las reacciones de fisión producen neutrones adicionales, que a su vez pueden producir más reacciones de fisión y por lo mismo más neutrones. Si el número de neutrones permanece constante o aumenta en el tiempo, el proceso es una *reacción en cadena* autosostenida.

REACCIÓN DE FUSIÓN: En una ***reacción de fusión*** los núcleos pequeños, como los del hidrógeno o el helio, se unen para formar un núcleo más masivo, por tanto liberan energía.

Esta reacción usualmente es difícil de iniciar y sostener porque los núcleos se deben fusionar aun cuando se repelan entre sí debido a la fuerza de Coulomb. Sólo cuando las partículas se mueven una hacia otra con muy altas energías se aproximan lo suficiente para que la fuerza fuerte los ligue. Las reacciones de fusión pueden ocurrir en las estrellas debido a las altas densidades y las enormes energías térmicas de las partículas en estos objetos extremadamente calientes.

LA DOSIS DE RADIACIÓN (D) se define como la cantidad de energía impartida a una unidad de masa de sustancia a través de la absorción de radiación ionizante. Un material recibe una dosis de 1 **gray** (Gy) cuando absorbe 1 J de radiación en cada kilogramo del material:

$$D \; 2 \; \frac{\text{energía absorbida en J}}{\text{masa del material absorbente en kg}}$$

entonces un gray es 1 J/kg. Aunque el gray es la unidad de dosis de radiación en el SI, se utiliza otra unidad ampliamente. Es el **rad** (rd), donde 1 rd = 0.01 Gy.

POTENCIAL DE DAÑO POR RADIACIÓN: Cada tipo (y energía) de radiación causa su propio grado característico de daño en el tejido vivo. El daño también varía de acuerdo con el tipo de tejido. Los potenciales efectos dañinos de un tipo específico de radiación se expresan como el **factor de calidad** Q de dicha radiación. Arbitrariamente, el potencial de daño se determina respecto al daño causado por rayos X de 200 keV:

$$Q \; 2 \; \frac{\text{efecto biológico de 1 Gy de radiación}}{\text{efecto biológico de 1 Gy de radiación de rayos X de 200 keV}}$$

Por ejemplo, si 10 Gy de una radiación particular causará siete veces más daño que 10 Gy de 200 keV de rayos X, entonces el Q para dicha radiación es 7. Frecuentemente se usa la unidad EBR (eficacia biológica relativa) en lugar del factor de calidad. Los dos son equivalentes.

LA DOSIS DE RADIACIÓN EFECTIVA (H), también conocida como ***dosis equivalente***, es la dosis de radiación modificada para designar el daño por radiación en tejido vivo. Su unidad en el SI es el sievert (Sv), que se define como el producto de la dosis en grays por el factor de calidad de la radiación:

$$H = (Q)(\mathrm{D})$$

Por ejemplo, suponga que cierto tipo de tejido está expuesto a una dosis de 5 Gy de una radiación para la cual el factor de calidad es 3. Entonces la dosis en sieverts es $3 \times 5 = 15$ Sv. Advierta que las unidades de Q son Sv/Gy.

Mientras que el sievert es la unidad en el SI, otra unidad, el *rem* (Roentgen equivalent man: Roentgen equivalente en el hombre), se usa con mucha frecuencia. Las dos se relacionan por 1 rem = 0.01 Sv.

ACELERADORES DE ALTA ENERGÍA: Las partículas cargadas se pueden acelerar a altas energías al forzarlas a seguir trayectorias circulares de manera repetida. Cada vez que una partícula (de carga q) completa una trayectoria, se le fuerza a caer a través de una diferencia de potencial V. Después de n vueltas, su energía es $q(nV)$.

Se utilizan campos magnéticos para proporcionar la fuerza centrípeta que se requiere para mantener a la partícula moviéndose en un círculo. Al igualar la fuerza magnética qvB con la fuerza centrípeta mv^2/r se obtiene

$$mv = qBr$$

En esta expresión, m es la masa de la partícula que viaja con rapidez v en un círculo de radio r perpendicular a un campo magnético B.

LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO (MOMENTO) LINEAL DE UNA PARTÍCULA se relaciona con su EC. Con base en lo visto en el capítulo 41, dado que la energía total de una partícula es la suma de su energía cinética y su energía en reposo, $E = EC + mc^2$, y con $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, se sigue que

$$EC = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS

46.1 [I] La energía de enlace por nucleón para el ^{238}U es cercana a 7.6 MeV, mientras que para un núcleo de la mitad de esa masa es de alrededor de 8.6 MeV. Si un núcleo de ^{238}U se fuera a dividir en dos núcleos de igual tamaño, ¿aproximadamente cuánta energía se liberaría en el proceso?

Hay 238 nucleones involucrados. Cada nucleón liberará alrededor de $8.6 - 7.6 = 1.0$ MeV de energía cuando el núcleo experimenta fisión. En consecuencia, la energía total liberada es de aproximadamente 238 MeV o 2.4×10^2 MeV.

46.2 [II] ¿Cuál es la energía de enlace por nucleón para el núcleo $^{238}_{92}U$? La masa *atómica* del ^{238}U es 238.050 79 u; además, $m_p = 1.007\ 276$ u y $m_n = 1.008\ 665$ u.

La masa de los 92 protones libres más $238 - 92 = 146$ neutrones libres es

$$(92)(1.007\ 276\ \text{u}) + (146)(1.008\ 665\ \text{u}) = 239.934\ 48\ \text{u}$$

La masa del *núcleo* de ^{238}U es

$$238.050\ 79 - 92\ m_e = 238.050\ 79 - (92)(0.000\ 549) = 238.000\ 28\ \text{u}$$

Entonces la masa perdida al construir un núcleo es

$$\Delta m = 239.934\ 48 - 238.000\ 28 = 1.\ 934\ 2\ \text{u}$$

Como 1.00 u corresponde a 931 MeV, se tiene

$$\text{Energía de enlace} = (1.934\ 2\ \text{u})(931\ \text{MeV/u}) = 1\ 800\ \text{MeV}$$

y

$$\text{Energía de enlace por nucleón} = \frac{1\ 800\ \text{MeV}}{238} = 7.57\ \text{MeV}$$

46.3 [III] Cuando un átomo de ^{235}U experimenta fisión en un reactor se liberan alrededor de 200 MeV de energía. Suponga que el reactor que usa uranio 235 tiene una salida de 700 MW y una eficiencia de 20%. *a*) ¿Cuántos átomos de uranio consume en un día? *b*) ¿Cuánta masa de uranio consume cada día?

a) Cada fisión produce

$$200\ \text{MeV} = (200 \times 10^6)(1.6 \times 10^{-19})\ \text{J}$$

de energía. Sólo 20% se utiliza eficientemente, y por tanto

$$\text{Energía utilizable por fisión} = (200 \times 10^6)(1.6 \times 10^{-19})(0.20) = 6.4 \times 10^{-12}\ \text{J}$$

Como la salida utilizable del reactor es de 700×10^6 J/s, el número de fisiones que se requieren por segundo es

$$\text{Fisiones/s} = \frac{7 \times 10^8 \text{ J/s}}{6.4 \times 10^{-12} \text{ J}} = 1.1 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}$$

y

$$\text{Fisiones/día} = (86\,400 \text{ s/d})(1.1 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}) = 9.5 \times 10^{24} \text{ d}^{-1}$$

b) Hay 6.02×10^{26} átomos en 235 kg de uranio 235. En consecuencia, la masa de uranio 235 consumida en un día es

$$\text{Masa} = \left(\frac{9.5 \times 10^{24}}{6.02 \times 10^{26}}\right)(235 \text{ kg}) = 3.7 \text{ kg}$$

46.4 [III] Los neutrones producidos por reacciones de fisión se deben frenar mediante colisiones con núcleos moderadores antes de que produzcan más fisiones. Suponga que un neutrón de 800 keV pierde 40% de su energía en cada colisión. ¿Cuántas colisiones se requieren para disminuir su energía a 0.040 eV ? (Ésta es la energía térmica promedio de una partícula de gas a 35 °C.)

Después de una colisión, la energía del neutrón baja a (0.6)(800 keV). Después de dos colisiones, es (0.6)(0.6)(800 keV); después de tres, $(0.6)^3$(800 KeV). Por tanto, después de n colisiones, la energía del neutrón es $(0.6)^n$(800 keV). Se desea que n sea lo suficientemente grande para que

$$(0.6)^n(8 \times 10^5 \text{ eV}) = 0.040 \text{ eV}$$

Tomando los logaritmos en ambos lados de la ecuación da

$$n\log_{10} 0.6 + \log_{10}(8 \times 10^5) = \log_{10} 0.04$$

$$(n)(-0.222) + 5.903 = -1.398$$

de donde se encuentra que n es 32.9. Así que se requieren 33 colisiones.

46.5 [II] Para examinar la estructura de un núcleo se deben utilizar partículas puntuales con longitud de onda de De Broglie aproximadamente abajo de 10^{-16} m. ¿Cuál debe ser la diferencia de potencial para que los electrones tengan esta longitud de onda? Suponga que el electrón se mueve de manera relativista.

La EC y la cantidad de movimiento del electrón se relacionan a través de

$$\text{EC} = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$$

Como la longitud de onda de De Broglie es $\lambda = h/p$, esta ecuación se convierte en

$$\text{EC} = \sqrt{\left(\frac{hc}{\lambda}\right)^2 + m^2c^4} - mc^2$$

Con $\lambda = 10^{-16}$ m, $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s y $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, se encuentra que

$$\text{EC} = 1.99 \times 10^{-9} \text{ J} = 1.24 \times 10^{10} \text{ eV}$$

El electrón se debe acelerar a través de una diferencia de potencial de aproximadamente 10^{10} eV.

46.6 [III] La siguiente reacción de fusión tiene lugar en el Sol y proporciona la mayor parte de su energía:

$$4\,{}^1_1\text{H} \;\Uparrow\; {}^4_2\text{He} \;.\; 2\,{}^{\;0}_{.1}e \;.\; \text{energía}$$

donde ${}^{\;0}_{.1}e$ es un electrón positrón. ¿Cuánta energía se libera conforme se consume 1.00 kg de hidrógeno? Las masas de ^{1}H, ^{4}He y ${}^{\;0}_{.1}e$ son, respectivamentλ 1.007 825, 4.002 604 y 0.000 549 u, donde los electrones atómicos se incluyen en los primeros dos valores.

Al despreciar la energía de enlace de los electrones, la masa de los reactantes, 4 protones, es 4 veces la masa atómica del hidrógeno (^{1}H), menos la masa de 4 electrones:

$$\text{Masa de reactante} = (4)(1.007\ 825\ \text{u}) - 4m_e$$
$$= 4.031\ 300\ \text{u} - 4m_e$$

donde m_e es la masa del electrón (o positrón). Los productos de la reacción tienen una masa combinada

$$\text{Masa de producto} = (\text{masa del núcleo } {}^4_2\text{He}) + 2m_e$$
$$= (4.002\ 604\ \text{u} - 2m_e) + 2m_e$$
$$= 4.002\ 604\ \text{u}$$

Entonces, la masa perdida es

$$(\text{masa de los reactantes}) - (\text{masa del producto}) = (4.031\ 3\ \text{u} - 4m_e) - 4.002\ 6\ \text{u}$$

Al sustituir $m_e = 0.000\ 549$ u se obtiene la masa perdida 0.026 5 u.

Pero 1.00 kg de ^{1}H contiene 6.02×10^{26} átomos. Por cada cuatro átomos que experimentan fusión, se pierde 0.026 5 u. Por ende, la masa perdida cuando 1.00 kg experimenta fusión es

$$\text{Masa perdida 1 kg} = (0.026\,5\ \text{u})(6.02 \times 10^{26}/4) = 3.99 \times 10^{24}\ \text{u}$$
$$= (3.99 \times 10^{24}\ \text{u})(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg/u}) = 0.006\,63\ \text{kg}$$

Entonces, de la relación de Einstein,

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 = (0.006\,63\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 5.96 \times 10^{14}\ \text{J}$$

46.7 [III] El hidruro de litio, LiH, se ha propuesto como un posible combustible nuclear. Los núcleos por utilizar y la reacción involucrada son los siguientes:

$$\underset{6.015\,13}{{}^6_3\text{Li}} \quad + \quad \underset{2.014\,10}{{}^2_1\text{H}} \quad \rightarrow \quad \underset{4.002\,60}{2\,{}^4_2\text{He}}$$

las masas mencionadas son de los átomos neutros. Calcule la producción de potencia esperada, en megawatts, asociada con el consumo de 1.00 g de LiH por día. Suponga una eficiencia de 100%.

Al ignorar las energías de enlace de los electrones, primero se debe calcular el cambio de masa para la reacción:

	Masa de reactantes		**Masa de productos**
${}^6_3$Li	$6.015\,13\ \text{u} - 3m_e$	$2\ {}^4_2$He	$2(4.002\,60\ \text{u} - 2m_e)$
${}^2_1$H	$2.014\,10\ \text{u} - 1m_e$		
TOTAL	$8.029\,23\ \text{u} - 4m_e$	TOTAL	$8.005\,20\ \text{u} - 4m_e$

Se encuentra la pérdida de masa al restar la masa del producto de la masa de reactante. En el proceso, la masa de los electrones se cancela y se encuentra que la masa perdida es 0.024 03 u.

La fracción de masa perdida es $0.024\,0/8.029 = 2.99 \times 10^{-3}$. Por tanto, cuando 1.00 g reacciona, la masa perdida es

$$(2.99 \times 10^{-3})(1.00 \times 10^{-3}\ \text{kg}) = 2.99 \times 10^{-6}\ \text{kg}$$

Esto corresponde a una energía de

$$\Delta E = (\Delta m)c^2 = (2.99 \times 10^{-6}\ \text{kg})(2.998 \times 10^8\ \text{m/s})^2 = 2.687 \times 10^{11}\ \text{J}$$

Entonces $$\text{Potencia } 2 \ \frac{\text{energía}}{\text{tiempo}}\ 2\ \frac{2.687\ \ 0\ \ 10^{11}\ \text{J}}{86\,400\ \text{s}}\ 2\ 3.11\ \text{MW}$$

46.8 [II] Los rayos cósmicos bombardean al CO_2 en la atmósfera y, por reacción nuclear, se produce el isótopo radiactivo ${}^{14}_6$C. Este isótopo tiene una vida media de 5 730 años. Se mezcla uniformemente en la atmós-

fera y es captado por las plantas en su crecimiento. Después de que muere una planta, el ^{14}C decae en los años siguientes. ¿Qué tan antiguo es un pedazo de madera que tiene un contenido de ^{14}C de sólo 9% del contenido promedio de ^{14}C de madera recién crecida?

A lo largo de los años, el ^{14}C ha decaído 0.090 de su valor original. Por tanto (vea el problema 45.6),

$$\frac{N}{N_0}\ 2\ e^{/\ \text{o}t} \qquad \text{se transforma en} \qquad 0.090 = e^{-0.693t/(5\,730\ \text{años})}$$

Después de tomar el logaritmo natural en ambos lados, se tiene

$$\ln 0.090\ 2\ \frac{/\ 0.693t}{5730\ \text{años}}$$

de donde

$$t = \left(\frac{5\,730\ \text{años}}{-0.693}\right)(\ /\ 2.41)\ 2\ 1.99\ \ 0\ \ 10^4\ \text{años}$$

El pedazo de madera tiene aproximadamente 20 000 años de antigüedad.

46.9 [III] El yodo 131 tiene una vida media de aproximadamente 8.0 días. Cuando se consume con los alimentos, se concentra en la tiroides. Suponga que 7.0% del ^{131}I se acumula en la tiroides y que se detecta el 20% de la desintegración por el conteo de rayos gamma emitidos. ¿Cuánto ^{131}I se debe ingerir para tener conteo de 50 cuentas por segundo?

Como sólo se cuentan 20% de las desintegraciones, debe haber un total de 50/20% o 50/0.20 = 250 desintegraciones por segundo, del cual es $\Delta N/\Delta t$. Del capítulo 45,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N = \frac{0.693N}{t_{1/2}} \qquad \text{y así} \qquad 250\ \text{s}^{-1} = \frac{0.693N}{(8.0\ \text{d})(3\,600\ \text{s/h})(24\ \text{h/d})}$$

de donde $N = 2.49 \times 10^8$.

Sin embargo, éste es sólo 7.0% del ^{131}I ingerido. En consecuencia, el número de átomos ingeridos es $N/0.070 = 3.56 \times 10^9$. Y, como 1.00 kmol de ^{131}I es aproximadamente 131 kg, este número de átomos representa

$$\left(\frac{3.56 \times 10^9\ \text{átomos}}{6.02 \times 10^{26}\ \text{átomos/kmol}}\right)(131\ \text{kg/kmol}) = 7.8 \times 10^{-16}\ \text{kg}$$

que es la masa de ^{131}I que se debe ingerir.

46.10 [II] Un haz de rayos gamma tiene un área en la sección transversal de 2.0 cm² y transporta 7.0×10^8 fotones por la sección transversal cada segundo. Cada fotón tiene una energía de 1.25 MeV. El haz pasa a través de un pedazo de carne $(\rho = 0.95\ \text{g/cm}^3)$ de 0.75 cm de espesor y pierde 5.0% de su intensidad en el proceso. ¿Cuál es la dosis promedio (en Gy y en rd) que se aplica a la carne cada segundo?

En este caso, la dosis es la energía absorbida por kilogramo de carne. Puesto que se absorbe 5.0% de la intensidad, se tiene

$$\text{Número de fotones absorbidos/s} = (7.0 \times 10^8\ \text{s}^{-1})(0.050) = 3.5 \times 10^7\ \text{s}^{-1}$$

y cada fotón transporta una energía de 1.25 MeV. Entonces,

$$\text{Energía absorbida/s} = (3.5 \times 10^7\ \text{s}^{-1})(1.25\ \text{MeV}) = 4.4 \times 10^7\ \text{MeV/s}$$

Se necesita la masa de carne en la cual se absorbió esta energía. El haz se envió a una región de 2.0 cm² de área y 0.75 cm de grosor. Por tanto,

$$\text{Masa} = \rho V = (0.95\ \text{g/cm}^3)\,[(2.0\ \text{cm}^2)(0.75\ \text{cm})] = 1.43\ \text{g}$$

Al recordar que 1 rd = 0.01 Gy, entonces se tiene

$$\text{Dosis/s} = \frac{\text{energía/s}}{\text{masa}} = \frac{(4.4 \times 10^7\ \text{MeV/s})(1.6 \times 10^{-13}\ \text{J/MeV})}{1.43 \times 10^{-3}\ \text{kg}} = 4.9\ \text{mGy/s} = 0.49\ \text{rd/s}$$

46.11 [II] Un haz de partículas alfa pasa por un pedazo de carne y deposita 0.20 J de energía en cada kilogramo de carne. El Q para estas partículas es 12 Sv/Gy. Encuentre la dosis en Gy y rd, así como la dosis efectiva en Sv y rem.

Tenga presente que $H = QD$, donde

$$D\ 2\ \text{Dosis}\ 2\ \frac{\text{e nergía absorbida}}{\text{masa}}\ 2\ 0.20\ \text{J/kg} = 0.20\ \text{Gy} = 20\ \text{rd}$$

Así, $$H\ 2\ \text{Dosis efectiva}\ 2\ (Q)(\text{dosis})\ 2\ (12\ \text{Sv/Gy})(0.20\ \text{Gy}) = 2.4\ \text{Sv} = 2.4 \times 10^2\ \text{rem}$$

46.12 [III] Un tumor en la pierna de una persona tiene una masa de 3.0 g. ¿Cuál es la actividad mínima que debe tener una fuente de radiación si debe proporcionar al tumor una dosis de 10 Gy en 14 min? Suponga que cada desintegración dentro de la fuente, en promedio, proporciona al tumor una energía de 0.70 MeV.

Una dosis de 10 Gy corresponde a 10 J de energía radiante depositada por kilogramo. Dado que el tumor tiene una masa de 0.003 0 kg, la energía que se requiere para una dosis de 10 Gy es (0.0030 kg) (10 J/kg) = 0.030 J.

Cada desintegración proporciona 0.70 MeV, que en joules es

$$(0.70 \times 10^6\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}) = 1.12 \times 10^{-13}\ \text{J}$$

Una dosis de 10 Gy requiere que se libere una energía de 0.030 J. Esa energía total, dividida entre la energía por desintegración, da el número de desintegraciones:

$$\frac{0.030\ \text{J}}{1.12 \times 10^{-13}\ \text{J/desintegración}} = 2.68 \times 10^{11}\ \text{desintegraciones}$$

Éstas deben ocurrir en 14 min (u 840 s), y así la tasa de desintegración es

$$\frac{2.68 \times 10^{11}}{840\ \text{s}}\ \text{desintegraciones} = 3.2 \times 10^8\ \text{desintegraciones/s}$$

Por lo que la actividad de la fuente debe ser de al menos 3.2×10^8 Bq. Como 1 Ci = 3.70×10^{10} Bq, la actividad de la fuente debe ser de al menos 8.6 mCi.

46.13 [II] Un haz de partículas alfa ($q = 2e$) de 5.0 MeV tiene área de sección transversal de 150 cm². Incide sobre un trozo de carne ($\rho = 950\ \text{kg/m}^3$) y penetra a una profundidad de 0.70 mm. *a*) ¿Qué dosis (en Gy) le suministra el haz a la carne en un tiempo de 3.0 s? *b*) ¿Cuál es la dosis efectiva que se suministra? Suponga que el haz transporta una corriente de 2.50×10^{-9} A y tiene un $Q = 14$.

Mediante el uso de la corriente se puede hallar el número de partículas que se depositan en la carne en 3.0 s, al recordar que, para cada partícula, $q = 2e$:

$$\text{Número en 3.0 s} = \frac{It}{q} = \frac{(2.50 \times 10^{-9}\ \text{C/s})(3.0\ \text{s})}{3.2 \times 10^{-19}\ \text{C}} = 2.34 \times 10^{10}\ \text{partículas}$$

Cada partícula alfa de 5.0 MeV deposita una energía de $(5.0 \times 10^6\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}) = 8.0 \times 10^{-13}$ J. En 3.0 s se deposita una energía total de (2.34×10^{10} partículas) (8.0×10^{-13} J/partícula), y se entrega a un volumen de 1.50 cm² de área y 0.7 mm de grosor. Por tanto,

$$\text{Dosis} = \frac{\text{energía}}{\text{masa}} = \frac{(2.34 \times 10^{10})(8.0 \times 10^{-13}\ \text{J})}{(950\ \text{kg/m}^3)(0.070 \times 1.5 \times 10^{-6}\ \text{m}^3)} = 188\ \text{Gy} = 1.9 \times 10^2\ \text{Gy}$$

$$\text{Dosis efectiva} = (Q)(\text{dosis}) = (14)(188) = 2.6 \times 10^3\ \text{Sv}$$

PROBLEMAS COMPLEMENTARIOS

46.14 [II] Considere la siguiente reacción de fisión:

$$\begin{array}{ccccccccccc} {}^{1}_{0}n & + & {}^{235}_{92}\text{U} & \rightarrow & {}^{138}_{56}\text{Ba} & + & {}^{93}_{41}\text{Nb} & + & 5\,{}^{1}_{0}n & + & 5\,{}^{0}_{-1}e \\ 1.008\,7 & & 235.043\,9 & & 137.905\,0 & & 92.906\,0 & & 1.008\,7 & & 0.000\,55 \end{array}$$

donde se dan las masas atómicas neutras. ¿Cuánta energía se libera cuando *a*) 1 átomo experimenta este tipo de fisión y *b*) 1.0 kg de átomos experimenta fisión? **Resp.** *a*) 182 MeV; *b*) 7.5×10^{13} J.

46.15 [II] Se propone utilizar la reacción de fusión nuclear

$$\begin{array}{ccc} 2\,{}^{2}_{1}\text{H} & \rightarrow & {}^{4}_{2}\text{He} \\ 2.014\,102 & & 4.002\,604 \end{array}$$

para producir potencia industrial (se dan las masas atómicas neutras). Si la potencia debe ser de 150 MW y la energía de la reacción se utilizará con 30% de eficiencia, ¿cuántos gramos de combustible de deuterio se necesitarán por día? **Resp.** *75* g/día.

46.16 [II] Una de las reacciones de fusión más prometedoras para generar potencia involucra deuterio (^{2}H) y tritio (^{3}H):

$$\begin{array}{ccccccc} {}^{2}_{1}\text{H} & + & {}^{3}_{1}\text{H} & \rightarrow & {}^{4}_{2}\text{He} & + & {}^{1}_{0}n \\ 2.014\,10 & & 3.016\,05 & & 4.002\,60 & & 1.008\,67 \end{array}$$

donde las masas atómicas que incluyen electrones son las que se indican. ¿Cuánta energía se produce cuando 2.0 kg de ^{2}H se fusionan con 3.0 kg de ^{3}H para formar ^{4}He? **Resp.** 1.70×10^{15} J.

46.17 [I] ¿Cuál es la EC promedio de un neutrón en el centro del Sol, donde la temperatura es de aproximadamente 10^7 K? Dé su respuesta a dos cifras significativas. **Resp.** 1.3 keV.

46.18 [II] Encuentre la energía liberada cuando dos deuterones (${}^{2}_{1}$H, masa atómica = 2.014 10 u) se fusionan para formar ${}^{3}_{2}$He (masa atómica = 3.016 03 u) con la emisión de un neutrón. Dé su respuesta a tres cifras significativas. **Resp.** 3.27 Mev.

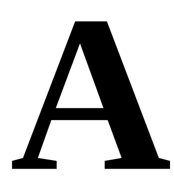
46.19 [II] La brea encontrada en un recipiente antiguo tiene una actividad de ^{14}C que es sólo más o menos 4.00% de la que se encuentra en la madera nueva de la misma densidad. ¿Cuál es la edad aproximada de la brea? **Resp.** 26.6×10^3 años.

46.20 [II] El rubidio 87 tiene una vida media de 4.9×10^{10} años y decae a estroncio 87, que es estable. En una roca antigua, la razón del ^{87}Sr a ^{87}Rb es de 0.005 0. Si se supone que todo el estroncio viene del decaimiento del rubidio, ¿aproximadamente qué tan antigua es la piedra? Repita si la razón es de 0.210. **Resp.** 3.5×10^8 años, 1.35×10^{10} años.

46.21 [II] La carátula luminosa de un antiguo reloj emite 130 electrones rápidos cada minuto. Suponga que cada electrón tiene una energía de 0.50 MeV y deposita dicha energía en un volumen de piel que tiene 2.0 cm^2 de área y 0.20 cm de espesor. Encuentre la dosis (en Gy y rd) que recibe el volumen en 1.0 día. Tome la densidad de la piel como 900 kg/m^3. **Resp.** 42 μGy, 4.2 mrd.

46.22 [II] Un haz de partículas alfa entra a un colector de carga y se mide que transporta 2.0×10^{-14} C de carga dentro del colector cada segundo. El haz tiene un área en su sección transversal de 150 mm^2 y penetra la piel humana a una profundidad de 0.14 mm. Cada partícula tiene una energía inicial de 4.0 MeV. El Q para tales partículas es de aproximadamente 15. ¿Cuál es la dosis efectiva, en Sv y en rem, que recibe la piel de una persona cuando se expone a este haz durante 20 s? Tome ρ = 900 kg/m^3 para la piel. **Resp.** 0.63 Sv, 63 rem.

APÉNDICE



CIFRAS SIGNIFICATIVAS

INTRODUCCIÓN: El valor numérico de toda medición es una aproximación. Considere que la longitud de un objeto se registró como 15.7 cm. Por convención, esto significa que la longitud se midió al décimo de centímetro *más cercano* y que su valor exacto cae entre 15.65 y 15.75 cm. Si esta medición fuera exacta a la centésima de centímetro más cercana, se habría registrado como 15.70 cm. El valor 15.7 cm representa *tres cifras significativas* (1, 5, 7), mientras que el valor 15.70 representa *cuatro cifras significativas* (1, 5, 7, 0). Una cifra significativa es aquella que se sabe es razonablemente confiable.

De manera semejante, una masa registrada de 3.406 2 kg significa que la masa se determinó a la décima de gramo más cercana y representa cinco cifras significativas (3, 4, 0, 6, 2); la última cifra (2) es razonablemente correcta y garantiza la certeza de las cuatro cifras precedentes.

LOS CEROS pueden ser significativos o pueden servir tan sólo para localizar el punto decimal. Los ceros a la izquierda de la posición normal del punto decimal (en números como 100, 2 500, 40, etc.) se tomarán como significativos. Por ejemplo, la expresión de que un cuerpo de mineral pesa 9 800 N indicará el sobreentendido de que la medida que se conoce el peso hasta el newton más cercano: en este caso se tienen cuatro cifras significativas. De manera alternativa, si se pesó a la centena de newton más cercana, el peso contiene sólo dos cifras significativas (9, 8) y se puede escribir exponencialmente como 9.8×10^3 N. Si se pesó a la decena de newton más cercana, el peso debe escribirse como 9.80×10^3 N, que muestra tres cifras significativas. Si el objeto se pesa al newton más cercano, el peso también se puede escribir como 9.800×10^3 N (cuatro cifras significativas). Desde luego, si un cero está entre dos cifras significativas, es en sí mismo significativo. Los ceros que se encuentran a la derecha inmediata del punto decimal son significativos sólo cuando hay una cifra distinta de cero a la izquierda del decimal. De este modo, los números 0.001, 0.001 0, 0.001 00 y 1.001 tienen una, dos, tres y cuatro cifras significativas, respectivamente.

REDONDEO: Un número se redondea al número deseado de cifras significativas haciendo ceros uno o más dígitos a la derecha. Cuando el primer dígito que se hace cero es menor que 5, el último dígito retenido quedará sin cambio; cuando es mayor que o igual a 5, se suma 1 al último dígito retenido.

SUMA Y RESTA: El resultado de la suma o resta se debe redondear, de manera que sólo se retengan dígitos hasta la primera columna que contenga cifras estimadas. (Recuerde que la última cifra significativa es estimada.) En otras palabras, la respuesta debe tener el mismo número de cifras a la derecha del punto decimal como la que tiene el número conocido con menos precisión de los que se suman o restan.

Ejemplos: Sume las siguientes cantidades expresadas en metros.

a)	*b*)	*c*)	*d*)
25.340	58.0	4.20	415.5
5.465	0.003 8	1.652 3	3.64
0.322	0.000 01	0.015	0.238
31.127 m (*Resp.*)	58.003 81	5.867 3	419.378
	= 58.0 m (*Resp.*)	= 5.87 m (*Resp.*)	= 419.4 m (*Resp.*)

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN: Aquí el resultado se debe redondear para que contenga sólo tantas cifras significativas como las que están contenidas en el factor menos exacto.

Sin embargo, hay excepciones. Considere la división $9.84 \div 9.3 = 1.06$, a tres cifras. Por la regla anterior, el resultado debe ser 1.1 (dos cifras significativas). Sin embargo, una diferencia de 1 en el último lugar de 9.3 (9.3 ± 0.1) daría por resultado un error aproximado de 1%, mientras que la diferencia de 1 en el último lugar de 1.1 (1.1 ± 0.1) daría un error de aproximadamente 10%. En consecuencia, la respuesta 1.1 tiene un porcentaje de exactitud mucho

más bajo que 9.3. Por tanto, en este caso el resultado debe ser 1.06, ya que una diferencia de 1 en el último lugar del factor menos exacto usado en el cálculo (9.3) daría un porcentaje de error aproximadamente igual (1%) que la diferencia de 1 en el último lugar de 1.06 (1.06 ± 0.01). De manera similar, $0.92 \times 1.13 = 1.04$. No se preocupe de tales excepciones.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: Como regla, los valores de los senos, cosenos, tangentes, etcétera, deben tener el mismo número de cifras significativas que sus argumentos. Por ejemplo, sen 35° = 0.57, mientras que sen 35.0° = 0.574.

EJERCICIOS

1 [I] ¿Cuántas cifras significativas se dan en las siguientes cantidades?

a) 454 g
b) 2.2 N
c) 2.205 N
d) 0.393 7 s
e) 0.035 3 m
f) 1.008 0 hr
g) 14.0 A
h) 9.3×10^7 km
i) 1.118×10^{-3} V
j) 1 030 kg/m^3
k) 125 000 N

Resp. *a*) 3 *b*) 2 *c*) 4 *d*) 4 *e*) 3 *f*) 5 *g*) 3 *h*) 2 *i*) 4 *j*) 4 *k*) 6

2 [I] Sume:

a) 703 h	*b*) 18.425 cm	*c*) 0.003 5 s	*d*) 4.0 N
7 h	7.21 cm	0.097 s	0.632 N
0.66 h	5.0 cm	0.225 s	0.148 N

Resp. *a*) 711 h, *b*) 30.6 cm, *c*) 0.326 s, *d*) 4.8 N

3 [I] Reste:

a) 7.26 J	*b*) 562.4 m	*c*) 34 kg
0.2 J	16.8 m	0.2 kg

Resp. *a*) 7.1 J, *b*) 545.6 m, *c*) 34 kg

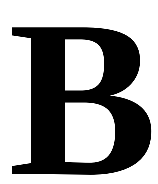
4 [I] Multiplique: *a*) 2.21×0.3 *b*) 72.4×0.084 *c*) 2.02×4.113 *d*) 107.88×0.610 *e*) 12.4×84.0 *f*) 72.4×8.6

Resp. *a*) 0.7 *b*) 6.1 *c*) 8.31 *d*) 65.8 *e*) 1.04×10^3 *f*) 6.2×10^2

5 [I] Divida: *a*) $\frac{97.52}{2.54}$ *b*) $\frac{14.28}{0.714}$ *c*) $\frac{0.032}{0.004}$ *d*) $\frac{9.80}{9.30}$

Resp. *a*) 38.4, *b*) 20.0, *c*) 8, *d*) 1.05

APÉNDICE



TRIGONOMETRÍA QUE SE REQUIERE PARA FÍSICA UNIVERSITARIA

FUNCIONES DE UN ÁNGULO AGUDO: Las funciones trigonométricas que se utilizan con más frecuencia son seno, coseno y tangente. Es conveniente establecer las definiciones de las funciones de un ángulo agudo en términos de los lados de un triángulo rectángulo.

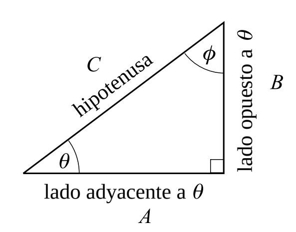
En cualquier triángulo rectángulo, el **seno** de cada ángulo agudo es igual a la longitud del lado opuesto a dicho ángulo dividido entre la longitud de la hipotenusa. El **coseno** de cualquier ángulo es igual a la longitud del lado adyacente a dicho ángulo, dividida entre la longitud de la hipotenusa. La **tangente** de cualquier ángulo agudo es igual a la longitud del lado opuesto a dicho ángulo dividido entre la longitud del lado adyacente a ese ángulo.

Si θ y ϕ son los ángulos agudos de cualquier triángulo rectángulo y A, B y C son los lados, como se muestra en el diagrama, entonces

$$\text{sen}\,\theta \;2\; \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} \;2\; \frac{B}{C} \qquad \text{sen}\,\phi \;2\; \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} \;2\; \frac{A}{C}$$

$$\cos\theta \;2\; \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} \;2\; \frac{A}{C} \qquad \cos\phi \;2\; \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} \;2\; \frac{B}{C}$$

$$\tan\theta \;2\; \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} \;2\; \frac{B}{A} \qquad \tan\phi \;2\; \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} \;2\; \frac{A}{B}$$



Note que sen $\theta = \cos\phi$; por tanto, el seno de cualquier ángulo es igual al coseno de su ángulo complementario. Por ejemplo,

$$\text{sen}\,30° = \cos(90° - 30°) = \cos 60° \qquad \cos 50° = \text{sen}(90° - 50°) = \text{sen}\,40°$$

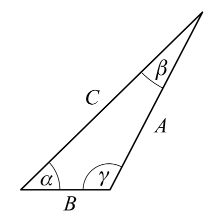
Conforme un ángulo se incrementa de 0° a 90°, su seno aumenta de 0 a 1, su tangente aumenta de 0 al infinito y su coseno disminuye de 1 a 0.

LEYES DE LOS SENOS Y LOS COSENOS: Estas dos leyes dan las relaciones entre los lados y los ángulos de *cualqier* triángulo plano. En cualquier triángulo plano con ángulo α, β y γ, y lados opuestos A, B y C, respectivamente, se aplican las siguientes relaciones:

Ley de los senos

$$\frac{A}{\text{sen}\,\alpha} \;2\; \frac{B}{\text{sen}\,\beta} \;2\; \frac{C}{\text{sen}\,\gamma}$$

o bien $$\frac{A}{B} \;2\; \frac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} \qquad \frac{B}{C} \;2\; \frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma} \qquad \frac{C}{A} \;2\; \frac{\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\alpha}$$



Ley de los cosenos

$$A^2 \;2\; B^2 \;.\; C^2 - 2BC\,\cos\alpha$$
$$B^2 \;2\; A^2 \;.\; C^2 - 2AC\,\cos\beta$$
$$C^2 \;2\; A^2 \;.\; B^2 - 2AB\,\cos\gamma$$

Si el ángulo θ está entre 90° y 180°, como en el caso del ángulo C en el diagrama anterior, entonces

$$\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,(180° - \theta) \qquad \text{y} \qquad \cos\theta = -\cos\,(180° - \theta)$$

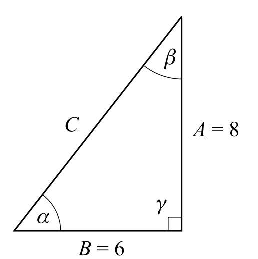
Entonces $$\text{sen } 120° = \text{sen}(180° - 120°) = \text{sen } 60° = 0.866$$

$$\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -0.500$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1 [I] En el triángulo rectángulo *ABC*, dados $A = 8$, $B = 6$, $\gamma = 90°$, encuentre los valores del seno, coseno y tangente del ángulo α y del ángulo β.

$$C = \sqrt{8.0^2 + 6.0^2} = \sqrt{100} = 10$$



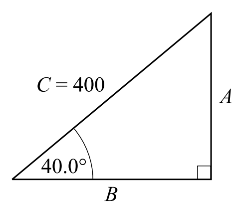
$$\text{sen } \alpha \ 2 \ A/C \ 2 \ 8.0/10 \ 2 \ 0.80 \qquad \text{sen } \beta \ 2 \ B/C \ 2 \ 6.0/10 = 0.60$$

$$\cos \alpha \ 2 \ B/C \ 2 \ 6.0/10 = 0.60 \qquad \cos \beta = A/C \ 2 \ 8.0/10 \ 2 \ 0.80$$

$$\tan \alpha \ 2 \ A/B \ 2 \ 8.0/6.0 \ 2 \ 1.3 \qquad \tan \beta \ 2 \ B/A \ 2 \ 6.0/8.0 \ 2 \ 0.75$$

2 [I] Dado un triángulo rectángulo con un ángulo agudo de 40° y una hipotenusa de 400, encuentre los otros lados y ángulos.

$$\text{sen}\,40.05 \ 2 \ \frac{A}{400} \qquad \text{y} \qquad \cos 40.05 \ 2 \ \frac{B}{400}$$



Por medio de una calculadora, se encuentra que sen 40.0° = 0.642 8 y cos 40° = 0.766 0. Entonces

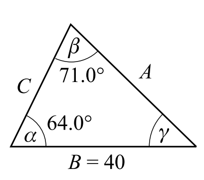
$$a \ 2 \ 400 \ \text{sen}\,40.05 \ 2 \ 400(0.642\,8) \ 2 \ 257$$
$$b \ 2 \ 400 \ \cos 40.05 \ 2 \ 400(0.766\,0) \ 2 \ 306$$
$$B \ 2 \ 90.05 - 40.05 \ 2 \ 50.05$$

3 [II] Dado el triángulo *ABC* con $\alpha = 64.0°$, $\beta = 71.0°$, $B = 40.0°$, encuentre *A* y *C*.

$$\gamma = 180.0° - (\alpha + \beta) = 180.0° - (64.0° + 71.0°) = 45.0°$$

Por la ley de los senos,

$$\frac{A}{\text{sen}\,\alpha} \ 2 \ \frac{B}{\text{sen}\,\beta} \qquad \frac{C}{\text{sen}\,\gamma} \ 2 \ \frac{B}{\text{sen}\,\beta}$$



entonces $$A \ 2 \ \frac{B\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} \ 2 \ \frac{40.0\,\text{sen}\,64.05}{\text{sen}\,71.05} \ 2 \ \frac{40.0(0.898\,8)}{0.945\,5} \ 2 \ 38.0$$

y $$C \ 2 \ \frac{B\,\text{sen}\,\gamma}{\text{sen}\,\beta} \ 2 \ \frac{40.0\,\text{sen}\,45.05}{\text{sen}\,71.05} \ 2 \ \frac{40.0(0.707\,1)}{0.945\,5} \ 2 \ 29.9$$

4 [I] *a*) Si cos $\alpha = 0.438$, encuentre α al grado más cercano. *b*) Si sen $\beta = 0.800\,0$, encuentre β a la décima de grado más cercana. *c*) Si cos $\gamma = 0.712\,0$, encuentre γ a la décima de grado más cercana.

a) En su calculadora use las teclas del inverso y coseno para obtener $\alpha = 64°$; o si tiene una tecla de $\cos^{-1}$, úsela.

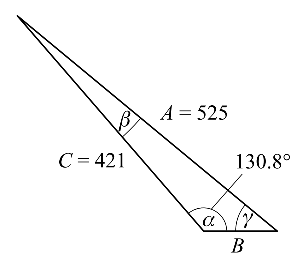
b) Introduzca 0.800 0 en su calculadora y use las teclas del inverso y de seno para obtener $\beta = 53.1°$.

c) Use su calculadora como en *a*) para obtener 44.6°.

5 [II] Dado el triángulo *ABC* con $\alpha = 130.8°$, $A = 525$, $C = 421$, encuentre B, β y γ.

$$\text{sen } 130.8° = \text{sen } (180° - 130.8°) = \text{sen } 49.2° = 0.757$$

La mayoría de las calculadoras portátiles dan el seno de 130.8° directamente.



Para γ: $$\text{sen}\gamma \;2\; \frac{C \text{ sen } \alpha}{A} \;2\; \frac{421 \text{ sen } 30.85}{525} \;2\; \frac{421(0.757)}{525} \;2\; 0.607$$

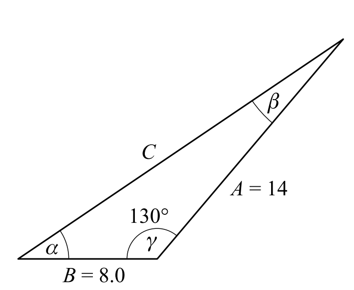
de donde $\gamma = 37.4°$.

Para β: $\beta = 180° - (\gamma + \alpha) = 180° - (37.4° + 130.8°) = 11.8°$

Para B: $$B \;2\; \frac{A \text{ sen } \beta}{\text{sen } \alpha} \;2\; \frac{525 \text{ sen } 11.85}{\text{sen } 130.85} \;2\; \frac{525(0.204)}{0.757} \;2\; 142$$

6 [II] Dado el triángulo *ABC* con $A = 14$, $B = 8.0$, $\gamma = 130°$, encuentre C, α y β.

$$\cos 130° = -\cos (180° - 130°) = -\cos 50° = -0.64$$



Para C: Por la ley de los cosenos,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos 130°$$
$$= 14^2 + 8.0^2 - 2(14)(8.0)(-0.643) = 404$$

y $C = \sqrt{404} = 20$.

Para α: Por la ley de los senos,

$$\text{sen } \alpha \;2\; \frac{A \text{ sen } \gamma}{C} \;2\; \frac{14(0.766)}{20.1} \;2\; 0.533$$

y $\alpha = 32°$.

Para β: $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (32° + 130°) = 18°$

EJERCICIOS

7 Determine los lados y ángulos no especificados de los siguientes triángulos rectángulos *ABC*, con $\gamma = 90°$.

a) $\alpha = 23.3°$, $C = 346$
b) $\beta = 49.2°$, $B = 222$
c) $\alpha = 66.6°$, $A = 113$
d) $A = 25.4$, $B = 38.2$
e) $B = 673$, $C = 888$

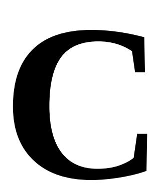
Resp. *a*) $\beta = 66.7°$, $A = 137$, $B = 318$
b) $\alpha = 40.8°$, $A = 192$, $C = 293$
c) $\beta = 23.4°$, $B = 48.9$, $C = 123$
d) $\alpha = 33.6°$, $\beta = 56.4°$, $C = 45.9$
e) $\alpha = 40.7°$, $\beta = 49.3°$, $A = 579$

8 Determine los lados y ángulos no especificados de los siguientes triángulos oblicuos *ABC*.

a) $A = 125$, $\alpha = 54.6°$, $\beta = 65.2°$
b) $B = 321$, $\alpha = 75.3°$, $\gamma = 38.5°$
c) $B = 215$, $C = 150$, $\beta = 42.7°$
d) $A = 512$, $B = 426$, $\alpha = 48.8°$
e) $B = 50.4$, $C = 33.3$, $\beta = 118.5°$
f) $B = 120$, $C = 270$, $\alpha = 118.7°$
g) $A = 24.5$, $B = 18.6$, $C = 26.4$
h) $A = 6.34$, $B = 7.30$, $C = 9.98$

Resp. *a*) $B = 139$, $C = 133$, $\gamma = 60.2°$
b) $A = 339$, $C = 218$, $\beta = 66.2°$
c) $A = 300$, $\alpha = 109.1°$, $\gamma = 28.2°$
d) $C = 680$, $\beta = 38.8°$, $\gamma = 92.4°$
e) $A = 25.1$, $\alpha = 26.0°$, $\gamma = 35.5°$
f) $A = 344$, $\beta = 17.8°$, $\gamma = 43.5°$
g) $\alpha = 63.2°$, $\beta = 42.7°$, $\gamma = 74.1°$
h) $\alpha = 39.3°$, $\beta = 46.9°$, $\gamma = 93.8°$

APÉNDICE



EXPONENTES

POTENCIAS DE 10: La siguiente es una lista parcial de potencias de 10 (vea también el apéndice E).

$$10^0 = 1 \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$$
$$10^1 = 10 \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$10^2 = 10 \times 10 = 100 \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$
$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000 \qquad 10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10\ 000} = 0.000\,1$$
$$10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$$
$$10^5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100\,000$$
$$10^6 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 1\,000\,000$$

En la expresión 10^5, la *base* es 10 y el *exponente* es 5.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN: En la multiplicación, los exponentes con la misma base se suman:

$$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8 \qquad 10^7 \times 10^{-3} = 10^{7-3} = 10^4$$
$$10^2 \times 10^3 = 10^{2+3} = 10^5 \qquad (4 \times 10^4)(2 \times 10^{-6}) = 8 \times 10^{4-6} = 8 \times 10^{-2}$$
$$10 \times 10 = 10^{1+1} = 10^2 \qquad (2 \times 10^5)(3 \times 10^{-2}) = 6 \times 10^{5-2} = 6 \times 10^3$$

En la división, exponentes de la misma base se restan:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2 \qquad \frac{8 \times 10^2}{2 \times 10^{-6}} = \frac{8}{2} \times 10^{2+6} = 4 \times 10^8$$
$$\frac{10^2}{10^5} = 10^{2-5} = 10^{-3} \qquad \frac{5.6 \times 10^{-2}}{1.6 \times 10^4} = \frac{5.6}{1.6} \times 10^{-2-4} = 3.5 \times 10^{-6}$$

NOTACIÓN CIENTÍFICA: Cualquier número se puede expresar como una potencia entera de 10, o como el producto de dos números, uno de los cuales es una potencia entera de 10. Por ejemplo,

$$2806 = 2.806 \times 10^3 \qquad 0.045\,4 = 4.54 \times 10^{-2}$$
$$22\,406 = 2.240\,6 \times 10^4 \qquad 0.000\,06 = 6 \times 10^{-5}$$
$$454 = 4.54 \times 10^2 \qquad 0.003\,06 = 3.06 \times 10^{-3}$$
$$0.454 = 4.54 \times 10^{-1} \qquad 0.000\,000\,5 = 5 \times 10^{-7}$$

OTRAS OPERACIONES: Cualquier expresión diferente de cero con exponente cero es igual a 1. Por tanto,

$$a^0 = 1 \qquad 10^0 = 1 \qquad (3 \times 10)^0 = 1 \qquad 8.2 \times 10^0 = 8.2$$

Una potencia puede transferirse del numerador al denominador de una fracción, o viceversa, al cambiar el signo del exponente. Por ejemplo,

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} \qquad 5 \times 10^{-3} = \frac{5}{10^3} \qquad \frac{7}{10^{-2}} = 7 \times 10^2 \qquad -5a^{-2} = -\frac{5}{a^2}$$

El significado de un exponente fraccional se ilustra como sigue:

$$10^{2/3} = \sqrt[3]{10^2} \qquad 10^{3/2} = \sqrt{10^3} \qquad 10^{1/2} = \sqrt{10} \qquad 4^{3/2} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Para elevar una potencia a una potencia, se multiplican los exponentes:

$$(10^3)^2 = 10^{3\times 2} = 10^6 \qquad (10^{-2})^3 = 10^{-2\times 3} = 10^{-6} \qquad (a^3)^{-2} = a^{-6}$$

Para sacar raíz cuadrada se divide el exponente entre 2. Si el exponente es un número non, primero se deberá incrementar o disminuir en 1 y ajustar el coeficiente en concordancia. Para obtener la raíz cúbica, divida el exponente entre 3. Los coeficientes se tratan en forma independiente. Así que,

$$\sqrt{9 \times 10^4} = 3 \times 10^2 \qquad \sqrt{4.9 \times 10^{-5}} = \sqrt{49 \times 10^{-6}} = 7.0 \times 10^{-3}$$

$$\sqrt{3.6 \times 10^7} = \sqrt{36 \times 10^6} = 6.0 \times 10^3 \qquad \sqrt[3]{1.25 \times 10^8} = \sqrt[3]{125 \times 10^6} = 5.00 \times 10^2$$

La mayoría de las calculadoras de bolsillo obtienen raíz cuadrada directamente. La raíz cúbica y otras raíces se obtienen fácilmente utilizando la tecla y^x.

EJERCICIOS

1 [I] Exprese lo siguiente en potencias de 10.

a) 326 *b*) 32 608 *c*) 1006 *d*) 36 000 008 *e*) 0.831 *f*) 0.03 *g*) 0.000 002 *h*) 0.000 706 *i*) $\sqrt{0.000\,081}$ *j*) $\sqrt[3]{0.000\,027}$

Resp. *a*) 3.26×10^2 *b*) $3.260\,8 \times 10^4$ *c*) 1.006×10^3 *d*) $3.600\,000\,8 \times 10^7$ *e*) 8.31×10^{-1} *f*) 3×10^{-2} *g*) 2×10^{-6} *h*) 7.06×10^{-4} *i*) 9.0×10^{-3} *j*) 3.0×10^{-2}

2 [I] Evalúe las siguientes operaciones y exprese los resultados en potencias de 10.

a) 1500×260

b) $220 \times 35\,000$

c) $40 \div 20\,000$

d) $82\,800 \div 0.12$

e) $\dfrac{1.728 \times 17.28}{0.000\ 172\ 8}$

f) $\dfrac{(16\,000)(0.000\,2)(1.2)}{(2000)(0.006)(0.000\,32)}$

g) $\dfrac{0.004 \times 32\,000 \times 0.6}{6400 \times 3000 \times 0.08}$

h) $(\sqrt{14\,400})(\sqrt{0.000\,025})$

i) $(\sqrt[3]{2.7 \times 10^7})(\sqrt[3]{1.25 \times 10^{-4}})$

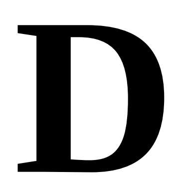
j) $(1 \times 10^{-3})(2 \times 10^5)^2$

k) $\dfrac{(3 \times 10^2)^3(2 \times 10^{-5})^2}{3.6 \times 10^{-8}}$

l) $8(2 \times 10^{-2})^{-3}$

Resp. *a*) 3.90×10^5 *b*) 7.70×10^6 *c*) 2.0×10^{-3} *d*) 6.9×10^5 *e*) 1.728×10^5 *f*) 1×10^3 *g*) 5×10^{-5} *h*) 6.0×10^{-1} *i*) 1.5×10^1 *j*) 4×10^7 *k*) 3×10^5 *l*) 1×10^6

APÉNDICE



LOGARITMOS

EL LOGARITMO BASE 10 de un número es el exponente o potencia a la cual se debe elevar 10 para obtener el número. Ya que 1 000 es 10^3, el logaritmo base 10 de 1 000 (se escribe log 1 000) es 3. De manera similar, log 10 000 $= 4$, $\log 10 = 1$, $\log 0.1 = -1$ y $\log 0.001 = -3$.

La mayoría de las calculadoras de bolsillo tienen una tecla log. Cuando un número se introduce en la calculadora, su logaritmo de base 10 se puede obtener presionando la tecla log. De esta forma se encuentra que $\log 50 = 1.698\ 97$ y $\log 0.035 = -1.455\ 93$. Además, $\log 1 = 0$, lo que refleja el hecho de que $10^0 = 1$.

LOS LOGARITMOS NATURALES se toman considerando la base $e = 2.718$, en lugar de la de 10. Éstos se determinan en las calculadoras presionando la tecla ln. Ya que $e^0 = 1$, se tiene que $\ln 1 = 0$.

Ejemplos:

$$\log 971 = 2.987\,2 \qquad \ln 971 = 6.878\,3$$
$$\log 9.71 = 0.987\,2 \qquad \ln 9.71 = 2.273\,2$$
$$\log 0.097\,1 = -1.012\,8 \qquad \ln 0.097\,1 = -2.332\,0$$

Ejercicios: Encuentre los logaritmos base 10 de los siguientes números.

a)	454	*f*)	0.621
b)	5 280	*g*)	0.946 3
c)	96 500	*h*)	0.035 3
d)	30.48	*i*)	0.002 2
e)	1.057	*j*)	0.000 264 5

Resp.

a)	2.657 1	*f*)	−0.206 9
b)	3.722 6	*g*)	−0.023 97
c)	4.984 5	*h*)	−1.452 2
d)	1.484 0	*i*)	−2.657 6
e)	0.024 1	*j*)	−3.577 6

ANTILOGARITMOS: Suponga que tiene una ecuación tal que $3.5 = 10^{0.544}$; entonces se sabe que 0.544 es el log de base 10 de 3.5. O, a la inversa, se puede decir que 3.5 es el *antilogaritmo* (o *logaritmo inverso*) de 0.544. Determinar el antilogaritmo de un número es simple con la mayoría de las calculadoras: simplemente se introduce el número, luego se presiona la tecla de inverso y después la tecla log. Si es en base *e* en lugar de 10, se presionan las teclas inverso y ln.

Ejercicios: Encuentre los números correspondientes a los siguientes logaritmos.

a)	3.156 8	*f*)	0.914 2
b)	1.693 4	*g*)	0.000 8
c)	5.693 4	*h*)	−0.249 3
d)	2.500 0	*i*)	−1.996 5
e)	2.043 6	*j*)	−2.799 4

Resp. *a*) 1 435 *f*) 8.208
b) 49.37 *g*) 1.002
c) 4.937×10^5 *h*) 0.563 2
d) 316.2 *i*) 0.010 08
e) 110.6 *j*) 0.001 587

PROPIEDADES BÁSICAS DE LOS LOGARITMOS: Ya que los logaritmos son exponentes, todas las propiedades de los exponentes son también propiedades de los logaritmos.

1) El logaritmo del producto de dos números es la suma de sus logaritmos. Por tanto,

$$\log ab = \log a + \log b \qquad \log (5\,280 \times 48) = \log 5\,280 + \log 48$$

2) El logaritmo del cociente de dos números es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador. Por ejemplo,

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \qquad \log \frac{536}{24.5} = \log 536 - \log 24.5$$

3) El logaritmo de la n-ésima potencia de un número es n veces el logaritmo del número. Por tanto,

$$\log a^n = n \log a \qquad \log (4.28)^3 = 3 \log 4.28$$

4) El logaritmo de la raíz n-ésima de un número es $1/n$ veces el logaritmo del número. Por tanto,

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a \qquad \log \sqrt{32} = \frac{1}{2} \log 32 \qquad \log \sqrt[3]{792} = \frac{1}{3} \log 792$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1 [I] Use una calculadora manual para evaluar *a*) $(5.2)^{0.4}$, *b*) $(6.138)^3$, *c*) $\sqrt[3]{5}$, *d*) $(7.25 \times 10^{-11})^{0.25}$.

a) Introduzca 5.2; presione la tecla y^x; introduzca 0.4; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 1.934.

b) Introduzca 6.138; presione la tecla y^x; introduzca 3; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 231.2.

c) Introduzca 5; presione la tecla y^x; introduzca 0.333 3; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 1.710.

d) Introduzca 7.25×10^{-11}; presione la tecla y^x; introduzca 0.25; presione la tecla =. La respuesta en la pantalla es 2.918×10^{-3}.

EJERCICIOS

2 [I] Evalúe cada una de la siguientes operaciones:

1) $28.32 \times 0.082\,54$

2) $573 \times 6.96 \times 0.004\,81$

3) $\dfrac{79.28}{63.57}$

4) $\dfrac{65.38}{225.2}$

5) $\dfrac{1}{239}$

6) $\dfrac{0.572 \times 31.8}{96.2}$

7) $47.5 \times \dfrac{779}{760} \times \dfrac{273}{300}$

8) $(8.642)^2$

9) $(0.086\,42)^2$

10) $(11.72)^3$

11) $(0.052\,3)^3$

12) $\sqrt{9463}$

13) $\sqrt{946.3}$

14) $\sqrt{0.006\,61}$

15) $\sqrt[3]{1.79}$

16) $\sqrt[4]{0.182}$

17) $\sqrt{643} \times (1.91)^3$

18) $(8.73 \times 10^{-2})(7.49 \times 10^{6})$

19) $(3.8 \times 10^{-5})^2(1.9 \times 10^{-5})$

20) $\dfrac{8.5 \times 10^{-45}}{1.6 \times 10^{-22}}$

21) $\sqrt{2.54 \times 10^{6}}$

22) $\sqrt{9.44 \times 10^{5}}$

23) $\sqrt{7.2 \times 10^{-13}}$

24) $\sqrt[3]{7.3 \times 10^{-14}}$

25) $\sqrt{\dfrac{(1.1 \times 10^{-23})(6.8 \times 10^{-2)}}{1.4 \times 10^{-24}}}$

26) $2.04 \log 97.2$

27) $37 \log 0.029\,8$

28) $6.30 \log (2.95 \times 10^{3})$

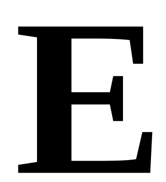
29) $8.09 \log (5.68 \times 10^{-16})$

30) $(2.00)^{0.714}$

Resp.

(1) 2.337	9) 0.007 467	17) 177	25) 0.73
(2) 19.2	10) 1611	18) 6.54×10^{5}	26) 4.05
(3) 1.247	11) 0.000 143	19) 2.7×10^{-14}	27) −56
(4) 0.290 2	12) 97.27	20) 5.3×10^{-23}	28) 21.9
(5) 0.004 18	13) 30.76	21) 1.59×10^{3}	29) −123
(6) 0.189	14) 0.081 3	22) 9.72×10^{2}	30) 1.64
(7) 44.3	15) 1.21	23) 8.5×10^{-7}	
(8) 74.67	16) 0.653	24) 4.2×10^{-5}	

APÉNDICE



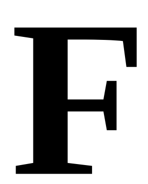
PREFIJOS PARA MÚLTIPLOS DE LAS UNIDADES DEL SI

Factor de multiplicación	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

EL ALFABETO GRIEGO

A	α	alfa	H	η	eta	N	ν	nu	T	τ	tau
B	β	beta	Θ	θ	theta	Ξ	ξ	xi	Υ	υ	úpsilon
Γ	γ	gamma	I	ι	iota	O	o	ómicron	Φ	ϕ	phi
Δ	δ	delta	K	κ	kappa	Π	π	pi	X	χ	chi
E	ϵ	épsilon	Λ	λ	lambda	P	ρ	rho	Ψ	ψ	psi
Z	ζ	zeta	M	μ	mu	Σ	σ	sigma	Ω	ω	omega

APÉNDICE



FACTORES PARA CONVERSIONES A UNIDADES DEL SI

Aceleración	1 pie/s^2 = 0.304 8 m/s^2
	g = 9.807 m/s^2
Área	1 acre = 4 047 m^2
	1 pie^2 = 9.290 × 10^{-2} m^2
	1 pulg^2 = 6.45 × 10^{-4} m^2
	1 mi^2 = 2.59 × 10^{6}m^2
Densidad	1 g/cm^3 = 10^3 kg/m^3
Energía	1 Btu = 1 054 J
	1 caloría (cal) = 4.184 J
	1 electrón volt (eV) = 1.602 × 10^{-19} J
	1 pie libra(pie · lb) = 1.356 J
	1 kilowatt-hora (kW · h) = 3.60 × 10^6 J
Fuerza	1 dina = 10^{-5} N
	1 lb = 4.448 N
Longitud	1 angstrom (Å) = 10^{-10} m
	1 pie = 0.304 8 m
	1 pulg = 2.54 × 10^{-2} m
	1 año luz = 9.461 × 10^{15} m
	1 milla = 1 609 m
Masa	1 unidad de masa atómica (u) = 1.660 6 × 10^{-27} kg
	1 gramo = 10^{-3} kg
Potencia	1 Btu/s = 1 054 W
	1 cal/s = 4.184 W
	1 pie · lb/s = 1.356 W
	1 caballo de fuerza (hp) = 746 W
Presión	1 atmósfera (atm) = 1.013 × 10^5 Pa
	1 bar = 10^5 Pa
	1 cmHg = 1 333 Pa
	1 lb/pie^2 = 47.88 Pa
	1 lb/pulg^2 (psi) = 6895 Pa
	1 N/m^2 = 1 pascal (Pa)
	1 torr = 133.3 Pa
Rapidez	1 pie/s (fps) = 0.304 8 m/s
	1 km/h = 0.277 8 m/s
	1 mi/h (mph) = 0.447 04 m/s
Temperatura	$T_{\text{Kelvin}} = T_{\text{Celsius}} + 273.15$
	$T_{\text{Kelvin}} = \frac{5}{9}(T_{\text{Fahrenheit}} + 459.67)$
	$T_{\text{Celsius}} = \frac{5}{9}(T_{\text{Fahrenheit}} - 32)$
	$T_{\text{Kelvin}} = \frac{5}{9}T_{\text{Rankin}}$
Tiempo	1 día = 86 400 s
	1 año = 3.16 × 10^7 s
Volumen	1 pie^3 = 2.832 × 10^{-2} m^3
	1 galón (gal) = 3.785 × 10^{-3} m^3
	1 pulg^3 = 1.639 × 10^{-5} m^3
	1 litro = 10^{-3} m^3

APÉNDICE



CONSTANTES FÍSICAS

Rapidez de la luz en el espacio libre	c	$= 2.997\ 924\ 58 \times 10^{8}$ m/s
Aceleración debida a la gravedad (normal)	g	$= 9.807$ m/s^2
Constante de gravitación universal	G	$= 6.672\ 59 \times 10^{-11}$ N · m^2/kg^2
Constante de Coulomb	k_0	$= 8.988 \times 10^{9}$ N · m^2/C^2
Densidad del agua (máxima)		$= 0.999\ 972 \times 10^{3}$ kg/m^3
Densidad del mercurio (TPE)		$= 13.595 \times 10^{3}$ kg/m^3
Atmósfera estándar		$= 1.013\ 2 \times 10^{5}$ N/m^2
Volumen de gas ideal a TPE		$= 22.4$ m^3/kmol
Número de Avogadro	N_A	$= 6.022 \times 10^{26}$ kmol^{-1}
Constante universal de los gases	R	$= 8\ 314$ J/kmol · K
Punto de congelación		$= 273.15$ K
Equivalente mecánico del calor		$= 4.184$ J/cal
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$= 5.67 \times 10^{-8}$ W/m^2 · K^4
Constante de Planck	h	$= 6.626 \times 10^{-34}$ J · s
Faraday	F	$= 9.648\ 5 \times 10^{4}$ C/mol
Carga del electrón	e	$= 1.602\ 2 \times 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann	k_B	$= 1.38 \times 10^{-23}$ J/K
Razón de la carga a la masa del electrón	e/m_e	$= 1.758\ 8 \times 10^{11}$ C/kg
Masa del electrón	m_e	$= 9.109 \times 10^{-31}$ kg
Masa del protón	m_p	$= 1.672\ 6 \times 10^{-27}$ kg
Masa del neutrón	m_n	$= 1.674\ 9 \times 10^{-27}$ kg
Masa de la partícula alfa		$= 6.645 \times 10^{-27}$ kg
Unidad de masa atómica (1/12 de masa de ^{12}C)	u	$= 1.660\ 6 \times 10^{-27}$ kg
Energía en reposo de 1 u		$= 931.5$ MeV

APÉNDICE

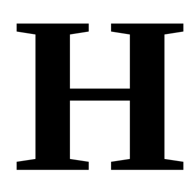


TABLA DE LOS ELEMENTOS

Las masas mencionadas se basan en ${}^{12}_{6}C = 12$ u. Un valor entre paréntesis es el número de masa del más estable (mayor vida) de los isótopos conocidos.

Elemento	Símbolo	Número atómico Z	Masa atómica promedio, u
Actinio	Ac	89	(227)
Aluminio	Al	13	26.981 5
Americio	Am	95	(243)
Antimonio	Sb	51	121.75
Argón	Ar	18	39.948
Arsénico	As	33	74.921 6
Ástato	At	85	(210)
Azufre	S	16	32.064
Bario	Ba	56	137.34
Berilio	Be	4	9.012 2
Berkelio	Bk	97	(247)
Bismuto	Bi	83	208.980
Bohrio	Bh	107	(264)
Boro	B	5	10.811
Bromo	Br	35	79.904
Cadmio	Cd	48	112.40
Calcio	Ca	20	40.08
Californio	Cf	98	(251)
Carbono	C	6	12.011 2
Cerio	Ce	58	140.12
Cesio	Cs	55	132.905
Cloro	Cl	17	35.453
Cobalto	Co	27	58.933 2
Cobre	Cu	29	63.546
Cromo	Cr	24	51.996
Curio	Cm	96	(247)
Darmstadtio	Ds	110	(281)
Disprosio	Dy	66	162.50
Dubnio	Db	105	(262)
Einstenio	Es	99	(254)
Erbio	Er	68	167.26
Escandio	Sc	21	44.956
Estaño	Sn	50	118.69
Estroncio	Sr	38	87.62
Europio	Eu	63	151.96
Fermio	Fm	100	(257)
Flúor	F	9	18.998 4
Fósforo	P	15	30.973 8
Francio	Fr	87	(223)
Gadolinio	Gd	64	157.25
Galio	Ga	31	69.72
Germanio	Ge	32	72.59
Hafnio	Hf	72	178.49
Hassio	Hs	108	(269)
Helio	He	2	4.002 6
Hidrógeno	H	1	1.008 0
Hierro	Fe	26	55.847
Holmio	Ho	67	164.930
Indio	In	49	114.82

Iridio	Ir	77	192.2
Iterbio	Yb	70	173.04
Itrio	Y	39	88.905
Kriptón	Kr	36	83.80
Lantano	La	57	138.91
Laurencio	Lr	103	(257)
Litio	Li	3	6.939
Lutecio	Lu	71	174.97
Magnesio	Mg	12	24.312
Manganeso	Mn	25	54.938 0
Meitnerio	Mt	109	(268)
Mendelevio	Md	101	(256)
Mercurio	Hg	80	200.59
Molibdeno	Mo	42	95.94
Neodimio	Nd	60	144.24
Neón	Ne	10	20.183
Neptunio	Np	93	(237)
Niobio	Nb	41	92.906
Níquel	Ni	28	58.71
Nitrógeno	N	7	14.006 7
Nobelio	No	102	(254)
Oro	Au	79	196.967
Osmio	Os	76	190.2
Oxígeno	O	8	15.999 4
Paladio	Pd	46	106.4
Plata	Ag	47	107.868
Platino	Pt	78	195.09
Plomo	Pb	82	207.19
Plutonio	Pu	94	(244)
Polonio	Po	84	(209)
Potasio	K	19	39.102
Praseodimio	Pr	59	140.907
Prometio	Pm	61	(145)
Protactinio	Pa	91	(231)
Radio	Ra	88	(226)
Radón	Rn	86	222
Renio	Re	75	186.2
Rodio	Rh	45	102.905
Roentgenio	Rg	111	(272)
Rubidio	Rb	37	85.47
Rutenio	Ru	44	101.07
Rutherfordio	Rf	104	(261)
Samario	Sm	62	150.35
Seaborgio	Sg	106	(266)
Selenio	Se	34	78.96
Silicio	Si	14	28.086
Sodio	Na	11	22.989 8
Talio	Tl	81	204.37
Tántalo	Ta	73	180.948
Tecnecio	Tc	43	(97)
Telurio	Te	52	127.60
Terbio	Tb	65	158.924
Titanio	Ti	22	47.90
Torio	Th	90	232.038 1
Tulio	Tm	69	168.934
Tungsteno	W	74	183.85
Uranio	U	92	238.03
Vanadio	V	23	50.942
Xenón	Xe	54	131.30
Yodo	I	53	126.904 4
Zinc	Zn	30	65.37
Zirconio	Zr	40	91.22

ÍNDICE


Mc
Graw
Hill